

关于Pak折叠的一些研究

汪诗文

上海交通大学附属中学, 上海

收稿日期: 2024年7月13日; 录用日期: 2024年8月7日; 发布日期: 2024年8月14日

摘要

Igor Pak对立方体进行改造, 构造出了表面和立方体等距同构的一个非凸多面体且围出更大的体积, 本文将此构造方法称之为“Pak折叠”, 在其启发下, 本文将Pak折叠思想运用于对正六面体以外的正多面体的改造: (1) 正四面体、(2) 正八面体、(3) 正十二面体、(4) 正二十面体, 我们进行了类似的改造, 详细计算了经过改造后所围体积, 最终给出相应体积关于参数的渐近展开公式, 从而发现决定体积增减的决定性原因。我们推测, 对于其他凸多面体, 都可能有类似于Pak折叠的通用改造方法, 但是由于非正多面体的复杂性, 该问题有待进一步解决证明。由于这样的改造在不改变表面积的情况下, 会增加体积, 而且改造后的形状可能适用于一些特殊需要, 由此我们也指出一些潜在的实际应用并计算了改造的有效范围。

关键词

等距同构, 凸多面体, 非凸多面体, Pak折叠

Some Research on Pak Bending

Shiwen Wang

High School Affiliated to Shanghai Jiao Tong University, Shanghai

Received: Jul. 13th, 2024; accepted: Aug. 7th, 2024; published: Aug. 14th, 2024

Abstract

Igor Pak transformed the cube and constructed a non-convex polyhedron with anisometric surface and a larger volume. This construction method is named “Pak bending” in this paper. Inspired by it, we study the application of the idea of Pak bending to the transformation of regular polyhedron other than regular hexahedron: (1) Regular tetrahedron, (2) Regular octahedron, (3) Regular dodecahedron, (4) Regular icosahedron. We carry out similar transformations, and calculate in detail the volume after transformation. Finally, we give the formula of the corresponding volume with

asymptotic expansion of the parameter, and find the decisive factor that determines the change of volume. We speculate that for other convex polyhedron, there may be a general transformation method similar to Pak bending, but due to the complexity of non-regular polyhedron, this problem needs to be further solved and proved. Since such a transformation increases volume without changing surface area, and the modified shape may be suitable for some special needs, we also indicate some potential practical applications and calculate the effective range of the transformation.

Keywords

Isometry, Convex Polyhedron, Non-Convex Polyhedron, Pak Bending

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. Igor Pak 论文的研究成果及本文对“Pak 折叠”概念的提出

通常在表面积相同的情况下，人们倾向于认为凸体所围的体积更大。然而 Igor Pak 在《Inflating the Cube Without Stretching》[1]一文中给出一个令人吃惊的结果。他通过对立方体进行改造，构造出了表面和立方体等距同构的一个非凸多面体，且围出更大的体积。在后续研究中，研究者们也以此为基础，给出了针对立方体更精细、体积更大的改造方法[2]。

这里首先介绍一下 Igor Pak 所研究的构造，以下简称 Igor Pak 构造：

Igor Pak 在文章中提出如下构造，改造步骤大致分三步：第一步切角，第二步拉平立方体的棱，第三步将切下的角折叠一下盖回。

考虑一个边长为 1 的正方体 C ，定义它的表面 $S = \partial C$ ，定义一个较小常量 $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，在正方体的每个面上的四个角处剪去四个 $\varepsilon \times \varepsilon$ 的正方形。

① 定义剩余的表面 R ， $R \subset S$

R 每个面上有四个顶点，如 A 、 B 、 C 、 D 为一组，称为拐角，4 个拐角构成一个正方形，将 6 个正方形沿其中心与正方体的中心的连线向外移(不改变正方形的大小形状)直至所有最相近的拐点之间的距离，如 AE ，为 2ε ，得到如图 1 的图形：

