

基于非洲秃鹫优化算法的ESG投资组合优化研究

杨梦凡, 黄羿*

吉首大学数学与统计学院, 湖南 吉首

收稿日期: 2024年7月1日; 录用日期: 2024年7月26日; 发布日期: 2024年8月2日

摘要

在可持续性发展的背景下, 本文将ESG理念纳入传统均值-方差模型中, 由此建立了考虑分散化目标的投资组合优化模型。为减少模型的解陷入局部最优, 本文通过AVOA算法求解目标函数所确定的最优策略在中国股票市场上的样本外绩效表现稳健。

关键词

ESG, AVOA, 分散化, 投资组合优化

ESG Investment Portfolio Optimization Research Based on the African Vulture Optimization Algorithm

Mengfan Yang, Yi Huang*

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Jul. 1st, 2024; accepted: Jul. 26th, 2024; published: Aug. 2nd, 2024

Abstract

In the context of sustainable development, this paper incorporates the ESG concept into the traditional mean-variance model, thereby establishing a portfolio optimization model that takes into account diversification objectives. In order to reduce the model's solution from falling into the lo-

*通讯作者。

cal optimum, this paper solves the objective function through the AVOA algorithm. The optimal strategy determined by the sample performance in the Chinese stock market is robust.

Keywords

ESG, AVOA, Diversification, Portfolio Optimization

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

投资组合研究的核心问题是如何平衡投资的收益与风险, 为投资者确定最优的资产配置。1952年, 诺贝尔经济学奖获得者 Markowitz 首次提出了资产组合选择理论, 并给出了经典的均值 - 方差(MV)模型 [1], 从而开辟了分散化风险的资产配置优化框架。然而, 均值和方差的估计误差常常导致投资组合过度集中, 违背了分散化风险的投资理念。

随着经济可持续发展理念的不断发展 [2], 越来越多的研究证明在资产组合选择中纳入非财务因素(如 ESG)可以带来超额回报 [3] [4]。一些学者还发现了社会责任投资基金比传统基金表现优异的证据 [5]-[7]。Pedersen 等提出了 ESG 有效边界, 并进一步研究了 ESG 投资组合选择及资产定价问题 [8]。Pástor 等研究证实, ESG 偏好可以影响资产价格, 绿色股票有较高的价格, 可持续投资促使企业更注重环保, 逐步将实际投资转向绿色企业 [9]。徐凤敏等讨论了 ESG 水平对投资组合选择的影响: 随着 ESG 偏好的增大, 高 ESG 的资产配置也将增大 [10]。Avramov 等基于 ESG 的不确定性, 研究得出 ESG 评级的不确定性可能会降低投资者对股票的需求 [11]。

在现实金融市场中投资决策往往受诸多现实因素制约。随着投资理论的不完善, 投资组合理论模型日益复杂化, 学者们开始使用人工智能算法解决复杂的投资组合优化问题。早期, 张鹏等利用旋转算法、离散迭代法求解复杂的投资组合优化模型 [12] [13]。由于元启发式算法能在一定程度上实现全局搜索, 从而找到优化问题最优解的近似解。随着这类算法的深入发展, 学者们尝试利用元启发式算法解决复杂的投资组合优化问题。刘勇军等利用遗传算法来解决考虑基数约束、投资比例范围及资产的流动性等约束的投资组合优化问题 [14]。见静和高岳林 [15]、邓雪和林影娴 [16] 利用改进的粒子群算法分别求解 VaR 和多个约束的投资组合优化模型。王贞等在帝企鹅算法中加入变异机制, 较好地解决了具有交易成本和熵约束的投资组合优化模型 [17]。

综上, ESG 因素已在投资组合优化中逐步发展, 分散化风险仍然是投资组合选择的重要目标。基于此, 本文考虑将分散化风险目标纳入 ESG 投资组合优化中, 并利用 AVOA 算法求解复杂的投资组合优化问题, 从而为投资者提供含有可持续发展理念的资产配置策略。

2. 模型构建

本文考虑收益、风险和 ESG 等因素的静态单阶段投资组合优化问题。假设金融市场上有 n 个风险资产可供选择。风险资产的随机收益率向量为 $r_p = (r_1, r_2, \dots, r_n)' \in \mathfrak{R}^n$, ESG 得分向量为 $s_p = (s_1, s_2, \dots, s_n)' \in \mathfrak{R}^n$, 投资组合中风险资产的投资比例为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathfrak{R}^n$ 。

