Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(9), 4353-4359**
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.139415

一类Schrödinger-Kirchhoff-Poisson方程的正解

黄世鹏

福建师范大学，数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2024年8月18日；录用日期：2024年9月12日；发布日期：2024年9月23日

摘 要

运用变分方法讨论一类Schrödinger-Kirchhoff-Poisson方程正解的存在性。在适当假设下，通过运用一些技巧证明了能量泛函满足Palais-Smale条件。最后运用山路引理，Ekeland变分原理和强极大值原理得到了主要结论。

关键词

Schrödinger-Kirchhoff-Poisson方程，正解，山路引理，变分法

Positive Solutions for a Class of Schrödinger-Kirchhoff-Poisson Equation

Shipeng Huang

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Aug. 18th, 2024; accepted: Sep. 12th, 2024; published: Sep. 23rd, 2024

Abstract

The existence of positive solutions for a class of Schrödinger-Kirchhoff-Poisson equation is discussed by using variational methods. Under appropriate assumption, it is proved that the energy functional satisfies the Palais-Smale condition by using some techniques. Finally, the main conclusions are obtained by using mountain pass lemma, Ekeland variational principle and strong maximum principle.

Keywords

Schrödinger-Kirchhoff-Poisson Equation, Positive Solutions, Mountain Pass Lemma, Variational Method

文章引用: 黄世鹏. 一类 Schrödinger-Kirchhoff-Poisson 方程的正解[J]. 应用数学进展, 2024, 13(9): 4353-4359.
DOI: 10.12677/aam.2024.139415

1. 引言

Schrödinger-Kirchhoff-Poisson 方程是一个综合了量子力学、经典电磁学和电势理论的数学模型，通常用于描述带电粒子的运动及其与电场的相互作用。近年来，Schrödinger-Kirchhoff-Poisson 系统

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u+L(x)\phi(x)u=f(x,u),\ x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=u^2,\ x\in\mathbb{R}^3,\end{cases}\tag{1.1}$$

解的存在性，已被众多学者研究[1]-[6]。在适当的条件下，文献[1]运用山路引理和 Ekeland 变分原理证明了方程(1.1)有多个正解，文献[2]运用变分方法结合一些不等式技巧，在一般非线性条件下得到了方程(1.1)的最小能量解、山路解和基态解的存在性，文献[3]运用 Nehari 流形和山路引理证明了方程(1.1)解的存在性，文献[4]运用喷泉定理证明了方程(1.1)无穷多个解的存在性，文献[5]通过构造 Nehari 流形和运用形变原理证明了方程(1.1)基态解的存在性，文献[6]通过构造山路几何，得到了方程(1.1)正规化解的存在性。

若 $a=1, b=0$，则系统(1.1)就简化为如下 Schrödinger-Poisson 系统

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u+L(x)\phi(x)u=f(x,u),\ x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=u^2,\ x\in\mathbb{R}^3,\end{cases}\tag{1.2}$$

该系统也被众多学者广泛研究[7]-[10]。在适当的条件下，文献[7]运用山路引理和 Ekeland 变分原理证明了方程(1.2)有多个正解，文献[8]证明了方程(1.2)无穷多个解的存在性，文献[9]证明了方程(1.2)基态解的存在性，文献[10]运用变分方法证明了方程(1.2)解的存在性。

本文研究如下 Schrödinger-Kirchhoff-Poisson 方程

$$\begin{cases}-\left(1+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=\lambda\phi(x)u+|u|^{p-1}u+\mu u,\ x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=u^2,\ \lim\limits_{|x|\to\infty}\phi(x)=0,\end{cases}\tag{1.3}$$

正解的存在性。其中，$b>0$，$\lambda,\mu>0$ 以及 $3<p<5$。假设 $V(x)$ 满足条件：

$$V(x)\in C\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^+\right), V(x)\ge 1, \lim_{|x|\to\infty}V(x)=+\infty.$$

定义

$$H=\left\{u\in W^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right):\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

相应的范数为

$$|u|^2=\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x.$$

由假设条件(V1)可知，嵌入 $H\hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^3\right)(2\le q<6)$ 是紧的。在 H 中，$-\Delta+V$ 存在特征值序列 (μ_n)，使得 $0<\mu_1<\mu_2\le\mu_3\le\cdots\le+\infty$ 且 $H=span\{e_i:i\ge 1\}$，其中，e_i 是 μ_i 对应的标准化特征函数，即 $\|e_i\|=1$。