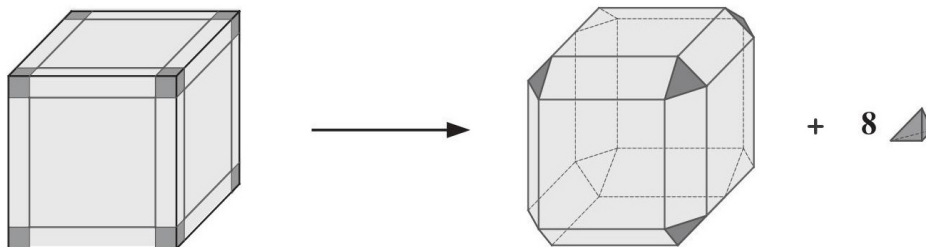


Figure 1. Pak bending (1)

图 1. Pak 折叠(1)

② 对于减去的 8 个正方体拐角，作如下改造(折叠)，如图 2：

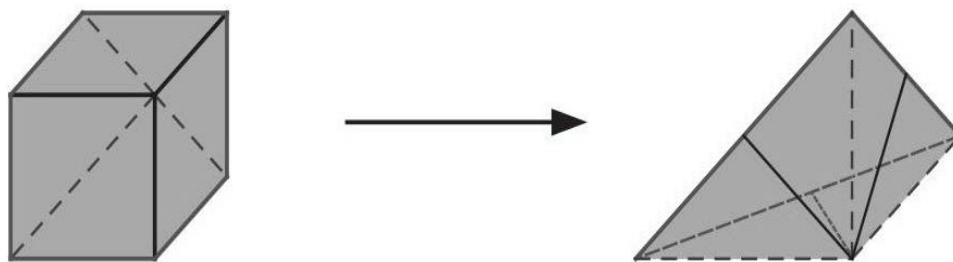


Figure 2. Pak bending (2)

图 2. Pak 折叠(2)

得到一个缺少底面的、棱长为 $\sqrt{2}\varepsilon$ ，底边长为 2ε 的正三棱锥。

结合① ②，将②盖回①，得到多面体 P_ε ，定义 P_ε 的表面 $S = \partial P_\varepsilon$ ，可以观察得到 ∂C 与 ∂P_ε 是等距同构的。

我们在研究 Igor Pak 在提出的这个构造时，考虑到这个构造的独特性，而且之前没有概括性定义或概念，为了研究和交流方便，我们暂且把上面这个构造方式叫做“Pak 折叠”。

受 Igor Pak 构造启发，我们在下文对“Pak 折叠”做一些延伸研究。

2. 将 Pak 折叠运用于正六面体以外的正多面体

2.1. 正四面体

现有一个棱长为 1 的正四面体。设原体积为 V ，改造后的体积为 V' 。

在每个面上剪去三个角，如图 3 所示：

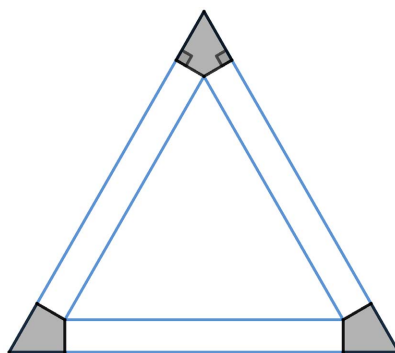


Figure 3. Cut the "horns"

图 3. 剪去“角”

于是四面体整体剪下四个“角”，每个“角”由三个平面等形拼成，大致形态如图 4 所示：

令 $B_1C_1 = C_1D_1 = \dots = \varepsilon$ ，则 $A_1B_1 = A_1D_1 = \dots = \sqrt{3}\varepsilon$ ， $A_1C_1 = A_1E_1 = \dots = 2\varepsilon$ 。

沿 A_1C_1 、 A_1E_1 、 A_1G_1 折起，将 A_1D_1 、 A_1F_1 、 A_1B_1 拉平，由于 $\angle A_1D_1C_1 = \angle A_1D_1E_1 = 90^\circ$ ，拉平后的 C_1 、 D_1 、 E_1 在同一直线上，得到如图 5 所示的形状：