假设投资者希望选择具有高收益、高 ESG、低风险且分散化的投资组合, 本文基于文献 [8] 和 [18] 的

研究工作, 建立考虑分散化风险的 ESG 投资组合优化模型(下文称 MV-ESG 模型):

$$\begin{aligned} \max_x \quad & x'(\mu + s) - \frac{\delta}{2} x' \Sigma x + A \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mu = (E(r_1) - r_f, \dots, E(r_n) - r_f)'$ 表示风险资产超额收益的均值向量, r_f 为无风险利率; δ 表示投资者的风险厌恶系数; $\Sigma_{n \times n}$ 表示风险资产超额收益率的协方差矩阵; $s = (E(s_1), \dots, E(s_n))'$ 表示风险资产 ESG 得分的均值向量。 $A = \lambda \cdot \max \left\{ e + \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i, 0 \right\}$ 表示基于可能性熵的分散化风险目标的罚函数, λ 为惩罚因子, e 为投资组合要求的最低分散化程度。

3. 非洲秃鹫优化算法

由于非线性问题求解较为复杂, 通常的算法很难较好地接近全局最优解。Abdollahzadeh [19]等人提出的非洲秃鹫优化算法(AVOA)旨在通过模拟非洲秃鹫的觅食和航行行为来解决全局优化问题。该算法采用领导者-追随者的模式, 利用最优秃鹫和次优秃鹫对整个群体进行引导, 通过信息交互、迭代更新搜索位置, 以找到最优解, 具有寻优能力强, 收敛速度快等特点。AVOA 算法因结合了勘探和开发机制, 使其具有较好的优化性能, 被广泛用于解决多个领域的各种优化问题。因此, 本文将采用 AVOA 算法求解 MV-ESG 模型。

AVOA 算法可分为四个阶段, 具体流程如下:

Step 1: 确定组内最优秃鹫。初始化种群后, 计算种群适应度值, 将适应度最优和次之的分别作为第一组和第二组最优秃鹫, 其他解则根据式(2)向两组的最优解移动。在每次适应度的迭代中, 会重新计算整个总体。

$$R(i) = \begin{cases} BestV_1 & P_i = L_1 \\ BestV_2 & P_i = L_2 \end{cases} \quad (2)$$

式(2)为计算其他秃鹫向最优秃鹫的位置移动的概率, L_1 和 L_2 是搜索操作前测量的随机参数, 且两个参数之和为 1。再通过轮盘赌机制 $P_i = F_i / \sum_{i=1}^n F_i$ 选取最优策略。

Step 2: 计算秃鹫的饥饿率。秃鹫的行为受到饥饿水平和能量储备的驱使, 成为优化算法中勘探和开发阶段转换的关键。饱食时, 秃鹫有足够的能量飞行更远寻找食物。饥饿时, 能量减少, 限制它们的飞行能力。在饥饿时, 秃鹫更积极地寻找食物, 常常与更强壮的秃鹫一起觅食。饥饿度公式为:

$$F = (2 \times rand_1 + 1) \times z \times \left(1 - \frac{d_i}{D}\right) + h \times \left(\sin^w \left(\frac{\pi}{2} \times \frac{d_i}{D} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} \times \frac{d_i}{D} \right) - 1 \right)$$

其中, F 为秃鹫的饥饿度, d_i 表示当前迭代次数, D 表示最大迭代次数, $h, z, rand_1$ 均为随机数, w 是用来调节勘探阶段和开发阶段的固定值。当 $|F| \geq 1$ 时, 进入勘探阶段。反之, 则进入开发阶段。

Step 3: 勘探阶段。在此阶段, 秃鹫在随机距离内向周围的区域觅食。

$$P(i+1) = \begin{cases} R(i) - |X \times R(i) - P(i)| \times F & P_1 \geq rand_{p_1} \\ R(i) - F + rand_2 \times ((ub - lb) \times rand_3 + lb) & P_1 < rand_{p_1} \end{cases}$$

其中, $P(i+1)$ 为下一次迭代中秃鹫的位置向量, P_1 为选择策略的参数, X 被用作增加随机运行的系数向量, $rand, rand_2, rand_3, rand_{p_1}$ 均为随机数, lb, ub 分别为寻优的上下界。

