

基于高斯混合模型的非刚性点集配准

石先英, 杨奋林

吉首大学数学与统计学院, 湖南 吉首

收稿日期: 2024年7月15日; 录用日期: 2024年8月9日; 发布日期: 2024年8月16日

摘要

点集配准的目的是获取对应关系和估计模型点集到目标点集的变换。非刚性点集配准的求解难度大, 且点集可能含有噪声、遮挡等失真使其求解更加复杂。概率点集配准方法因其对变形、噪声和遮挡具有鲁棒性, 本文将点集配准视为概率密度估计问题, 通过极大似然估计, 并用EM算法求解对应关系及变换。在再生核希尔伯特空间中指定了两点集之间的变换, 并对核函数(即高斯分布)中的高斯滤波器的宽度在迭代过程中逐渐缩小。在合成数据的实验表明, 本文方法在变形、噪声等各种类型的畸变下具有鲁棒性, 与CPD算法比较, 本文方法比它的配准误差更小。

关键词

点集配准, GMM, EM算法

Non-Rigid Point Set Registration Based on Gaussian Mixture Model

Xianying Shi, Fenlin Yang

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Jul. 15th, 2024; accepted: Aug. 9th, 2024; published: Aug. 16th, 2024

Abstract

The purpose of point set alignment is to obtain correspondences and estimate the transformation from the model point set to the target point set. Non-rigid point set alignment is difficult to solve, and the point set may contain distortions such as noise and occlusion to complicate its solution. Probabilistic point set alignment methods are robust to distortions, noise and occlusion, and in this paper, point set alignment is considered as a probability density estimation problem, which is estimated by great likelihood and solved by EM algorithms for the correspondences and transformations. The

transformation between the two point sets is specified in the regenerated kernel Hilbert space, and the width of the Gaussian filter in the kernel function (*i.e.*, the Gaussian distribution) is gradually narrowed down during the iteration process. Experiments on synthesized data show that the method of this paper is robust under various types of distortions such as deformation and noise, and compared with the CPD algorithm, the method of this paper has less alignment error than it.

Keywords

Point Set Registration, Gaussian Mixture Model, EM Algorithm

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在计算机视觉的相关领域中,寻找使模型点集(即移动点集)与目标点集(即固定点集)这两组点之间最优对齐的变换是一个基本而重要的问题,被称为点集配准问题,其求解主要分为获取对应关系和估计变换参数两个部分。点集配准作为计算机视觉的关键组成部分,已被应用于众多领域,如图像配准[1]、遥感[2]、目标识别[3]等。在非刚性点集配准中,两个点集对齐的变换未知,求解难度大,且点集可能含有变形、噪声等失真使其求解更加复杂,因此,学者们提出了不同的方法来解决点集配准问题。

近年来,将非刚性点集配准看作概率密度估计问题,其中概率密度函数使用高斯混合模型(Gaussian Mixture Model, GMM),在非刚性点集配准模型中得到了广泛的应用。使用 GMM 求解点集配准的算法有两类:一类是用两种高斯混合分别表示模型点集和目标点集,通过最小化两种高斯混合之间的差异来解决点集配准问题[4];另一类是将一个点集表示为高斯混合建模的模板密度,另一个点集作为样本数据,然后将点集配准解释为混合密度估计问题,采用期望最大化(Expectation Maximization, EM)算法[5] [6]解决,其中本文关于非刚性点集配准问题的求解属于第二类。

1998年由 Gold [7]等人提出鲁棒点匹配(Robust Point Matching, RPM)算法,后面由 Chui [8]等人对 RPM 算法进行优化,该文献研究表明, RPM 算法中点集之间对应关系的估计和空间变换的更新相当于 GMM 中 EM 算法的实现,实际上,很多学者如 Cross 和 Hancock [9], Luo 和 Hancock [10]等都是将点集配准问题转化为基于 GMM 的最大似然(maximum likelihood estimation, ML)估计问题。2010年, Myronenko 等人[6] [11]针对刚性和非刚性点集配准提出了相干点漂移(Coherent Point Drift, CPD)算法,该算法通过最大化似然函数将高斯混合模型的中心(即模型点集)拟合到数据(即目标点集),并约束高斯混合模型的中心需一致性移动,以保持点集的拓扑结构。CPD 算法对点集配准具有较显著的鲁棒性,其中鲁棒性指的是在当点集含有噪声、遮挡等失真时,该算法都能较准确的估计两个点集的对应关系。

本文借鉴 Myronenko 等人的思想,在 CPD 算法基础上,使用 EM 算法进行模型的求解,并在迭代过程中对引入的 Tikhonov 正则化框架中核函数的参数以一定步长逐步减小的方法对模型进行迭代求解,进而优化了非刚性点集配准的模型,提高点集配准结果的精度。

2. GMM 点集配准

本文将 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 两个点集之间的配准看作概率密度估计问题,其中 \mathbf{x} 表示 GMM 质心, \mathbf{y} 表示由 GMM