以 A_1 、 C_1 、 E_1 、 G_1 为顶点的、棱长为 2ε 的、没有底面的“正四面体”。

下面对减去“角”后的正四面体的剩余部分进行与 Pak 类似的改造，如图 6：

将图中蓝色正三角形向外移，不改变其大小形状，直至 CD 与 AB 、 EF 共面， AB 、 EF 成为新的折痕，如图 7：

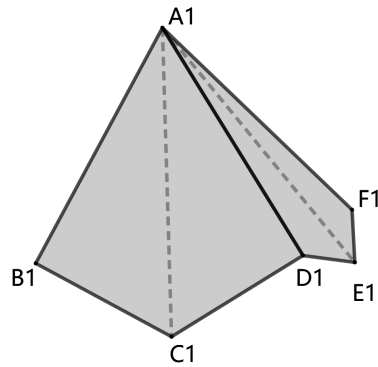


Figure 4. The “horn” that has been cut off
图 4. 剪下的“角”

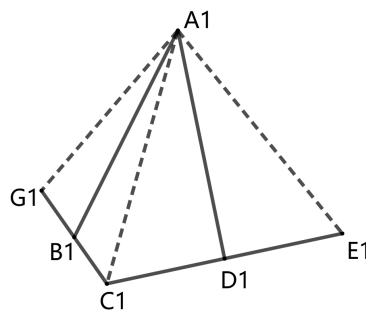


Figure 5. The transformed “horn”
图 5. 改造后的“角”

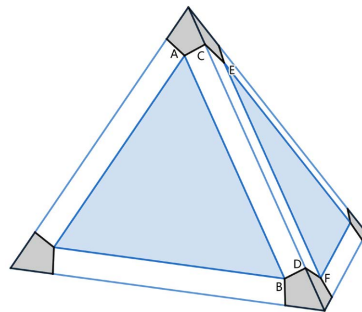


Figure 6. The remaining part of the regular tetrahedron
图 6. 正四面体的剩余部分

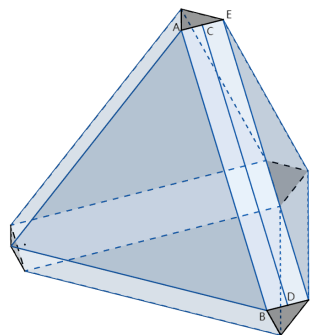


Figure 7. The transformed remaining part
图 7. 改造后的剩余部分

由于 $\angle ACD = \angle ECD = 90^\circ$ ，所以点 A 、点 C 、点 E 共线，同理点 B 、点 D 、点 F 共线。

平面四边形 $AEFB$ 是长为 $(1-2\sqrt{3}\varepsilon)$ ，宽为 2ε 的矩形。

最后将 4 个“正四面体”贴回 4 个角。

下面计算改造后的多面体的体积：

如图 8：阴影部分的中心正四面体 $V_1 = \frac{\sqrt{2}}{12}(1-2\sqrt{3}\varepsilon)^3$

(正四面体体积 = $\frac{\sqrt{2}}{12}$ 棱长³ [3])

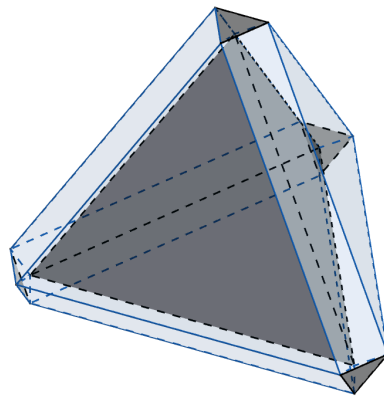


Figure 8. The centred regular tetrahedron

图 8. 中心正四面体

观察图 9 棱柱，易知是直棱柱。

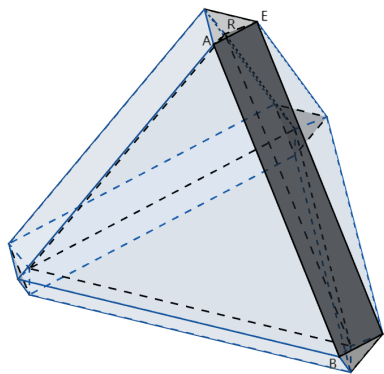


Figure 9. The right prism

图 9. 直棱柱

计算棱柱的底面：

令正四面体相邻两面所成二面角为 α 。此三角形是顶角为 $\pi-\alpha$ 、底边为 2ε 的等腰三角形，如图 10：

$$d = \frac{\varepsilon}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\varepsilon}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon。 \quad (\text{正四面体二面角} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} \quad [3])$$