Step 4: 开发阶段。该阶段分为两个阶段, 每个阶段有两种不同的策略, P_2 和 P_3 分别为第一阶段和第二阶段选择策略的随机参数。当 $|F|$ 值介于 0.5 和 1 之间时, 进入开发的第一阶段。

$$P(i+1) = \begin{cases} X \times R(i) - P(i) \times (F + rand_4) - (R(i) - P(i)) & P_2 \geq rand_{P_2} \\ R(i) - R(i) \times H & P_2 < rand_{P_2} \end{cases}$$

其中, $H = P(i) \times [rand_5 \times \cos(P(i)) + rand_6 \times \sin(P(i))]/2\pi$ 。

当 $|F|$ 值小于 0.5 时, 进入开发的第二阶段。

$$P(i+1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \times \sum_{j=1}^2 BestV_j(i) - \frac{F}{2} \times \sum_{j=1}^2 \frac{BestV_j(i) \times P(i)}{BestV_j(i) - P(i)^2} & P_3 \geq rand_{P_3} \\ R(i) - |R(i) - P(i)| \times F \times Levy(d(t)) & P_3 < rand_{P_3} \end{cases}$$

本文的 $Levy(x)$ 是采用文献[20]中的定义,

$$Levy(x) = \frac{u \times \sigma}{|v|^{\frac{1}{\beta}}}, \sigma = \left(\frac{\Gamma(1+\beta) \times \sin(\pi\beta/2)}{\Gamma((1+\beta)/2) \times \beta \times 2^{\frac{\beta-1}{2}}} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

其中, $rand_4, rand_5, rand_6, rand_{P_2}, rand_{P_3}, u, v$ 均为随机数。所有随机数的取值范围见表 1。

Table 1. The selection range of each random parameter
表 1. 各随机参数的选取范围

随机参数	范围
L_1, L_2	[0, 1]
z	[-1, 1]
h	[-2, 2]
X	[0, 2]
P_1, P_2, P_3	[0, 1]
u, v	$N(0, 1)$
$rand_i, i=1,2,3,4,5,6, P_1, P_2, P_3$	[0, 1]

4. 实证研究

本文以中国股票市场为研究对象, 从不同投资者的态度考察 MV-ESG 模型在样本外检验的绩效表现。

4.1. 样本选取及数据处理

沪深 300 指数由沪深市场中规模大、流动性好的最具代表性的 300 只证券组成, 是一个能够较好地

代表 A 股市场总体走势的核心基准指数, 具有较强的市场代表性。沪深 300 波动率加权指数(简称 300 波动)可作为衡量中国股票市场的波动率指数。沪深 300 指数的成分股和 300 波动指数的数据均来自 WIND 数据库。目前, 国内主流的 ESG 评级机构主要有 Wind、商道融绿、华证等。华证 ESG 评级体系参考了国际主流方法和实践经验, 借鉴国际 ESG 核心要义, 结合中国国情与资本市场等特点, 故本文选取华证 ESG 得分数据作为模型的输入参数, 数据来源为马克数据网。

本文选取实证研究的时间窗口为 2012 年 6 月 1 日至 2022 年 12 月 30 日, 并将所有数据的频率转化为日度。考虑到 ESG 得分的数据频率为季度, 且部分沪深 300 成分股的 ESG 得分存在缺失, 故对数据进行如下处理: 第一步, 从沪深 300 成分股中筛选出 ESG 得分无缺失值的股票, 共筛选出股票 143 只。第二步, 计算各股票的 ESG 得分总和, 将其平均划分为高、中、低三个等级, 在每个等级中随机选出 10 只股票, 选取结果如表 2 所示。第三步, 采用三次样条插值的方法对已选股票的 ESG 得分数据进行频率转化处理, 将季度数据转化成日度数据, 再进行归一化处理。

Table 2. Sample stock selection results

表 2. 样本股选取结果

股票代码股票简称	股票代码股票简称	股票代码股票简称
000002 万科 A	000725 京东方 A	601628 中国人寿
601166 兴业银行	000625 长安汽车	600809 山西汾酒
000001 平安银行	601398 工商银行	600438 通威股份
002230 科大讯飞	600019 宝钢股份	600018 上港集团
600900 长江电力	600309 万华化学	600150 中国船舶
002142 宁波银行	601899 紫金矿业	601006 大秦铁路
601088 中国神华	601857 中国石油	000596 古井贡酒
600048 保利发展	600436 片仔癀	002027 分众传媒
600036 招商银行	600276 恒瑞医药	002050 三花智控
601998 中信银行	600031 三一重工	600760 中航沈飞