生成的数据点, GMM 拟合观测数据点集 \mathbf{Y} , 这样 GMM 密度的质心约束转化为模型点 $\mathbf{T}(\mathbf{X})$, 在最优状态下, 两个点集对齐, 并利用给定数据点的 GMM 后验概率的最大值得到对应关系。

给定两个点集, 分别为含有 N 个点的模型点集 $\mathbf{X}=(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M)^T \in R^{M \times D}$ 以及含有 M 个点的目标点集 $\mathbf{Y}=(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_M)^T \in R^{M \times D}$, 其中每一个点用 $1 \times D$ 的行向量表示, D 表示空间维数。点集配准的目的是估计两个点集之间的对应关系以及变换 $\mathbf{T}: IR^D \rightarrow IR^D$, 该变换 \mathbf{T} 作用于 \mathbf{X} , 使得点集 \mathbf{Y} 与变换后的 $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ 最佳对齐。

在本文中引入一组潜在变量 $\mathbf{Z}=\{z_m \in N_{N+1}: m \in N_M\}$, 其中 $z_m = n, 1 \leq n \leq N$ 表示观测值 \mathbf{y}_m 与模型点 \mathbf{x}_n 相匹配, 而 $z_m = N+1$ 表示观测值 \mathbf{y}_m 为离群值, 则 GMM 概率密度函数可以表示为:

$$P(\mathbf{y}_m) = \sum_{n=1}^{N+1} P(z_m = n) P(\mathbf{y}_m | z_m = n). \quad (1)$$

其中 $P(\mathbf{y}_m | z_m = n)$ 为正态分布密度函数, 即

$$P(\mathbf{y}_m | z_m = n) = \frac{1}{2\pi\delta^2} e^{-\frac{\|\mathbf{y}_m - \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)\|^2}{2\delta^2}}. \quad (2)$$

本文对所有 GMM 分量使用相等的各向同性协方差 δ^2 , 文献[12]中使用全高斯模型, 需要注意的是, 数据中各向异性高斯噪声的一个更一般的假设。假设离群值分布 $P(\mathbf{y}_m | z_m = N+1)$ 为均匀分布, 本文将离群概率密度设为 $1/a$, 其中 a 在二维空间中表示面积, 在三维空间中表示体积。GMM 的概率密度函数被表示为:

$$P(\mathbf{y}_m | \boldsymbol{\eta}) = \gamma \frac{1}{a} + (1-\gamma) \sum_{n=1}^N \frac{C_{mn}}{(2\pi\delta^2)^{D/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}_m - \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)\|^2}{2\delta^2}}. \quad (3)$$

其中 $\gamma \in [0, 1]$ 表示异常值的百分比, C_{mn} 表示 GMM 的隶属度概率, 本文设 $C_{mn} = 1/M$ 使得 $\sum_{m=1}^M C_{mn} = 1$, $\boldsymbol{\eta} = \{\mathbf{T}, \delta^2, \gamma\}$ 为一组未知参数。

使得两个点集对齐的变换 \mathbf{T} 是未知的和非刚性的, 其变换广泛, 可能会导致一个不适定问题, 因此, 使用 Tikhonov 正则化框架来解决该问题。在 Tikhonov 正则化框架中, 变换 \mathbf{T} 可以定义为

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{v}(\mathbf{X}). \quad (4)$$

其中 $\mathbf{v}(\mathbf{X}) = \mathbf{G}\mathbf{W}$ 表示位移函数, 本文对位移函数进行正则化以加强该函数的平滑性。关于非刚性点集变换 \mathbf{T} 的求解可以通过最小化负对数似然函数来估计:

$$L(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^{old}) = \frac{1}{2\delta^2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N P(z_m = n | \mathbf{y}_m, \boldsymbol{\eta}^{old}) \|\mathbf{y}_m - \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)\|^2 + \frac{M_p D}{2} \ln \delta^2 - M_p \ln(1-\gamma) - (M - M_p) \ln \gamma + \frac{\lambda}{2} \varphi(\mathbf{v}). \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{\eta}^{old}$ 表示当前的参数值, $M_p = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N P(n | \mathbf{y}_m, \boldsymbol{\eta}^{old}) \leq M$, λ 为正则化参数, $\varphi(\mathbf{v})$ 是一个相干约束,

$$\varphi(\mathbf{v}) = \text{tr}(\mathbf{W}^T \mathbf{G}\mathbf{W}). \quad (6)$$

其中 \mathbf{W} 是一个系数矩阵, \mathbf{G} 是一个核矩阵, \mathbf{G} 的第 (i, j) 个元素 $G_{ij} = \exp\left\{-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\beta^2}\right\}$, $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹。

3. EM 算法求解模型

估计混合模型的参数有几种方法, 如 EM 算法、梯度下降和变分推理。EM 算法[13]是一种在潜在变量的背景下进行学习和推理的技术, 它在期望步骤(E-step)和最大化步骤(M-step)两个步骤之间交替进行。下面讨论通过 EM 算法在 E-step 和 M-step 迭代求解未知变量 $\gamma, \delta^2, \mathbf{T}$ 。