如图 11 扁棱柱(共 4 个)体积 $V_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-2\sqrt{3}\varepsilon)^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon。$

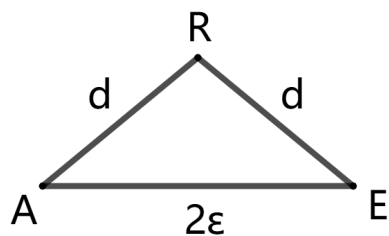


Figure 10. The isosceles triangle
图 10. 等腰三角形

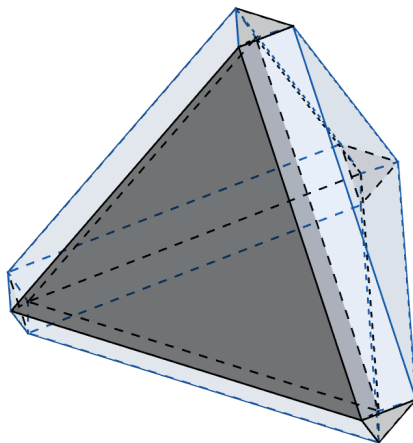


Figure 11. The flat prism
图 11. 扁棱柱

直棱柱(共 6 个)体积 $V_3 = (1 - 2\sqrt{3}\varepsilon) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\right)^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

底面边长为 2ε 、侧棱长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon$ 的正三棱锥(共 4 个)如图 12:

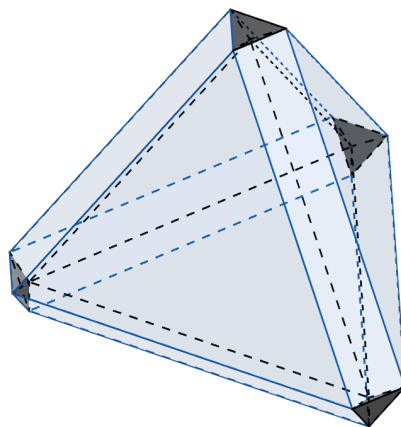


Figure 12. The regular triangular pyramid
图 12. 正三棱锥

计算得高 $h = \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}}$, $V_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\varepsilon)^2 \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}}$ 。

$$V' = V_1 + 4V_2 + 6V_3 + 4V_4 + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{12} (2\varepsilon)^2$$

$$\begin{aligned} \text{总体积} &= \frac{\sqrt{2}}{12} (1-2\sqrt{3}\varepsilon)^3 + \frac{3}{\sqrt{2}} (1-2\sqrt{3}\varepsilon)^2 \cdot \varepsilon + 3\sqrt{2} (1-2\sqrt{3}\varepsilon) \cdot \varepsilon^2 + 2\sqrt{2}\varepsilon^3 + \frac{8\sqrt{2}}{3} \varepsilon^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} \varepsilon - 6\sqrt{2}\varepsilon^2 \left(\frac{68}{3}\sqrt{2} - 8\sqrt{6} \right) \varepsilon^3 \end{aligned}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $V' > V$ 。

以下正八面体、正十二面体、正二十面体进行类似的改造, 过程略写。

仍设原体积为 V , 改造后的体积为 V' , 相应正多面体相邻两面所成二面角为 α 。

2.2. 正八面体

“角”改造为所有棱长均为 2ε 的正四棱锥, 如图 4、图 5。

如图 13, 计算得:

$$V' = \frac{\sqrt{2}}{3} (1-2\sqrt{3}\varepsilon)^3 \quad (\text{正八面体体积} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{棱长}^3 \text{ [3]})$$

$$+ 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (1-2\sqrt{3}\varepsilon)^3 \cdot d + 12 \times (1-2\sqrt{3}\varepsilon) \cdot \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \beta + 6 \times (2\varepsilon)^2 \sqrt{d^2 - 2\varepsilon^2} + 6 \times (2\varepsilon)^2 \sqrt{4\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2}$$