4.2. 参数设置与估计

本文将 AVOA 算法中相关参数设置如下: 种群数为 40, 最大迭代次数为 500, w 为 2.5, e 为 1.85, P_1, P_2, P_3 分别为 0.6, 0.4, 0.6。根据现实中的市场变化, 以资产的日超额收益率和 ESG 得分数据组成滚动时间窗方法求解模型。回看过去 60 天的历史数据, 并依照 5 天为周期调整投资策略, 滚动估计模型所用参数 μ , s 和 Σ 。日超额收益率不考虑分红与付息, 根据简单收益率公式计算得出。

根据文献[22]的方法编制风险厌恶系数 δ , 等于中性风险厌恶系数与 300 波动的调整系数的乘积, 其中中性风险厌恶系数 $\delta_0 = 2.5$, 调整系数 θ 为交易当天的 300 波动 V_{t_0} 与过去 Δt (60)天的平均 300 波动率的比值。即

$$\delta = \frac{V_{t_0}}{\frac{1}{\Delta t} \sum_{t=t_0-\Delta t+1}^{t_0} V_t} \delta_0$$

参考 DeMiguel 等[21]中的相关公式计算风险资产组合的净超额收益率为:

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 \cdot \left(1 - c \sum_{i=1}^n |x_{i,1}| \right) \\ w_{t^+} &= w_t \left(1 + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_{i,t} x_{i,t} \right), \quad t = 1, \dots, T \\ w_{t+1} &= w_{t^+} \left(1 - c \sum_{i=1}^n |x_{i,t+1} - x_{i,t^+}| \right), \quad t = 1, \dots, T-1 \\ r_{t+1}^N &= \frac{w_{t+1}}{w_{t^+}} - 1 - r_{f,t+1}, \quad t = 0, \dots, T-1 \end{aligned}$$

其中, $w_{0^+} = 1$; x_{i,t^+} 是第 t 期末风险资产 i 占资产组合价值的比例; $x_{i,t}$ 是第 t 期初风险资产 i 占资产组合价值的比例; w_{t^+} 是第 t 期末的资产组合价值, 它等于投资者在第 $t+1$ 期调整前持有的资产组合价值; w_t 是投资者第 t 期初调整后的资产组合价值, 由投资者期初持有的资产组合价值扣减一定比例的交易费用 c 后得到; $\tilde{r}_{i,t}$ 是第 t 期风险资产 i 的收益率, $r_{f,t}$ 是第 t 期无风险资产的收益率, r_t^N 是第 t 期投资组合的净超额收益率。

4.3. 样本外检验

本文利用 AVOA 算法求解最优化问题(1)得到 MV-ESG 策略, 对比最小方差策略、均值 - 方差策略等基准策略, 由此分析 MV-ESG 策略在中国股票市场上的样本外表现。样本外绩效评价指标为夏普比率 SR、换手率 TRN 和最大回撤率 MaxDD。

考虑三类投资者参与投资, 分别为激进型投资者, 温和型投资者和保守型投资者, 采用文献[22]的方法计算投资者的风险厌恶系数。假设每类投资者均持有财富 1 参与交易市场, 交易的起点为 2019 年 1 月 2 日, 投资持续进行 T 期, 每期交易前需扣除 0.1% 的交易费用。由于 AVOA 算法在执行中需要随机选点, 为保证实证结果的客观性, 本文采用 30 次独立实验的平均结果来评价所有策略的样本外绩效。表 3 从投资者风险厌恶态度的视角展示了不同投资策略的样本外绩效评价结果。

从样本外绩效评价指标看, 相对于其他基准策略, MV-ESG 策略能得到较高的 SR。以激进型投资者为例, SR (表 3 中黑体加粗) 远高于其他策略, 能够有效的获得较高的回报。TRN 和 MaxDD 这两个指标均比不过最小方差策略, 但 TRN 近似 MV 策略, MaxDD 优于 MV 策略, 体现了目标分散化投资的意义。

Table 3. Out-of-sample performance evaluation results

表 3. 样本外绩效评价结果

策略	SR	TRN	MaxDD
A: 激进型投资者			
最小方差策略	0.0428	0.5246	0.2094
MV 策略	0.0034	1.0991	0.7304
MV-ESG 策略	0.2415	1.1663	0.5792