3.1. E-Step

E 步使用当前的参数值 $\boldsymbol{\eta}^{old}$ 寻找潜在变量的后验分布, 用大小为 $M \times N$ 的 \mathbf{P} 矩阵表示贝叶斯后验概率的矩阵, 其中矩阵 \mathbf{P} 中的某个元素 (m, n) 可以表示为 $p_{mn} = \mathbf{P}(z_m = n | \mathbf{y}_m, \boldsymbol{\eta}^{old})$, 通过应用贝叶斯理论计算得:

$$p_{mn} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{y}_m | z_m = n, \boldsymbol{\eta}^{old}) \mathbf{P}(z_m = n | \boldsymbol{\eta}^{old})}{\mathbf{P}(\mathbf{y}_m | \boldsymbol{\eta}^{old})} = \frac{e^{-\frac{\|\mathbf{y}_m - \mathbf{T}(x_n)\|^2}{2\delta^2}}}{\sum_{k=1}^N e^{-\frac{\|\mathbf{y}_m - \mathbf{T}(x_k)\|^2}{2\delta^2}} + \frac{\gamma(2\pi\delta^2)^{D/2} M}{(1-\gamma)a}}. \quad (7)$$

其中后验概率 p_{mn} 是一个软赋值, 表示在当前估计的变换 \mathbf{T} 下, 观测数据点 \mathbf{y}_m 与模型点 x_n 的重合程度。

3.2. M-Step

通过 E-step 求解出了对应关系的矩阵 \mathbf{P} , 接下来通过求解新的参数 $\boldsymbol{\eta}$ 。对于参数 γ 和 δ^2 , 利用公式(5)分别对其求偏导并令其为等于零, 则有

$$r = 1 - \frac{M_p}{M}. \quad (8)$$

$$\delta^2 = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \|\mathbf{y}_m - \mathbf{T}(x_n)\|^2}{M_p D}. \quad (9)$$

由文献[11]可知, CPD 算法对参数 β 的选择敏感, 因为它定义了非刚性变换的模型, 由于 β 决定样本之间交互作用范围的宽度, 并且该参数与 δ 都表示高斯分布中的标准差, 因此考虑将参数 β 与 δ^2 类似进行优化, 即在 EM 求解过程中逐渐缩小样本间相互作用范围的宽度 β , 本文将其设置为:

$$\beta = \beta - c, c \in C. \quad (10)$$

其中 c 为常数, 表示步长, 将新的 β 带入核函数, 然后用下列式子求解系数矩阵 \mathbf{W} :

$$\mathbf{W} = (\mathbf{G} + \lambda \delta^2 d(\mathbf{P}\mathbf{1}))^{-1} \times (d(\mathbf{P}\mathbf{1})^{-1} \mathbf{P}\mathbf{X} - \mathbf{Y}). \quad (11)$$

其中 $\mathbf{1}$ 是元素都为 1 的列向量, $d(\cdot)$ 是对角矩阵。

3.3. 参数的设置与求解

使用较大的方差 $\delta^2 = \frac{1}{DMN} \sum_{m,n=1}^{M,N} \|\mathbf{y}_m - \mathbf{x}_n\|^2$ 进行初始化, 使得目标函数在一个大的区域内变成凸的, 随着迭代进行求解有机会达到一个稳定的局部最小值。该算法有三个主要参数: γ 、 β 和 λ , 其中参数 γ 表示对点集中离群值占比的假设, β 决定样本之间交互作用范围的宽度, λ 控制与数据的接近度以及解

的平滑度之间的权衡, 分别将其初始值设为 0.1, 2 以及 3。

本文使用 EM 算法求解点集配准的伪代码如下:

输入: 模型点集 \mathbf{X} , 目标点集 \mathbf{Y} , 初始参数 γ, λ, β ;

初始化: $\mathbf{W} = \mathbf{0}$, $\delta^2 = \frac{1}{DMN} \sum_{m,n=1}^{M,N} \|\mathbf{y}_m - \mathbf{x}_n\|^2$, $\lambda = 3$, $\beta = 2$;

重复 E-step 和 M-step 直到满足某个停止准则, 停止迭代:

E-step: 通过(7)更新后验概率矩阵 \mathbf{P} ;

M-step: 分别用(8)(9)(10)更新 γ, δ^2, β ;

通过(11)计算 \mathbf{W} ;

更新 $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{GW}$;

输出: 变换 \mathbf{T} 。

4. 实验

为了评估所提出的在 CPD 算法基础上对参数 β 进行迭代求解方法的有效性, 对改进算法进行实验并与 CPD 算法进行定量比较, 其中 CPD 算法的实现是使用公开的代码。本文实验是在 MATLAB R2022a 软件上进行的, 与原始的 CPD 算法相比, 本文算法在合成数据中得到更优的结果。

4.1. 实验数据及设置

实验使用在非刚性点集配准中使用最多的 Chui-Rangarajan [8] 的合成数据集, 由于点集坐标系可能不同, 因此在实验中先对点集坐标进行数据标准化, 使得两个集合中的点为零均值和单位方差。

本文在生成的数据集上进行了测试, 包括:

- (1) 非刚性变形水平;
- (2) 点集位置的噪声量;
- (3) 点集遮挡的占比。

在变形测试中, 变形参数是通过从标准正态分布中采样的随机数据产生的, 在 0.04 到 0.18 之间取值; 在噪声测试中, 加入了标准差为 0 到 0.05 高斯噪声; 在遮挡测试中, 将部分点集数据删除, 它与原始数据的比为 0 到 0.5。对于变形、噪声和遮挡, 其参数越大, 点集的失真强度就越大。

在本研究中, 由于已知真实的对应关系, 为了定量评估结果, 通过对两个模型的欧氏距离来评估, 使用均方根误差(RMSE)来测量配准误差, 计算公式如下:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \|\mathbf{T}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i\|^2}. \quad (12)$$

其中, \mathbf{x}_i 是源集中的第 i 个点, S 表示两个点集之间的真实对应关系的数量。

4.2. 实验结果

为了验证本文算法对点集配准的鲁棒性及其配准结果, 本研究利用两组不同形状的合成点集进行了定性结果的展示以及定量结果的比较。

对鱼形状点集, 图 1~3 分别为鱼点集关于变形、噪声、缺失这三类失真的初始点集与配准结果, 其中上一行表示对应模型点集与其失真的目标点集的初始点集, 下一行为对应上一行初始点集的配准结果; 对另外一种形状模型福的定性结果展示与鱼点集类似, 图 4~6 分别为福点集关于变形、噪声和遮挡的初

始点集与配准结果, 上一行表示对应模型点集与其失真的目标点集的初始点集, 下一行为对应上一行初始点集的配准结果。从左至右每一列的失真程度逐渐增大, 目标是将模型点集(蓝色圆圈)对齐到数据点集(红色*号)上。

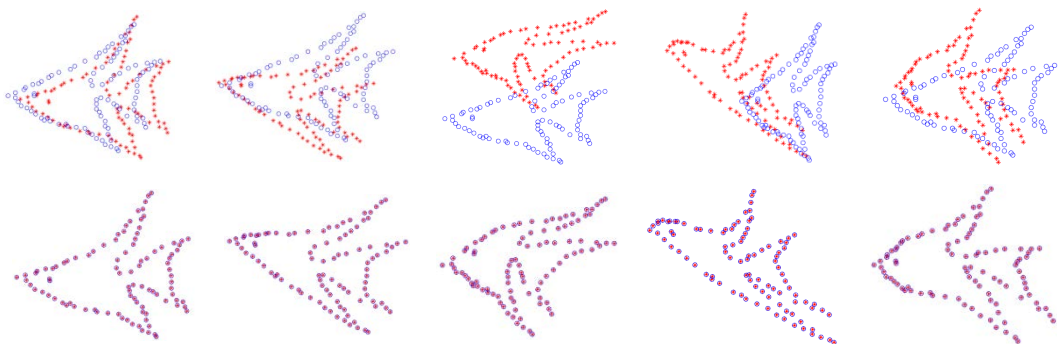


Figure 1. Initial position and the alignment result of the fish point set with deformation (increasing deformation from left to right)

图 1. 鱼点集变形(从左至右变形增大)的初始位置与配准结果

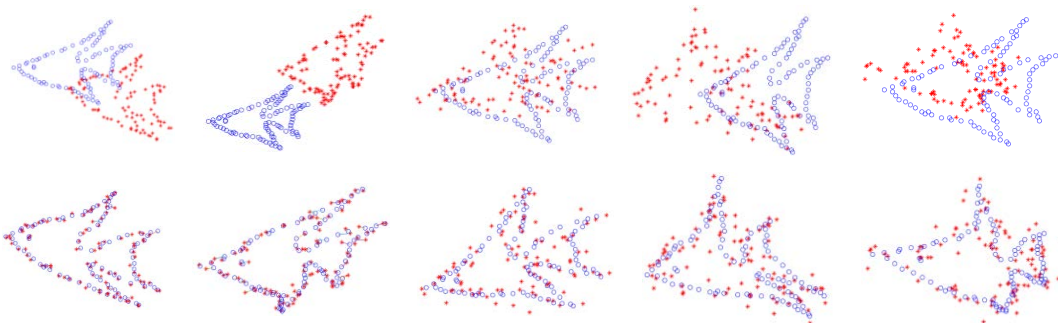


Figure 2. Initial position and the alignment result of the fish point set with noise (increasing noise from left to right)