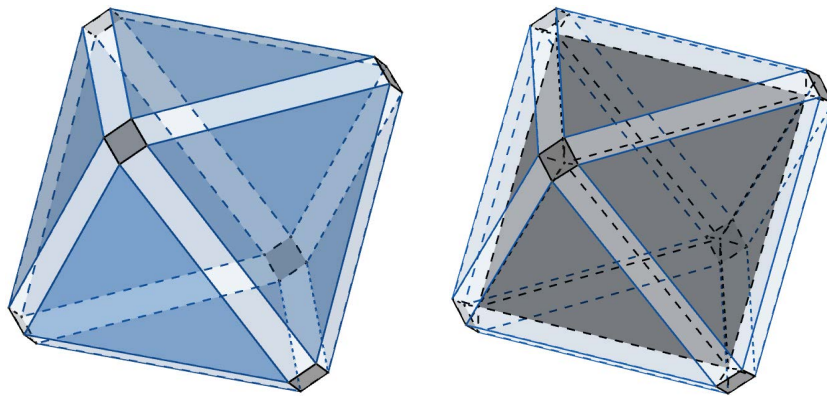


Figure 13. The transformed regular octahedron
图 13. 改造后的正八面体

类似地, 如图 10: 计算得:

$$d = \frac{\varepsilon}{\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)} = \frac{\varepsilon}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{3}\varepsilon \quad (\text{正八面体二面角} = 2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ [3]})$$

$$\begin{aligned} V' &= \frac{\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{6}\varepsilon + 6\varepsilon + k_1\varepsilon^2 + k_2\varepsilon^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} + 2(3-\sqrt{6})\varepsilon + k_1\varepsilon^2 + k_2\varepsilon^3 \end{aligned}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $V' > V$ 。

2.3. 正十二面体

$$\pi - \alpha = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$$

类似地, 如图 10: 计算得:

$$d = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos(\pi - \alpha)}} = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \quad (\text{正十二面体二面角} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}) \quad [3])$$

如图 14、图 15, “角”: $A_1C_1 = (\sqrt{5} - 1)\varepsilon$, $A_1B_1 = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\varepsilon$ 改造为正三棱锥

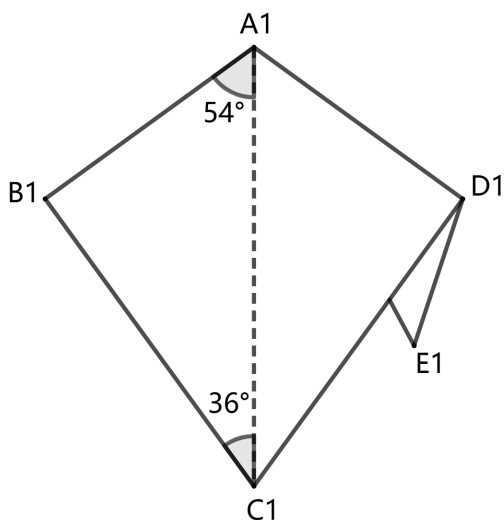


Figure 14. The “horn” that has been cut off
图 14. 剪下的“角”

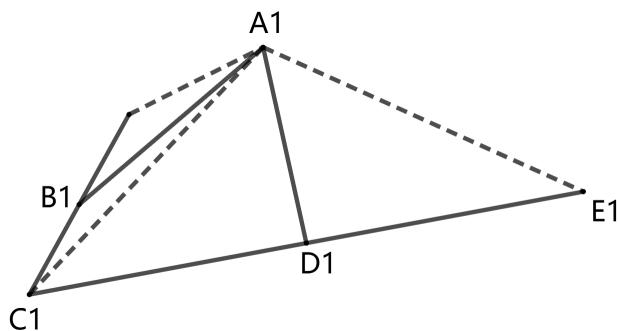


Figure 15. The transformed “horn”
图 15. 改造后的“角”

如图 16: 计算得:

$$V' = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} (1 - 2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\varepsilon)^3 \quad (\text{正十二面体体积} = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \text{棱长}^3 [3])$$

$$\begin{aligned}
& +12 \times \frac{5}{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \left(1-2\sqrt{5-2\sqrt{5}\varepsilon}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \varepsilon \\
& +30 \times \left(1-2\sqrt{5-2\sqrt{5}\varepsilon}\right) \cdot \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin(\pi-\alpha) + 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (2\varepsilon)^2 \sqrt{d^2 - \frac{4}{3}\varepsilon^2} \\
& + 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (2\varepsilon)^2 \sqrt{\left[(\sqrt{5}-1)\varepsilon\right]^2 - \frac{4}{3}\varepsilon^2} \\
& = \frac{15+7\sqrt{5}}{4} - \frac{3(15+7\sqrt{5})\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2} \varepsilon + \frac{12 \times 5 \times \sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{5-2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}} \varepsilon + k_1 \varepsilon^2 + k_2 \varepsilon^3 \\
& = \frac{15+7\sqrt{5}}{4} + 5.865\varepsilon + k_1 \varepsilon^2 + k_2 \varepsilon^3 \\
V & = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}。
\end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $V' > V$ 。