续表

B: 温和型投资者			
最小方差策略	0.0428	0.5246	0.2094
MV 策略	0.0616	1.0203	0.6586
MV-ESG 策略	0.2068	1.1154	0.5869
C: 保守型投资者			
最小方差策略	0.0428	0.5246	0.2094
MV 策略	0.1998	0.9440	0.5340
MV-ESG 策略	0.2049	1.0199	0.5195

从不同投资者风险厌恶态度看, MV-ESG 策略均具有较高的 SR。同一类投资策略在不同风险厌恶程度下的绩效表现亦不相同。MV 策略保守型投资者的绩效表现为佳, 而 MV-ESG 策略则其激进型投资者表现更胜一筹。风险态度的影响在不同样本检验分析的结论未必相同, 但这种比较方式也为投资者后续对于风险项目的选择提供了一定的参考。

表 4 展示了某次随机实验的结果, 包含不同投资策略的平均累计财富值、最大财富值、最小财富值。图 1~3 直观展示了激进型、温和型和保守型投资者在不同策略下的财富演化趋势。以平均累计财富值为例进行分析, 三类风险厌恶态度的投资者均能通过 MV-ESG 策略获得较好的投资绩效。这说明本文构建的 MV-ESG 模型能为投资者提供稳健的资产配置策略。

Table 4. Investment returns related indicators

表 4. 投资收益相关指标

策略	W_{mean}	W_{max}	W_{min}
A: 激进型投资者			
最小方差策略	1.0418	1.1711	0.9110
MV 策略	0.9111	1.6230	0.4974
MV-ESG 策略	1.6695	2.8369	1.0000
B: 温和型投资者			
最小方差策略	1.0418	1.1711	0.9110
MV 策略	0.9415	1.5348	0.5747
MV-ESG 策略	1.9403	3.0213	1.0000
C: 保守型投资者			
最小方差策略	1.0418	1.1711	0.9110