图 2. 鱼点集噪声(从左至右噪声增加)的初始位置与配准结果

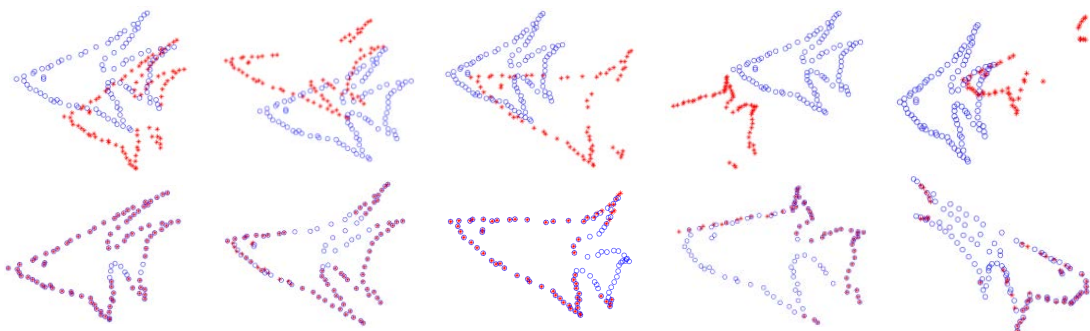


Figure 3. Initial positions and alignment results of the fish point sets with missing (increasing percentage of missing from left to right)

图 3. 鱼点集缺失(从左至右缺失比例增加)的初始位置与配准结果



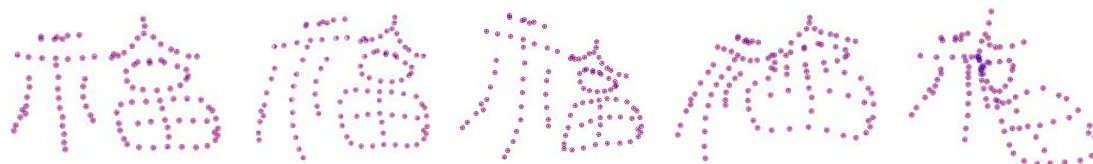


Figure 4. Initial position and the alignment result of the fu point sets with deformation (increasing deformation from left to right)

图 4. 福点集变形(从左至右变形增大)的初始位置与配准结果

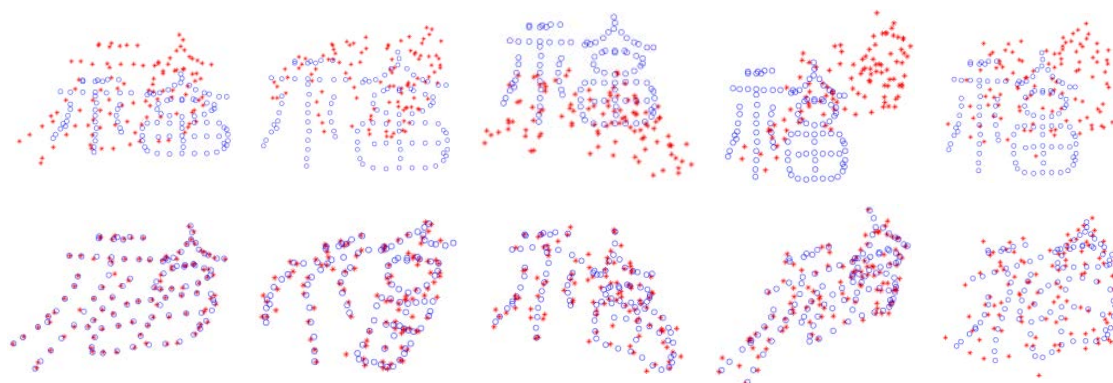


Figure 5. Initial position and the alignment result of the fu point set with noise (increasing noise from left to right)

图 5. 福点集噪声(从左至右噪声增加)的初始位置与配准结果

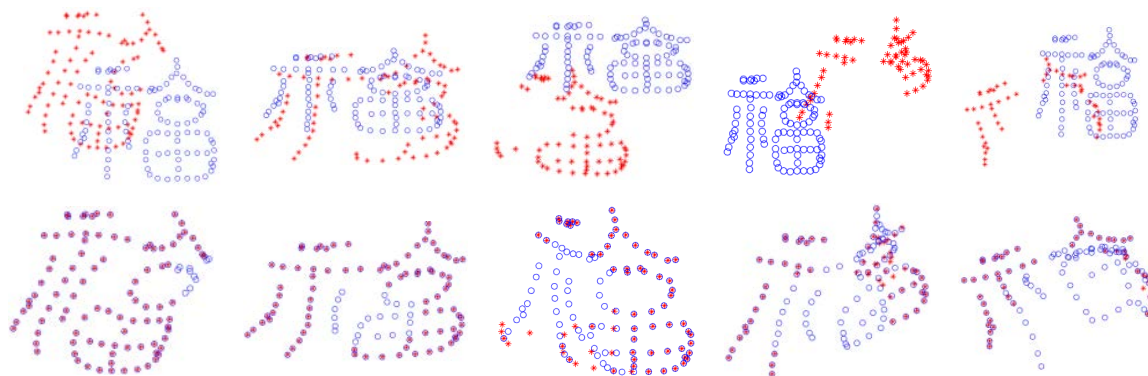


Figure 6. Initial positions and alignment results of the fu point sets with missing (increasing percentage of missing from left to right)

图 6. 福点集缺失(从左至右缺失比例增加)的初始位置与配准结果

图 1~6 是关于鱼形状点集与福形状合成数据点集的定性结果, 从结果中可以看到, 本文算法对点集配准的结果是鲁棒和准确的。为了将本文改进的算法定量与 CPD 算法进行比较, 使用公式(12)计算误差, 对每一级失真程度独立进行 50 次实验, 然后统计其配准误差的平均值 μ 和标准差 δ , 以此来定量比较 CPD 算法与本文改进的算法的性能。

