Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(8), 3625-3631**
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.138345

利用洛必达法则求解函数极限及其在物理学与经济学中的应用分析

于宾若

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年7月1日；录用日期：2024年7月26日；发布日期：2024年8月1日

摘 要

函数在数学和科技发展中具有重要作用，求解函数极限的方法在函数研究中占据重要地位。极限是高等数学的基础，极限问题是研究的核心和难点。现有文献中极限求解方法的研究多集中于理论阐述，缺乏实际应用案例的分析。本文在系统介绍极限求解方法的基础上，结合经济学、物理学等实际应用案例，旨在弥补这一不足。本文探讨了利用洛必达法则求解函数极限的方法，并分析了其在物理学与经济学中的实际应用。首先，概述了洛必达法则的理论基础及其在处理不定式极限问题中的优势。然后，通过具体实例，详细讲解了如何应用洛必达法则解决物理学中的速度和加速度计算问题，以及经济学中的边际成本和边际收益计算问题。通过这些实例，展示了洛必达法则在不同领域的广泛应用和重要性。本文旨在为读者提供一个全面而实用的参考，使其在实际问题中能够有效应用洛必达法则进行函数极限的求解。

关键词

洛必达法则，极限理论应用，计算方法

Applying L'Hospital's Rule to Evaluate the Limit of a Function and Its Practical Applications in Physics and Economics

Binruo Yu

College of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jul. 1st, 2024; accepted: Jul. 26th, 2024; published: Aug. 1st, 2024

Abstract

The function plays a crucial role in the development of mathematics, science, and technology. The

文章引用: 于宾若. 利用洛必达法则求解函数极限及其在物理学与经济学中的应用分析[J]. 应用数学进展, 2024, 13(8): 3625-3631. DOI: 10.12677/aam.2024.138345

method of solving the limit of a function is essential for studying functions. Limit serves as the foundation of higher mathematics, and addressing limit problems represents the core challenge in research. Existing literature primarily focuses on theoretical elaboration when it comes to methods for solving limits, lacking analysis of practical application cases. This paper aims to address this gap by systematically introducing limit solution methods and combining them with practical application cases from economics and physics. The paper discusses the use of L'Hospital's rule in solving function limits and analyzes its practical applications in physics and economics. It first summarizes the theoretical basis of L'Hospital's rule and its advantages in dealing with infinite limit problems. Subsequently, it explains how to apply L'Hospital's rule to calculate velocity and acceleration in physics, as well as marginal cost and benefit in economics. These examples demonstrate the wide-ranging applications and significance of L'Hospital's rule across different fields. The purpose is to provide readers with a comprehensive reference that enables effective application of L'Hospital's rule to solve functional limits within practical problems.

Keywords

L'Hospital's Rule, Application of Limit Theory, Calculation Method

1. 引言

函数极限问题是高等数学的重要组成部分，也是数学实践的重要内容。极限思想起源于古希腊的穷竭法，并在我国数学家刘徽的割圆术中得到应用。牛顿和莱布尼茨创立的微积分，其理论基础正是极限论。极限在数学分析中具有关键作用。

洛必达法则不仅在纯数学领域具有重要意义，在物理学和经济学中也有着广泛的应用。在物理学中，计算物体的瞬时速度和加速度等问题往往涉及到极限的概念，而洛必达法则可以简化这些计算过程，使得结果更加直观和易于理解。在经济学中，边际成本和边际收益的计算同样需要处理极限问题，洛必达法则在此类问题中同样展现了其强大的应用价值。

本文旨在系统探讨洛必达法则在函数极限求解中的应用，并深入分析其在物理学和经济学领域的具体实例。首先，本文将概述洛必达法则的理论基础，介绍其在处理不定式极限问题中的优势。随后，通过具体实例，详细讲解如何应用洛必达法则解决物理学中的速度和加速度计算问题，以及经济学中的边际成本和边际收益计算问题。通过这些实例，展示洛必达法则在不同领域的广泛应用和重要性，旨在为读者提供一个全面而实用的参考，使其在实际问题中能够有效应用洛必达法则进行函数极限的求解。

2. 洛必达法则的理论基础

2.1. 不定式极限定义

我们把两个无穷大量或者两个无穷小量之比的极限统称为不定式极限，即我们分别将其记作 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式或 $\frac{0}{0}$ 型不定式。

例如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sinx}}{x}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型不定式；$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$ 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式[1]。

2.2. 洛必达法则概念

在一定的条件下，以导数为工具研究不定式极限，对不定式极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的分子 $f(x)$ 与分母 $g(x)$ 分别求导，再求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，若此时极限仍为不 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 定式极限，则继续对这个极限的分子分母进行求导，直到求出极限值，这个方法通常称为洛必达法则。

注意：使用洛必达法则之前，可以先使用一些技巧(如变量替换、等价无穷小等)将原函数化简[2]。

2.3. 洛必达法则计算方法

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足以下条件：

(1) 在点 a 的某个去心邻域 $U^{\circ}(a)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (或 ∞)。

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A \quad (\text{或 } \infty)。$$