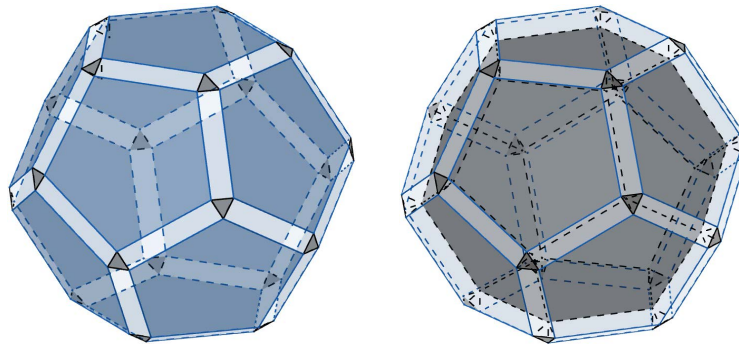


Figure 16. The transformed regular dodecahedron
图 16. 改造后的正十二面体

2.4. 正二十面体

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} \quad (\text{正二十面体二面角} = 2 \arcsin \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}) \quad [3]$$

如图 10, 类似地计算可得

$$d = \frac{\varepsilon}{\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)} = \frac{\varepsilon}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \varepsilon \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2} \varepsilon$$

如图 17: 计算得:

$$\begin{aligned}
V' & = \frac{15+5\sqrt{5}}{12} (1-2\sqrt{3}\varepsilon)^3 \quad (\text{正二十面体体积} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \text{棱长}^3 [3]) \\
& + 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (1-2\sqrt{3}\varepsilon)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2} \varepsilon \\
& + 30 \times \left(1-2\sqrt{3}\varepsilon\right) \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2} \varepsilon \right]^2 \cdot \sin(\pi-\alpha) + 12V_1 + 12V_2
\end{aligned}$$

$$= \frac{15+5\sqrt{5}}{12} + \frac{15(\sqrt{5}+1-\sqrt{3})-5\sqrt{15}}{2} \varepsilon + k_1 \varepsilon^2 + k_2 \varepsilon^3 + 12V_1 + 12V_2$$

易知, $V_1, V_2 \propto \varepsilon^3$

$$V = \frac{15+5\sqrt{5}}{12}。$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $V' > V$ 。

于是 Pak 折叠在所有正多面体上都适用。

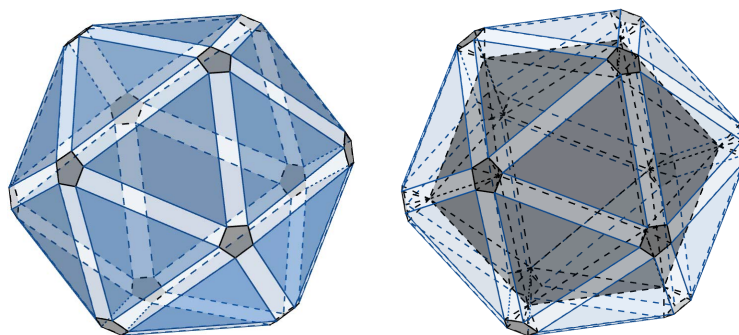


Figure 17. The transformed regular icosahedron
图 17. 改造后的正二十面体

2.5. 归纳延伸

事实上, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\Delta V = \frac{dV}{d\varepsilon} \times d\varepsilon = V$ 关于 ε 的一阶导 $\times \varepsilon$ (即 V 表达式中 ε 一次项) = 正多面体原表面积 \times 移动后的每个面到原来的面的距离 h (本文未给出 h 的计算)。