对任意的 $u\in H$，存在唯一的 $\phi_u\in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 是方程 $-\Delta\phi=u^2$ 的弱解，且

$$\phi_u=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u^2(y)}{|x-y|}\mathrm{d}y.$$

那么，方程(1.3)可以表示为

$$-\left(1+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=\lambda\phi_u u+|u|^{p-1}u+\mu u,\ x\in\mathbb{R}^3.$$

本文的主要结果叙述如下。

定理 1.1 假设条件(V1)成立且满足 $b>\dfrac{\lambda}{3\cdot 4^{\frac{5}{3}}\cdot\pi^{\frac{5}{3}}}\dfrac{\left(\int|e_1|^{\frac{12}{5}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{3}}}{\left(\int|\nabla e_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^2}$。

1) 若 $0<\mu\le\mu_1$，则方程(1.3)至少有一个正解；

2) 存在 $\bar{\delta}>0$，使得当 $\mu_1<\mu<\mu_1+\bar{\delta}$ 时，方程(1.3)至少有两个正解。

2. 预备知识

为了完成证明，以下给出一些记号和引理。对于 $1\le s\le+\infty$，$L^s(\mathbb{R}^3)$ 表示勒贝格空间。$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积。$B_\rho(x)$ 表示圆心为 x，半径为 ρ 的球。$D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 表示 $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 照范数 $\|u\|_{D^{1,2}}^2=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x$ 完备化产生的空间。根据需要，用 C,C_i 表示不同的正常数。若没有特殊说明，则所有积分都在 $\mathbb{R}^3$ 上考虑。

在 H 上，定义如下泛函：

$$\begin{aligned}I_\mu(u)=&\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^2\\&-\frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}\,\mathrm{d}x-\frac{\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $\|u\|^2=\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x$，易得泛函是适定的且 $I_\mu\in C^1(H,\mathbb{R})$。因为方程(1.3)的正解恰好是泛函 I_μ 的正临界点，所以只需要研究 I_μ 正临界点的存在性。

引理 1.1 [11]令 E 是一个实的 Banach 空间，泛函 $I\in C^1(E,\mathbb{R})$。设 $I(0)=0$ 且满足

1) 存在正常数 $\alpha_1,\alpha_2>0$，使得 $I|_{\partial B_{\alpha_1}}\ge\alpha_2$；

2) 存在 $\bar{U}\in E\setminus\bar{B}_{\alpha_1}$，使得 $I(\bar{U})<0$。

定义

$$c=\inf_{g\in\Gamma}\max_{t\in g[0,1]}I(u),$$

其中 Γ 是 E 中连接 0 和 $\bar{U}$ 的道路的集合，

$$\Gamma=\left\{g\in C([0,1],E):g(0)=0,g(1)=\bar{U}\right\},$$

那么 $c\ge\alpha_2$。若 I 满足 $(PS)_c$ 条件，则 c 是 I 的一个临界值。

3. 定理的证明

引理 1.2 假设条件(V1)成立，令序列 $(u_n)\subset H$ 满足对所有的 $n\in\mathbb{N}$，有 $|I_\mu(u_n)|\le M<+\infty$ 且当 n 充分大时，有 $I'_\mu(u_n)\to 0$，那么 (u_n) 在 H 中有一个强收敛的子序列。

证明. 由于 $H\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3)(2\le q<6)$ 是紧的，只需研究 (u_n) 在 H 中有界即可。取 $\beta\in\left(\frac{1}{p+1},\frac{1}{4}\right)$，当 n

足够大时，有

$$\begin{aligned}M+\|u_n\| &\geq I_\mu(u_n)-\beta\langle I'_\mu(u_n),u_n\rangle\\ &\geq\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\|u_n\|^2+\left(\frac{1}{4}-\beta\right)b\left(\int|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^2-\left(\frac{1}{4}-\beta\right)\lambda\int\phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x\\ &\quad-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\mu\int u_n^2\mathrm{d}x+\left(\beta-\frac{1}{p+1}\right)\int|u_n|^{p+1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

根据 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式[12]和 Gagliardo-Nirenberg 不等式[2]，可得

$$\int\phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x\leq C\|u_n\|^4.$$

参考文献[7]的方法，当$\|u_n\|$足够小时，有

$$\begin{aligned}M+\|u_n\| &\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\|u_n\|^2+\left(\frac{1}{4}-\beta\right)b\left(\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\quad-\left(\frac{1}{4}-\beta\right)\lambda C\|u_n\|^4-C(\beta,\mu)\\ &\geq C_1\|u_n\|^2-C(\beta,\mu).\end{aligned}$$