续表

MV 策略	1.2859	2.1638	0.8643
MV-ESG 策略	1.4653	2.5427	0.8084

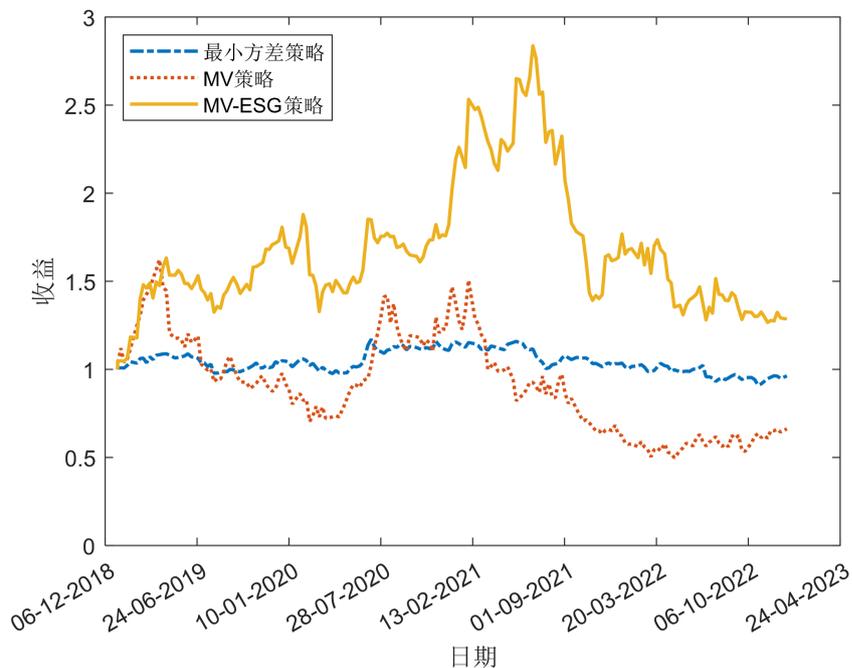


Figure 1. Cumulative return of aggressive investors

图 1. 激进型投资者累计收益

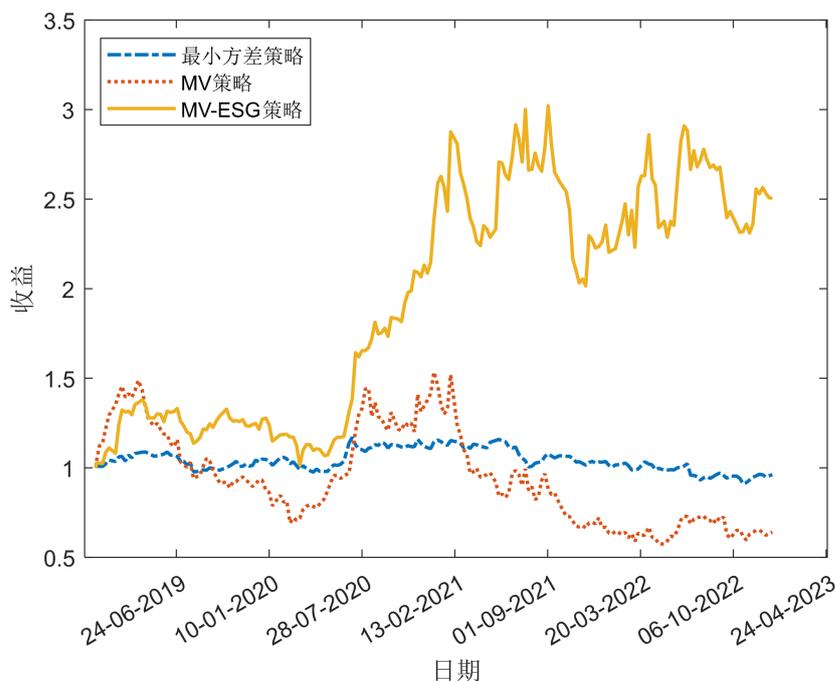


Figure 2. Cumulative return of moderate investors

图 2. 温和型投资者累计收益

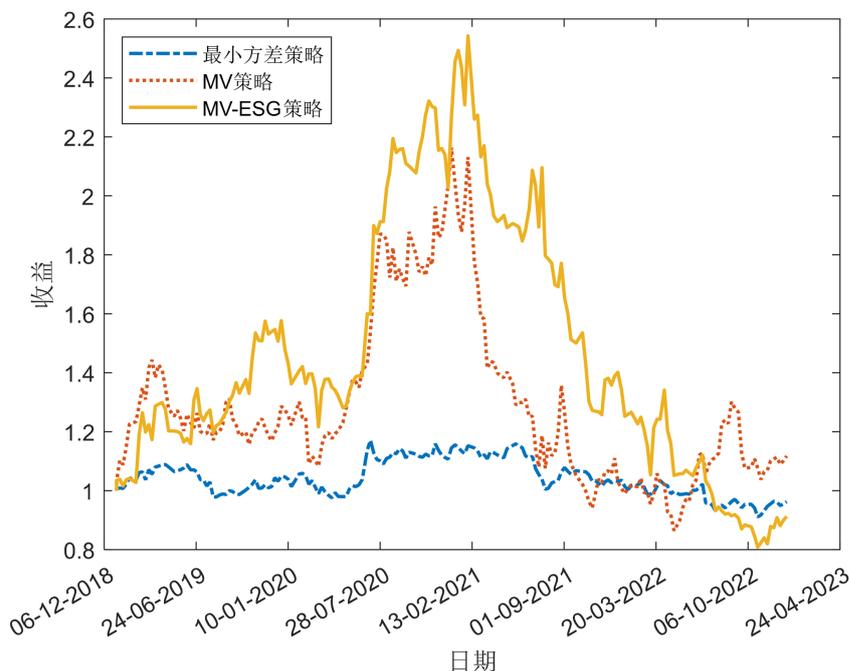


Figure 3. Cumulative return of conservative investors
图 3. 保守型投资者累计收益

5. 结论

本文在可持续发展的背景下, 利用 AVOA 算法求解了均衡收益 - 风险及分散化目标的 ESG 投资组合优化模型。基于模型的最优策略在中国股票市场的样本外绩效表现稳健, 相对于基准策略能获得较高的 SR, 可作为投资者选择 ESG 投资组合的决策建议。在后续的研究中, 本文将进一步改进投资策略, 关注风险控制以降低组合风险。

基金项目

湖南省教育厅青年项目(22B0522); 2024 年度湖南省普通本科高校教学改革研究重点项目(202401000940); 国家级大学生创新创业训练计划项目(202210531004)。