如(1)正四面体中: $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} \varepsilon = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \varepsilon$

容易观察到, 对正多面体进行 Pak 折叠时, 每个面都是向外移动的, 即 $h > 0$, 且容易证明 $h \propto \varepsilon$; 而每个角、棱上的改造是 ε 高阶无穷小, 可以忽略不计, 因此 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, V 关于 ε 的一阶导数必然大于 0, 即改造后的体积必然变大。

当 ε 逐渐变大, 角和棱上的体积减少变得不可忽略, V 也可能相应变小。

直观地说, Pak 折叠使凸多面体变为凹多面体的同时体积增大, 本质是因为每个面都比原来突出, 而棱角处凹陷的体积相比面突出的体积是无穷小的高阶项。

因此, 对于其他凸多面体, 都可能类似于 Pak 折叠的通用改造方法, 使构造出等距同构的、凹的、体积变大的多面体, 但是由于非正多面体的复杂性, 该问题有待进一步解决证明。

3. Pak 折叠在实践中可能的运用及改造的有效范围

如表面积不变的同时增加了容积, 可以节省包装材料; 部分突出的凹多面体可以有效保护凹陷的中间部分; 突出的八个角可能起到探测作用……Pak 折叠在实际中有许多待发掘的应用价值。

Pak 在文章中只证明了 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时改造后的体积变大。为了在实际中运用该构造, 我们需要知道 ε 具体在什么范围内是有效的。

将 Pak 的列式准确计算得到:

$$\begin{aligned}
 V &= (1-2\varepsilon)^3 + 6\sqrt{2}(1-2\varepsilon)^2\varepsilon + 12(1-2\varepsilon)\varepsilon^2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}\varepsilon^3 \\
 &= 1 + 6(\sqrt{2}-1)\varepsilon - 24(\sqrt{2}-1)\varepsilon^2 + \left(\frac{80\sqrt{2}}{3}-32\right)\varepsilon^3
 \end{aligned}$$

一阶导 $V' = 6(\sqrt{2}-1) - 48(\sqrt{2}-1)\varepsilon + 3\left(\frac{80\sqrt{2}}{3}-32\right)\varepsilon^2$ 。

于是计算得到 $\varepsilon \in (0, 0.3026)$ 时, $V > 1$ 。

二阶导 $V'' = -48(\sqrt{2}-1) + 6\left(\frac{80\sqrt{2}}{3}-32\right)\varepsilon$

于是 $\varepsilon \in (0, 0.1425)$ 时, V 单调递增。

$\varepsilon \in (0.1425, 0.3026)$ 时, V 单调递减。

$\varepsilon = 0.1425$ 时, V 有最大值。

上述结果表明 ε 在一个较宽泛的范围内时, 对正方体进行 Pak 折叠都可以得到表面积相同、等距同构、同时体积更大的凹多面体。这可能在物流运输、产品包装、海洋探测、天文探测等方面有参考、运用价值。

4. 结论

将 Pak 折叠应用到其他正多面体, 可以构造出等距同构的、凹的、体积变大的多面体, 其体积增减的决定性原因在于, 每个面都比原来突出, 而棱角处凹陷的体积相比面突出的体积是无穷小的高阶项, 因此, 对于其他凸多面体, 都可能类似于 Pak 折叠的通用改造方法, 但是由于非正多面体的复杂性, 该问题有待进一步解决证明。Pak 折叠在实际中有许多待发掘的应用价值, 为此我们也给出了改造的有效范围。

致 谢

特别感谢我的指导老师, 上海交通大学数学科学学院的来米加教授, 对我的悉心指导和帮助; 感谢所有英才计划相关的老师和工作人员的支持。

参考文献

- [1] Pak, I. (2008) Inflating the Cube without Stretching. *American Mathematical Monthly*, **115**, 443-445.
- [2] Buchin, K. and Schulz, A. (2007) Inflating the Cube by Shrinking. *Proceedings of the 23rd European Workshop on Computational Geometry*, 125-126. <https://doi.org/10.1145/1247069.1247091>
- [3] 五种正多面体的二面角以及体积的计算, 以及六种四维正多胞体的二面角和超体积的计算[EB/OL]. <http://zhuanlan.zhihu.com/p/455979279>, 2022-11-05.