因此，(u_n)在H中有界。

注释 1.1 引理 1.2 说明I_μ满足(PS)条件。

引理 1.3 假设条件$(V1)$成立。

1) 若$0<\mu<\mu_1$，则$\mu=0$是I_μ的局部最小值；

2) 存在正常数$\bar{\delta},\rho_1$和α，使得对任意的$\mu\in[\mu_1,\mu_1+\bar{\delta})$，有$I_\mu|_{\partial B_{\rho_1}}\geq\alpha$；

3) 存在$\bar{u}\in H$且$\|\bar{u}\|>\rho_1$，使得对任意的$\mu>0$，有$I_\mu(\bar{u})<0$。

证明. 1)的证明：当$\|u\|$足够小时，有

$$\begin{aligned}I_\mu(u) &=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\left(\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^2-\frac{\lambda}{4}\int\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int|u|^{p+1}\,\mathrm{d}x-\frac{\mu}{2}\int u^2\mathrm{d}x\\ &\geq\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu}{\mu_1}\right)\|u\|^2+\frac{b}{4}\left(\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^2-C\|u\|^4-C_1\|u\|^{p+1}\\ &\geq\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu}{\mu_1}\right)\|u\|^2-C\|u\|^4-C_1\|u\|^{p+1}\\ &\geq C_2\|u\|^2.\end{aligned}$$

因此，$u=0$是I_μ的局部最小值。

2)的证明：对任意的$u\in H$，令$u=te_1+v$，其中，$t\in\mathbb{R}$和$v\in\{span\{e_1\}\}^\perp$。有

$$\|u\|^2=t^2+\|v\|^2,\ \mu_2\int|v|^2\,\mathrm{d}x\leq\|v\|^2,\ \mu_1\int|e_1|^2\,\mathrm{d}x=\|e_1\|^2,$$

且

$$\mu_1\int e_1 v\mathrm{d}x=\int\left(\nabla e_1\nabla v+V(x)e_1 v\right)\mathrm{d}x=0.$$

则有

$$\int\nabla e_1\nabla v\mathrm{d}x=0.$$

由 $u=te_1+v$，可得

$$\begin{aligned}\left(\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^2&=\left(t^2\int|\nabla e_1|^2\,\mathrm{d}x+\int|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^2\\&=t^4\left(\int|\nabla e_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^2+2t^2\int|\nabla e_1|^2\,\mathrm{d}x\int|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x+\left(\int|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\le t^4\left(\int|\nabla e_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^2+Ct^2\|v\|^2,\end{aligned}$$

再由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 不等式，可得

$$\begin{aligned}\int\phi_u u^2\mathrm{d}x&=\frac{1}{4\pi}\iint\frac{u^2(x)u^2(y)}{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4\pi}\iint\frac{(te_1+v)^2(te_1+v)^2}{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{4\pi}\left(t^4\iint\frac{e_1^2e_1^2}{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2t^2\iint\frac{e_1^2v^2}{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\frac{v^2v^2}{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\&\le\frac{1}{3\cdot4^{\frac{5}{3}}\cdot\pi^{\frac{5}{3}}}\left(\int|e_1|^{\frac{12}{5}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{3}}t^4+C_1t^2\|v\|^2+C_2\|v\|^4.\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}I_{\mu_1}(u)&=\frac{1}{2}\|v\|^2-\frac{\mu_1}{2}\int|v|^2\,\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^2-\frac{\lambda}{4}\int\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int|te_1+v|^{p+1}\,\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\|v\|^2+\frac{b}{4}\left(\int|\nabla e_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^2t^4+\frac{b}{4}\left(\int|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^2-Ct^2\|v\|^2\\&\quad-\frac{\lambda}{3\cdot4^{\frac{8}{3}}\cdot\pi^{\frac{5}{3}}}\left(\int|e_1|^{\frac{12}{5}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{3}}t^4-C_1t^2\|v\|^2-C_2\|v\|^4-C_3|t|^{p+1}-C_4\|v\|^{p+1}.\end{aligned}$$

由 Young 不等式，可得

$$t^2\|v\|^2\le\frac{2}{p+1}|t|^{p+1}+\frac{p-1}{p+1}\|v\|^{\frac{2(p+1)}{p-1}}.$$