为了方便, 下面表格中统一将本文改进算法命名为 **ours** 算法, 本文将误差统计的表格安排如下: 第一行为失真程度, 从左到右为逐渐增大, 第二行与第三行分别为 CPD 算法和 **ours** 算法关于对应列失真程度的配准误差结果, 其统计结果的均值和标准差记为 $\mu \pm \delta$ 的形式。统计结果表格汇总如下(表 1~6):

为了更直观的展示 CPD 算法与 **ours** 算法误差的大小, 将表格中的平均值用折线图展示, 对于噪声和遮挡的点集配准结果展示与变形一样, 下面将不再赘述。

图 7 为鱼形状点集与福形状点集关于不同变形程度的配准误差统计结果的平均值的折线图, 从图中可看出, ours 算法比 CPD 算法的表现更好, 其中由于鱼点集相对更简单, 两个算法之间的误差相差不大, 而福点集相对要复杂, 随着变形程度的增大, ours 算法误差相对更小。

Table 1. Means and standard deviations ($\mu \pm \delta$) of the alignment errors of CPD with ours for fish point sets at different levels of deformation

表 1. 鱼点集在不同变形程度下 CPD 与 ours 的配准误差的均值和标准差($\mu \pm \delta$)

变形程度	0.02	0.35	0.05	0.065	0.08
CPD	$2.4e-05 \pm 1.0e-05$	0.0004 ± 0.0012	0.0012 ± 0.0027	0.0103 ± 0.0176	0.0156 ± 0.0200
ours	$6.0e-06 \pm 6.1E-06$	0.0003 ± 0.0011	0.0008 ± 0.0020	0.0072 ± 0.0177	0.0146 ± 0.0249

Table 2. Means and standard deviations ($\mu \pm \delta$) of the alignment errors of CPD with ours for fu point sets at different levels of deformation

表 2. 福点集在不同变形程度下 CPD 与 ours 的配准误差的均值和标准差($\mu \pm \delta$)

变形程度	0.02	0.35	0.05	0.065	0.08
CPD	$3.4e-04 \pm 1.9e-04$	0.0015 ± 0.0016	0.0050 ± 0.0059	0.01370 ± 0.0130	0.0311 ± 0.0350
ours	$2.0e-05 \pm 6.5e-06$	$2.2e-04 \pm 0.0014$	0.0020 ± 0.0054	0.0081 ± 0.0134	0.0224 ± 0.0382

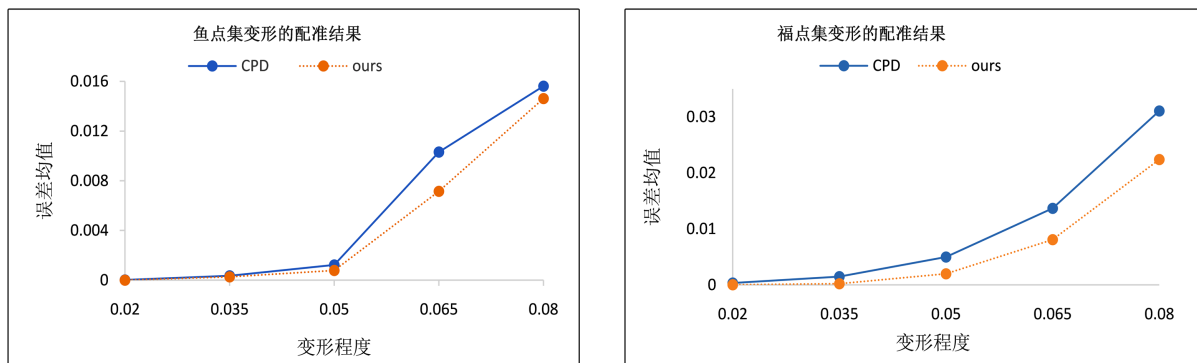


Figure 7. Mean error of the alignment results for the deformation of the fish point set (left) and the fuzzy point set (right)

图 7. 鱼点集(左边)与福点集(右边)变形的配准结果的均值误差

图 8 为鱼形状点集与福形状点集关于不同噪声配准误差统计结果的平均值的折线图, 从图中可看出 ours 算法比 CPD 算法的误差都更小, 噪声越大, ours 算法表现越好, 随着噪声强度的增大, 算法之间的误差相差越来越小。

Table 3. Means and standard deviations ($\mu \pm \delta$) of the alignment errors of the CPD method with ours for the fish point set at different of noise

表 3. 鱼点集在不同噪声百分比下 CPD 方法与 ours 的配准误差的均值和标准差($\mu \pm \delta$)

噪声强度	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
CPD	0.0116 ± 0.0025	0.0229 ± 0.0076	0.0332 ± 0.0084	0.0437 ± 0.0127	0.0521 ± 0.0064
ours	0.0104 ± 0.0023	0.0225 ± 0.0078	0.0319 ± 0.0047	0.0432 ± 0.0128	0.0501 ± 0.0051