参考文献

- [1] Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**, 77-91. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>
- [2] 牛文元. 可持续发展理论的内涵认知-纪念联合国里约环发大会 20 周年[J]. *中国人口.资源与环境*, 2012, 22(5): 9-14.
- [3] Friede, G., Busch, T. and Bassen, A. (2015) ESG and Financial Performance: Aggregated Evidence from More than 2000 Empirical Studies. *Journal of Sustainable Finance & Investment*, **5**, 210-233. <https://doi.org/10.1080/20430795.2015.1118917>
- [4] van Duuren, E., Plantinga, A. and Scholtens, B. (2015) ESG Integration and the Investment Management Process: Fundamental Investing Reinvented. *Journal of Business Ethics*, **138**, 525-533. <https://doi.org/10.1007/s10551-015-2610-8>
- [5] Bollen, N.P.B. (2007) Mutual Fund Attributes and Investor Behavior. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **42**, 683-708. <https://doi.org/10.1017/s0022109000004142>
- [6] Dunbar, K., Treku, D., Sarnie, R. and Hoover, J. (2023) What Does ESG Risk Premia Tell Us about Mutual Fund Sustainability Levels: A Difference-In-Differences Analysis. *Finance Research Letters*, **57**, 104262.

- <https://doi.org/10.1016/j.frl.2023.104262>
- [7] Nofsinger, J. and Varma, A. (2014) Socially Responsible Funds and Market Crises. *Journal of Banking & Finance*, **48**, 180-193. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2013.12.016>
- [8] Pedersen, L.H., Fitzgibbons, S. and Pomorski, L. (2021) Responsible Investing: The ESG-Efficient Frontier. *Journal of Financial Economics*, **142**, 572-597. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2020.11.001>
- [9] Pástor, L., Stambaugh, R.F. and Taylor, L.A. (2021) Sustainable Investing in Equilibrium. *Journal of Financial Economics*, **142**, 550-571. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2020.12.011>
- [10] 徐凤敏, 景奎, 李雪鹏. “双碳”目标背景下基于 ESG 整合的投资组合研究[J]. 金融研究, 2023(8): 149-169.
- [11] Avramov, D., Cheng, S., Lioui, A. and Tarelli, A. (2022) Sustainable Investing with ESG Rating Uncertainty. *Journal of Financial Economics*, **145**, 642-664. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2021.09.009>
- [12] 张鹏, 张忠楨, 岳超源. 限制性卖空的均值-半绝对偏差投资组合模型及其旋转算法研究[J]. 中国管理科学, 2006, 14(2): 7-11.
- [13] 张鹏, 李璟欣, 崔淑琳, 等. 具有实际约束的多阶段 M-V 投资组合时间一致性策略研究[J]. 运筹与管理, 2024, 33(1): 205-211.
- [14] 刘勇军, 张卫国, 徐维军. 考虑现实约束的模糊多准则投资组合优化模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(10): 2462-2470.
- [15] 见静, 高岳林. 基于 DCA-PSO 算法的均值-VaR 投资组合优化[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(27): 189-193.
- [16] 邓雪, 林影娴. 基于改进粒子群算法的复杂现实约束投资组合研究[J]. 运筹与管理, 2021, 30(4): 142-147.
- [17] 王贞, 崔轲轲, 李旭飞, 等. 模糊投资组合选择问题的改进帝企鹅优化算法[J]. 数学的实践与认识, 2023, 53(11): 164-177.
- [18] Jana, P., Roy, T.K. and Mazumder, S.K. (2009) Multi-Objective Possibilistic Model for Portfolio Selection with Transaction Cost. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **228**, 188-196. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.09.008>
- [19] Abdollahzadeh, B., Gharehchopogh, F.S. and Mirjalili, S. (2021) African Vultures Optimization Algorithm: A New Nature-Inspired Metaheuristic Algorithm for Global Optimization Problems. *Computers & Industrial Engineering*, **158**, 107408. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107408>
- [20] Mantegna, R.N. (1994) Fast, Accurate Algorithm for Numerical Simulation of Lévy Stable Stochastic Processes. *Physical Review E*, **49**, 4677-4683. <https://doi.org/10.1103/physreve.49.4677>
- [21] DeMiguel, V., Garlappi, L. and Uppal, R. (2007) Optimal versus Naive Diversification: How Inefficient Is the 1/n Portfolio Strategy? *Review of Financial Studies*, **22**, 1915-1953. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhm075>
- [22] 黄羿, 祝炜, 朱书尚, 等. 结合“向后看”和“向前看”信息的投资组合优化[J]. 系统工程理论与实践, 2021, 41(4): 861-881.