Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(8), 3865-3870
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.138368

基于级数研究一类离散动力系统的收敛性

冯　豪

宜春学院数学与计算机科学学院，江西　宜春

收稿日期：2024年7月15日；录用日期：2024年8月9日；发布日期：2024年8月19日

摘　要

本文讨论了离散动力系统$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^q}{n^p} \\ 0 \le x_1 < 1 \end{cases}$的收敛性。应用级数理论，给出了系统收敛的两个充分条件。当$1 < p = q$时，该动力系统是收敛的；当$0 < p < q$且$q > 1$时，该动力系统是收敛的。为更好解释相关理论，以24年阿里巴巴全球数学竞赛决赛的一道试题进行实例分析。同时，通过数值模拟的方式进一步验证了理论的正确性。

关键词

动力系统，级数，收敛性

Studying the Convergence of a Class of Discrete Dynamical Systems Based on Series

Hao Feng

School of Mathematics and Computer Science, Yichun University, Yichun Jiangxi

Received: Jul. 15th, 2024; accepted: Aug. 9th, 2024; published: Aug. 19th, 2024

Abstract

The article discusses the convergence of the system $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^q}{n^p} \\ 0 \le x_1 < 1 \end{cases}$. By applying series theory,

文章引用: 冯豪. 基于级数研究一类离散动力系统的收敛性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(8): 3865-3870.
DOI: 10.12677/aam.2024.138368

two sufficient conditions for the system convergence are provided: condition $1 < p = q$ ensures convergence, while condition $0 < p < q$ and $q > 1$ guarantees convergence. To better illustrate these theories, a problem from the finals of the 24th Alibaba Global Mathematics Competition is analyzed as a case study. Additionally, the correctness of the theory is further validated through numerical simulations.

Keywords

Dynamical System, Series, Convergence

1. 引言与预备知识

动力系统是对某种确定性规则的描述，而抽象出来的数学模型。根据描述方式的不同，动力系统可分为离散动力系统和连续动力系统。

对于一般的离散动力系统，求出具体解析表达式是非常困难的。因此，离散动力系统的研究主要围绕解的敛散性、解的稳定性等，即系统的动力学性质。目前关于离散动力系统的研究主要基于局部分支理论，如梁志清等应用分支理论研究了捕食与被捕食的系统周期解的稳定性[1]；刘雨晴应用分支理论得出了几类离散动力系统产生各种分支的充分条件[2]。但是分支理论的计算方法比较固定，并且计算量较大。同时，随着计算机技术的发展，可以应用数值计算的方法研究离散动力系统的动力学性质[3] [4]。由研究内容可得，离散动力系统在生物医疗、混沌控制等领域用广泛的应用[1]-[4]，因此对离散动力系统的研究是必要的。虽然分支理论已经较完善，但是计算方法较固定且计算量大。同时，目前对应非驻定离散动力系统的研究较少，如何分析此类系统的动力学性质是一个值得探讨的问题。

本文基于级数的相关的理论，给出了一类一维离散动力系统收敛的充分条件。为离散动力系统的研究提供新的思路。由于非驻定离散动力系统的研究缺乏相关理论，因此本文研究的非离散动力系统具有形式简单的特点。在以后的研究中，将尝试将本文的研究方法推广到高维、形式一般的非驻定离散动力系统。

为更好叙述本文结果，现叙述相关基本事实。

***stolz* 定理[5] [6]**：若 y_n 是严格单调递增的，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$，同时

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$$

则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$。

p 级数的收敛性[7] [8]：当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 是收敛的。

伯努利不等式[9] [10]：当 $\alpha>0$ 时，对于任意 $x>1$ 都有 $(1+x)^{\alpha}-1>\alpha x$。

2. 主要结果与证明

考虑如下动力系统

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^q}{n^p} \\ 0 \le x_1 < 1 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $p,q>0$ 。

定理 2.1. 当 $p=q>1$ 时，动力系统(1)是收敛的。

证明：由于 $0 \le x_1 < 1$，因此易得 $x_n > 0$ 。设当 $n=k$ 时， $x_k \le k$ ，则当 $n=k+1$ 时有

$$x_{k+1} = x_k + \frac{x_k^q}{k^q} \le k + \frac{k^q}{k^q} = k+1$$

因此由数学归纳法可得， $x_n \le n$ 。故有

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^q}{n^q} \le x_n \left(1 + \frac{n^q}{n^q}\right) = x_n \frac{1+n}{n}$$