Table 4. Means and standard deviations ($\mu \pm \delta$) of the alignment errors of the CPD method with ours for the fu point set at different of noise

表 4. 福点集在不同噪声百分比下 CPD 方法与 ours 的配准误差的均值和标准差($\mu \pm \delta$)

噪声强度	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
CPD	0.0183 \pm 0.0197	0.0246 \pm 0.0042	0.0354 \pm 0.0064	0.0500 \pm 0.0220	0.0583 \pm 0.0100
ours	0.0138 \pm 0.0193	0.0215 \pm 0.0029	0.0335 \pm 0.0055	0.0484 \pm 0.0222	0.0547 \pm 0.0074

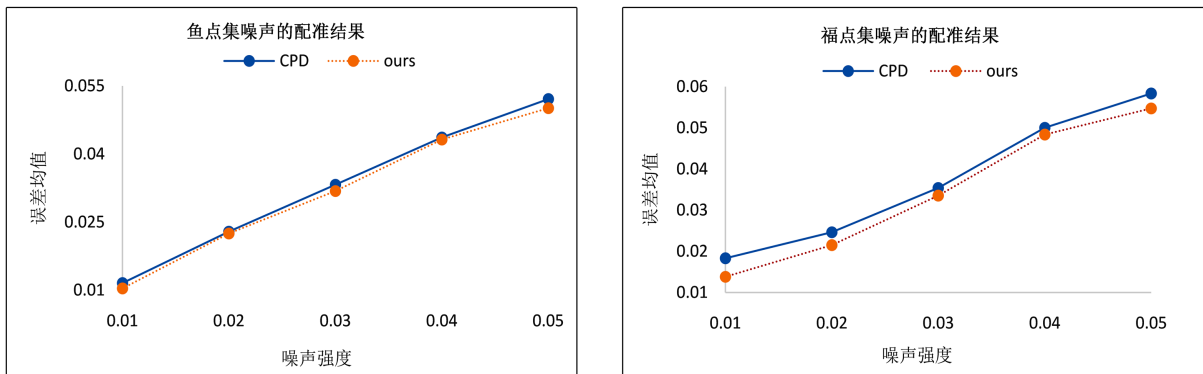


Figure 8. Mean error of the alignment results for the fish point set (left) and the fuzzy point set (right) noise

图 8. 鱼点集(左边)与福点集(右边)噪声的配准结果的均值误差

图 9 分别为鱼形状点集与福形状点集关于不同缺失百分比配准误差统计结果的平均值的折线图, 从图中可看出对于鱼点集在缺失百分比为 0.4 和 0.5 时 ours 算法表示更好, 对于福点集, 在不同缺失百分比下 ours 算法表现都明显更优于 CPD 算法。

由于鱼点集相对较简单, 本文算法 ours 与 CPD 算法之间的配准误差相差不大, 而对于福点集, 配准结果误差相对差距更大, 总体来说, 本文改进的算法相较于 CPD 算法的配准结果更优。

Table 5. Means and standard deviations ($\mu \pm \delta$) of the alignment errors of the CPD method with ours for the fish point set at different missing proportion

表 5. 鱼点集在不同缺失占比下 CPD 方法与 ours 的配准误差的均值和标准差($\mu \pm \delta$)

遮挡占比	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
CPD	0.0037 \pm 0.0056	0.0130 \pm 0.0162	0.0222 \pm 0.0185	0.0354 \pm 0.0241	0.0598 \pm 0.0371
ours	0.0033 \pm 0.0056	0.0121 \pm 0.0201	0.0223 \pm 0.0178	0.0264 \pm 0.0200	0.0338 \pm 0.0269

Table 6. Means and standard deviations ($\mu \pm \delta$) of the alignment errors of the CPD method with ours for the fu point set at different missing proportion

表 6. 福点集在不同缺失占比下 CPD 方法与 ours 的配准误差的均值和标准差($\mu \pm \delta$)

遮挡占比	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
CPD	0.0131 \pm 0.0145	0.0217 \pm 0.0250	0.0406 \pm 0.0324	0.0564 \pm 0.0473	0.0707 \pm 0.0500
ours	0.0087 \pm 0.0134	0.0199 \pm 0.0216	0.0350 \pm 0.0289	0.0517 \pm 0.0424	0.0579 \pm 0.0400