2.4. 应用洛必达法则的注意事项

(1) 该法则的条件是结论的充分条件而不是必要条件；

(2) 使用该法则之前，要判断分子分母的极限是否全部等于 0 或 ∞；

(3) 使用该法则时，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，并不能说明 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在；

(4) 并不是任何比式极限都能用洛必达法则求解，首先必须注意它是不是不定式极限，其次是否满足洛必达法则的其他条件，例如极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$，虽然是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，但若使用洛必达法则，对分子分母求导可得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$，就会得到该比式极限不存在的结论。

(5) 使用洛必达法则解析问题时，必须利用数学方法对题目进行有目的的转化，用熟悉的计算形式表现出来。

3. 洛必达法则在经济学中的应用

3.1. 边际成本和边际收益的基本概念

在经济学中，边际成本(Marginal Cost, MC)和边际收益(Marginal Revenue, MR)是两个重要的概念。边际成本是指生产一个额外单位的产品所增加的成本，即：$MC=\dfrac{\Delta C}{\Delta Q}$。

其中，ΔC 是总成本的变化量，ΔQ 是产量的变化量。当产量变化趋于无穷小时，边际成本可以通过极限计算得到：$MC=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{C(Q+\Delta Q)-C(Q)}{\Delta Q}$。

同样地，边际收益是指销售一个额外单位的产品所增加的收益，即：$MR=\dfrac{\Delta R}{\Delta Q}$。

其中，ΔR 是总收益的变化量。当产量变化趋于无穷小时，边际收益可以通过极限计算得到：$MR=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{R(Q+\Delta Q)-R(Q)}{\Delta Q}$。

3.2. 应用实例

3.2.1. 计算生产成本函数的边际成本

假设某企业的生产成本函数为：$C(Q)=Q^3-4Q^2+6Q+10$，我们需要计算在任意产量 Q 时的边际成本，首先，我们使用极限定义边际成本：$MC=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{C(Q+\Delta Q)-C(Q)}{\Delta Q}$，将 $C(Q)$ 代入极限公式：

$$MC=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{(Q+\Delta Q)^3-4(Q+\Delta Q)^2+6(Q+\Delta Q)+10-(Q^3-4Q^2+6Q+10)}{\Delta Q},$$

展开并简化表达式：

$$\begin{aligned}MC&=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{Q^3+3Q^2\Delta Q+3Q(\Delta Q)^2+(\Delta Q)^3-4\left(Q^2+2Q\Delta Q+(\Delta Q)^2\right)+6Q+6\Delta Q+10-Q^3+4Q^2-6Q-10}{\Delta Q}\\&=\lim_{\Delta Q\to 0}\left(3Q^2-8Q+6+3Q\Delta Q+(\Delta Q)^2-4\Delta Q\right)\end{aligned}$$

由于 ΔQ 趋于 0，边际成本为：

$$MC=3Q^2-8Q+6\text{。}$$

3.2.2. 计算收益函数的边际收益

假设某企业的收益函数为：$R(Q)=10Q-Q^2$。

我们需要计算在任意产量 Q 时的边际收益。

使用极限定义边际收益：$MR=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{R(Q+\Delta Q)-R(Q)}{\Delta Q}$。

将 $R(Q)$代入极限公式：$MR=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{10(Q+\Delta Q)-(Q+\Delta Q)^2-(10Q-Q^2)}{\Delta Q}$。

展开并简化表达式：
$$\begin{aligned}MR&=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{10Q+10\Delta Q-Q^2-2Q\Delta Q-(\Delta Q)^2-10Q+Q^2}{\Delta Q}\\&=\lim_{\Delta Q\to 0}(10-2Q-\Delta Q)\end{aligned}\text{。}$$

由于 $\Delta Q\to 0$，边际收益为：$MR=10-2Q$。

3.2.3. 分析与讨论

洛必达法则在经济学中的应用具有重要价值，特别是在处理边际成本和边际收益等涉及极限的问题时。通过洛必达法则，可以简化不定式极限的计算，使得复杂的经济学问题变得更加易于处理和理解。然而，洛必达法则的应用也存在一定的挑战。在实际应用中，需要确保函数满足使用洛必达法则的条件，即函数在某点的导数存在且连续。此外，处理实际经济问题时，模型的准确性和数据的可靠性也对结果的精确性有重要影响。因此，在应用洛必达法则时，必须结合具体问题进行合理假设和严谨验证，以确保结果的有效性和可靠性。

综上所述，洛必达法则在解决经济学中的边际问题时具有显著优势，但其应用需要谨慎对待，以确保结果的准确性和实用性。通过深入理解和灵活应用洛必达法则，经济学家和研究人员可以更有效地解

决复杂的经济学问题，提供更加科学和合理的决策依据。

4. 洛必达法则在物理学中的应用

4.1. 速度和加速度的基本概念

在物理学中，速度和加速度是描述物体运动状态的基本概念。速度是指物体在单位时间内经过的位移，表示物体运动的快慢和方向。瞬时速度定义为时间趋于零时位移的变化率：$v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$。