从而有 $\dfrac{x_{n+1}}{n+1} \le \dfrac{x_n}{n}$ 。即 $\left\{\dfrac{x_n}{n}\right\}$ 单调递减且大于 0，从而 $\left\{\dfrac{x_n}{n}\right\}$ 收敛。

设 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = A$，则由于

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{(n+1)-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^q}{n^q} = A^q$$

由 *stolz* 定理可得，$A = A^q$，从而得 $A=0$ 或 $A=1$。注意到 $\left\{\dfrac{x_n}{n}\right\}$ 是单调递减的，因此有 $\dfrac{x_n}{n} \le \dfrac{x_1}{1} = x_1 < 1$，因此 $A=0$ 。

现证明对于任意的 $k>0$， 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n^k} = 0$ 。当 $k \ge 1$ 时，结论是显然的。当 $0<k<1$ 时，由于

$$\frac{x_{n+1}}{(n+1)^k} = \frac{x_n}{(n+1)^k} + \frac{x_n^q}{n^q (n+1)^k} = \frac{x_n}{n^k}\left(\frac{n^k}{(n+1)^k} + \frac{n^k x_n^{q-1}}{n^q (n+1)^k}\right) \tag{2}$$

同时由伯努利不等式得

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^k - 1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1 \ge \frac{k}{n}$$

且有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{(n+1)^k - n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^q}{n^q\left((n+1)^k - n^k\right)}$$

又 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 0$，故存在 $N_1 > 0$ 使得，当 $n > N_1$ 时有， $x_n \le mn$ ，其中 m 满足 $m^{q-1} < k$ 。

故当 $n > N_1$ 时有

$$\frac{x_n^{q-1}}{n^q} \le \frac{m^{q-1}}{n} < \frac{k}{n}$$

从而有

$$\frac{x_n^{q-1}}{n^q} < \frac{k}{n} \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^k - 1$$

两侧乘以$\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$得

$$(n+1)^k+\frac{n^k x_n^{q-1}}{n^q(n+1)^k}<1$$

将上述结果带入(2)式得，当$n>N_1$时$\frac{x_{n+1}}{(n+1)^k}\le\frac{x_n}{n^k}$，从而$\left\{\frac{x_n}{n^k}\right\}$收敛。

设$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n^k}=B$，又注意到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{(n+1)^k-n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^q}{n^q\left((n+1)^k-n^k\right)}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{n^k}\right)^q\frac{n^{kq}}{n^{q+k}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1}$$

注意到，当$n\to\infty$时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\sim\frac{k}{n}$。从而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{(n+1)^k-n^k}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{n^k}\right)^q\frac{n^{kq}}{n^{q+k}}\frac{n}{k}=0\cdot B^q=0.$$

由 *stolz* 定理可得，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n^k}=0$。

综上可得，当$k>0$时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n^k}=0$。特别的，取$k=\frac{q-1}{2q}$，则存在$n>N$使得当$n>N$时，$x_n<\frac{1}{n^{\frac{q-1}{2q}}}$。从而有

$$x_{N+2}-x_{N+1}=\frac{x_{N+1}^q}{(N+1)^q}<\frac{1}{(N+1)^{\frac{q+1}{2}}}$$

$$x_{N+3}-x_{N+1}=\frac{x_{N+2}^q}{(N+2)^q}<\frac{1}{(N+2)^{\frac{q+1}{2}}}$$

$$\vdots$$

$$x_n-x_{n-1}=\frac{x_{n-1}^q}{(n-1)^q}<\frac{1}{(n-1)^{\frac{q+1}{2}}}$$

由于级数$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{q+1}{2}}}$收敛，由比较判别法得，$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛，即

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=N+1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=\lim_{n\to+\infty}x_n-x_{N+1}=\sum_{i=N+1}^{\infty}(x_{i+1}-x_i)$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，即$\{x_n\}$收敛。即系统(1)是收敛的。