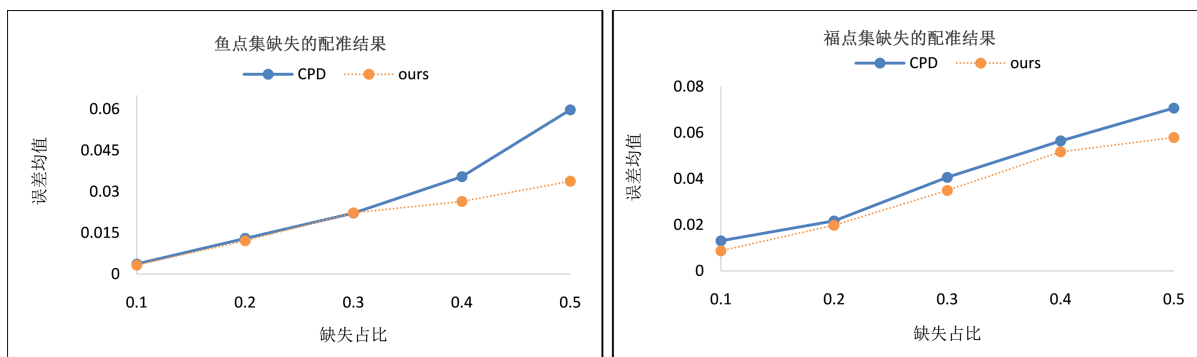


Figure 9. Mean error of the alignment results for the missing fish point set (left) and the missing fuzzy point set (right)
图 9. 鱼点集(左边)与福点集(右边)缺失的配准结果的均值误差

5. 结语

本文受 GMM 模型中的方差设置的启发, 将核函数中的标准差 β 通过类似模拟退火的方法在迭代过程中逐渐缩小, 从而优化了位移函数模型。合成数据实验结果表明, 优化模型后的方法与 CPD 算法对点集变形、噪声和缺失的失真都具有鲁棒性, 并且其配准误差更小; 优化模型后点集配准的变换求解精度更高, 更接近真实变换, 整体效果更优。由于其改进算法鲁棒性相较于 CPD 算法并没有明显的改进, 未来考虑进一步对点集配准算法中的各类失真情况的鲁棒性进行改进。

参考文献

- [1] Yang, C., Liu, Y., Jiang, X., Zhang, Z., Wei, L., Lai, T., *et al.* (2018) Non-Rigid Point Set Registration via Adaptive Weighted Objective Function. *IEEE Access*, **6**, 75947-75960. <https://doi.org/10.1109/access.2018.2883689>
- [2] Yang, Z., Dan, T. and Yang, Y. (2018) Multi-Temporal Remote Sensing Image Registration Using Deep Convolutional Features. *IEEE Access*, **6**, 38544-38555. <https://doi.org/10.1109/access.2018.2853100>
- [3] Leordeanu, M. and Hebert, M. (2005) A Spectral Technique for Correspondence Problems Using Pairwise Constraints. *Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05) Volume 1*, Beijing, 17-21 October 2005, 1482-1489. <https://doi.org/10.1109/iccv.2005.20>
- [4] Jian, B. and Vemuri, B.C. (2011) Robust Point Set Registration Using Gaussian Mixture Models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **33**, 1633-1645. <https://doi.org/10.1109/tpami.2010.223>
- [5] Chui, H. and Rangarajan, A. (2000) A Feature Registration Framework Using Mixture Models. *Proceedings IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis. MMBIA-2000 (Cat. No. PR00737)*, Hilton Head, 12 June 2000, 190-197. <https://doi.org/10.1109/MMBIA.2000.852377>
- [6] Myronenko, A., Song, X. and Carreira-Perpiñán, M.Á. (2007) Non-Rigid Point Set Registration: Coherent Point Drift. In: Schölkopf, B., Platt, J. and Hofmann, T., Eds., *Advances in Neural Information Processing Systems 19*, The MIT Press, 1009-1016. <https://doi.org/10.7551/mitpress/7503.003.0131>
- [7] Gold, S., Rangarajan, A., Lu, C., Pappu, S. and Mjolsness, E. (1998) New Algorithms for 2D and 3D Point Matching. *Pattern Recognition*, **31**, 1019-1031. [https://doi.org/10.1016/s0031-3203\(98\)80010-1](https://doi.org/10.1016/s0031-3203(98)80010-1)
- [8] Chui, H. and Rangarajan, A. (2003) A New Point Matching Algorithm for Non-Rigid Registration. *Computer Vision and Image Understanding*, **89**, 114-141. [https://doi.org/10.1016/s1077-3142\(03\)00009-2](https://doi.org/10.1016/s1077-3142(03)00009-2)
- [9] Cross, A.D.J. and Hancock, E.R. (1998) Graph Matching with a Dual-Step EM Algorithm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **20**, 1236-1253. <https://doi.org/10.1109/34.730557>
- [10] Luo, B. and Hancock, E.R. (2003) A Unified Framework for Alignment and Correspondence. *Computer Vision and Image Understanding*, **92**, 26-55. [https://doi.org/10.1016/s1077-3142\(03\)00097-3](https://doi.org/10.1016/s1077-3142(03)00097-3)
- [11] Myronenko, A. and Song, X. (2010) Point Set Registration: Coherent Point Drift. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **32**, 2262-2275. <https://doi.org/10.1109/tpami.2010.46>
- [12] Horaud, R., Forbes, F., Yguel, M., Dewaele, G. and Zhang, J. (2011) Rigid and Articulated Point Registration with Expectation Conditional Maximization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **33**, 587-602.

<https://doi.org/10.1109/tpami.2010.94>

- [13] Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B. (1977) Maximum Likelihood from Incomplete Data via the *EM* Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, **39**, 1-22.
<https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1977.tb01600.x>