其中，$s(t)$ 表示物体在时间 t 的位置。

加速度是指物体速度的变化率，描述物体速度变化的快慢和方向。瞬时加速度定义为时间趋于零时速度的变化率：$a(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$。

其中，$v(t)$ 表示物体在时间 t 的速度。

4.2. 应用实例

4.2.1. 计算物体在某一瞬间的速度

假设物体的位置函数为 $s(t)=t^3-3t^2+2t$，我们需要计算物体在任意时刻 t 的瞬时速度。

使用极限定义速度：$v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$。

将位置函数 $s(t)$ 代入极限公式：

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^3-3(t+\Delta t)^2+2(t+\Delta t)-(t^3-3t^2+2t)}{\Delta t}$$

展开并简化表达式：

$$\begin{aligned}v(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{t^3+3t^2\Delta t+3t(\Delta t)^2+(\Delta t)^3-3\left(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2\right)+2t+2\Delta t-t^3+3t^2-2t}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left(3t^2-6t+2+3t\Delta t+(\Delta t)^2-3\Delta t\right)\end{aligned}$$

由于 Δt 趋于 0，瞬时速度为

$$v(t)=3t^2-6t+2\text{。}$$

4.2.2. 计算物体的加速度

假设物体的速度函数为 $v(t)=t^3-2t$，我们需要计算物体在任意时刻 t 的瞬时加速度。

使用极限定义加速度：$a(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$。

将速度函数 $v(t)$ 代入极限公式：

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^2-2(t+\Delta t)-(t^3-2t)}{\Delta t}$$

展开并简化表达式：

$$\begin{aligned}a(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{t^3+3t^2\Delta t+3t(\Delta t)^2+(\Delta t)^3-2t-2\Delta t-t^3+2t}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left(3t^2+3t\Delta t+(\Delta t)^2-2\right)\end{aligned}$$

由于 Δt 趋于 0，瞬时加速度为：

$$a(t)=3t^2-2\ 。$$

4.2.3. 分析与讨论

洛必达法则在物理学中处理速度和加速度问题时具有显著优势。其通过导数计算极限的方法，能够有效简化复杂的极限问题，使得计算过程更加直观和易于理解。这对于解决瞬时速度和加速度等涉及不定式极限的问题尤为有效。

然而，洛必达法则的应用也存在一定的局限性。首先，使用洛必达法则的前提条件是函数在某点的导数存在且连续。如果函数不满足这些条件，洛必达法则将无法应用。其次，在实际物理问题中，模型的精确性和数据的准确性对结果的影响很大，因此需要确保所使用的函数模型准确反映物理现象。

总的来说，洛必达法则在解决物理学中的极限问题时展示了其强大的工具价值，但在应用过程中需要谨慎对待，确保满足使用条件，并结合实际情况进行合理假设和验证。通过深入理解和灵活应用洛必达法则，物理学家和工程师能够更有效地解决复杂的物理问题，提供更加科学和可靠的解决方案。

5. 结论

5.1. 主要发现与结论

本文通过系统探讨洛必达法则在函数极限求解中的应用，展示了其在物理学和经济学领域中的广泛应用和重要性。主要发现如下：

洛必达法则提供了一种有效的方法来解决涉及 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式的极限问题。通过计算导数，它可以将复杂的极限问题转化为相对简单的导数计算[3]。

在物理学中，洛必达法则可以用于计算瞬时速度和加速度，简化了复杂的运动学问题。通过实例分析，我们展示了如何利用洛必达法则计算位置函数和速度函数的导数，从而得到瞬时速度和加速度。

在经济学中，洛必达法则可以用于计算边际成本和边际收益，使得生产和收益分析更加精确。通过具体的生产成本函数和收益函数的实例，我们说明了洛必达法则在边际分析中的应用。

5.2. 洛必达法则在实际问题解决中的重要性

洛必达法则在解决实际问题中具有重要意义。其主要优点包括：

(1) 简化计算过程：洛必达法则通过使用导数计算极限，简化了复杂的极限问题，使得数学推导过程更加直观和易于操作。

(2) 广泛应用：洛必达法则不仅在纯数学领域具有重要地位，在物理学和经济学等应用领域同样展现了其强大的适用性。它能够帮助科学家和工程师解决实际中遇到的复杂问题。

(3) 提高精确性：通过使用洛必达法则，可以提高计算的精确性，特别是在处理涉及不定式极限的问题时。这对于需要高精度计算的领域尤为重要。

综上所述，洛必达法则作为一种强有力的数学工具，不仅在理论研究中具有重要地位，在实际问题解决中也展现了巨大的应用潜力。通过不断探索和创新，洛必达法则的应用前景将更加广阔，为科学和工程领域的研究和实践提供更多支持。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[2] 林见松. 高等数学中求函数极限的若干方法举例探析[J]. 科技创新报, 2017, 14(15): 222-223.

[3] 王丽丽. 洛必达法则在解析求极限类问题中的应用[J]. 河南工程学院学报(自然科学版), 2022, 34(1): 76-80.