定理 2.2. 当$q<p$且$p>1$时，动力系统(1)是收敛的。

证明：类似上述证明，可得$\{x_n\}$单调递增，且满足$x_n\le n$。

若$x_n<1$恒成立，那么显然$\{x_n\}$收敛，即动力系统(1)收敛。

若存在N_2，使得$x_{N_2}\ge1$。根据$\{x_n\}$单调递增可得，当$n\ge N_2$时，$x_n\ge1$。从而有

$$x_{n+1}=x_n+\frac{x_n^q}{n^p}\le x_n+\frac{x_n^p}{n^p}$$

记 $y_{n+1}=y_n+\frac{y_n^p}{n^p}$，其中 $n=N_2,N_2+1,\cdots$，且 $y_{N_2}=x_{N_2}$，易得 $y_n\ge x_n$。故有

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^q}{n^p}\le\frac{y_n^q}{n^p}=y_{n+1}-y_n$$

根据定理 2.1.可得，级数 $\sum_{n=N_2}^{\infty}\left(y_{n+1}-y_n\right)$ 收敛，又由级数的比较定理可得

$$\sum_{n=N_2}^{\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$$

收敛，因此 $\{x_n\}$ 收敛，即动力系统(1)是收敛的。

3. 实例分析与数值模拟

例 3.1. (24 年阿里巴巴全球数学竞赛决赛)定义序列

$$a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{n^2}\qquad a_1\in[0,1)$$

证明极限 $\lim_{n\to+\infty}a_n$ 存在并且有限。

解：对于动力系统(1)，取 $p=q=2$。根据定理 2.1.可得 $\lim_{n\to+\infty}a_n$ 存在并且有界。

为进一步验证理论的正确性，考虑如下序列

$$x_{n+1}=x_n+\sqrt{\frac{x_n}{n^3}}$$

分别取 $x_1=\frac{1}{3}$，$x_1=\frac{1}{2}$，$x_1=\frac{3}{4}$，进行迭代。迭代结果图 1 所示：

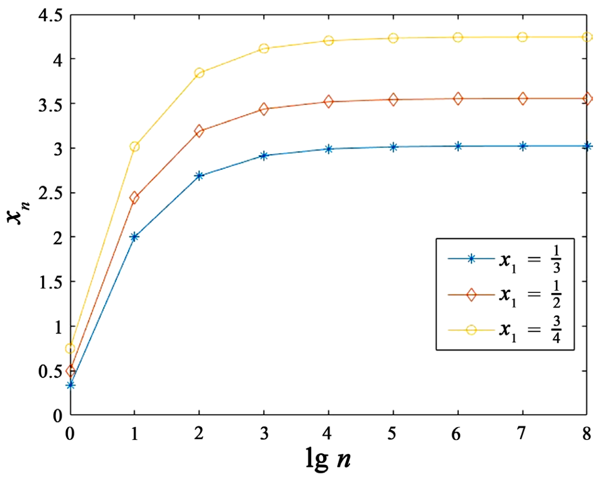

Figure 1. Iterative results graph with different initial values
图 1. 不同初值的迭代结果图

由图可得，三个初值最终都是收敛的。且容易验证上述系统，满足定理 2.2.的条件。这也再次验证了本文论文结果的正确性。

参考文献

[1] 梁志清, 陈兰荪. 离散 Leslie 捕食与被捕食系统周期解的稳定性[J]. 数学物理学报, 2006(4): 634-640.

[2] 刘雨晴. 几个离散动力系统的动力学性质[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 浙江科技学院, 2023.

[3] Sohel Rana, S.M. (2019) Dynamics and Chaos Control in a Discrete-Time Ratio-Dependent Holling-Tanner Model. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **27**, Article No. 48. https://doi.org/10.1186/s42787-019-0055-4

[4] Din, Q. (2017) Complexity and Chaos Control in a Discrete-Time Prey-Predator Model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **49**, 113-134. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.01.025

[5] 华梦霞, 陈庆. 从极限点集角度研究 Stolz 公式[J]. 大学数学, 2019, 35(3): 98-102.

[6] 韩丹. STOLZ 定理的证明及其在极限求解中的应用[J]. 大连教育学院学报, 1999(3): 69-71.

[7] 张希杰. 有关伯努力不等式的几种证明方法及其简单应用[J]. 中学数学, 2007(8): 16-17.

[8] 张全林. 伯努力不等式的一种新证法[J]. 渭南师专学报, 1993(S1): 66-68.

[9] 李苗苗, 王敏, 付芳芳. 发散 p 级数部分和公式的新证明及应用[J]. 高师理科学刊, 2023, 43(4): 11-13.

[10] 黄永忠, 雷冬霞. 与 p 级数的余项有关的级数与极限[J]. 大学数学, 2022, 38(6): 61-67.