因此

$$\begin{aligned}I_{\mu_1}(u)\ge&\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\|v\|^2+\frac{b}{4}\left(\int|\nabla e_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^2t^4+\frac{b}{4}\left(\int|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^2\\&-\frac{2C}{p+1}|t|^{p+1}-\frac{C(p-1)}{p+1}\|v\|^{\frac{2(p+1)}{p-1}}-\frac{\lambda}{3\cdot4^{\frac{8}{3}}\cdot\pi^{\frac{5}{3}}}\left(\int|e_1|^{\frac{12}{5}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{5}{3}}t^4\\&-C_1\|v\|^4-C_2|t|^{p+1}-C_3\|v\|^{p+1}.\end{aligned}$$

由于 $\frac{2(p+1)}{p-1}>2$，则存在正常数 θ_2,θ_3 和 $\tilde{\theta}_2,\tilde{\theta}_3$，使得当 $\|v\|\le\tilde{\theta}_2$ 和 $|t|\le\tilde{\theta}_3$ 时，有

$$I_{\mu_1}(u)\ge\theta_2\|v\|^2+\theta_3|t|^4.$$

故存在正常数 θ_4 和 $\tilde{\theta}_4$，使得当 $\|u\|^2\le\left(\tilde{\theta}_4\right)^2$ 时，有

$$I_{\mu_1}(u)\ge\theta_4\|u\|^4.$$

令 $\bar{\delta}=\min\left\{\frac{\mu_1}{2}\theta_4\left(\tilde{\theta}_4\right)^2,\mu_2-\mu_1\right\}>0$，则对任意 $\mu\in\left[\mu_1,\mu_1+\bar{\delta}\right)$ 和 $\frac{1}{2}\left(\tilde{\theta}_4\right)^2\le|u|^2\le\left(\tilde{\theta}_4\right)^2$，有

$$\begin{aligned}I_\mu(u)&=I_{\mu_1}(u)+\frac{1}{2}(\mu_1-\mu)\int|u|^2\,\mathrm{d}x\\&\ge\theta_4\|u\|^4-\frac{\mu-\mu_1}{2\mu_1}\|u\|^2=\|u\|^2\left(\theta_4\|u\|^2-\frac{\mu-\mu_1}{2\mu_1}\right)\\&\ge\|u\|^2\left(\frac{1}{2}\theta_4\left(\tilde{\theta}_4\right)^2-\frac{1}{4}\theta_4\left(\tilde{\theta}_4\right)^2\right)=\frac{1}{4}\theta_4\left(\tilde{\theta}_4\right)^2\|u\|^2.\end{aligned}$$

取 $\rho_1^2\in\left[\frac{1}{2}\left(\tilde{\theta}_4\right)^2,\left(\tilde{\theta}_4\right)^2\right]$ 和 $\alpha:=\frac{1}{4}\theta_4\left(\tilde{\theta}_4\right)^2\rho_1^2$，则(2)的证明完成。

3)的证明：对任意 $s>0$，有

$$I_\mu(se_1)=\frac{s^2}{2}\left(\|e_1\|^2-\mu\int e_1^2\mathrm{d}x\right)+\frac{bs^4}{4}\left(\int|\nabla e_1|^2\,\mathrm{d}x\right)^2-\frac{\lambda s^4}{4}\int\phi_{e_1}e_1^2\mathrm{d}x-\frac{s^{p+1}}{p+1}\int|e_1|^{p+1}\,\mathrm{d}x.$$

因此，存在足够大的 $s_1>0$，使得 $\|s_1e_1\|>\rho_1$ 且 $I_\mu(s_1e_1)<0$。取 $\bar{u}=s_1e_1$，(3)的证明完成。

命题 1.1 假设条件(V1)成立，当 $0<\mu<\mu_1+\bar{\delta}$ 时，方程(1.3)有一个正解 u_μ 且满足 $I_\mu(u_\mu)>0$。

证明. 定义

$$c_{1,\mu}=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I_\mu(\gamma(t)),$$

其中，

$$\Gamma=\left\{\gamma\in C([0,1],H):\gamma(0)=0,\gamma(1)=\bar{u}\right\},$$

$\bar{u}$ 同引理 1.3 的(3)。由引理 1.1 可得 $c_{1,\mu}$ 是 I_μ 的临界且 $c_{1,\mu}>0$。参考[13] [14]中的方法可知，对任意的 $u\in H$，有 $I_\mu(u)=I_\mu(|u|)$ 且对每个 $n\in\mathbb{N}$，存在 $\gamma_n\in\Gamma$，在 $\mathbb{R}^3$ 上几乎处处有 $\gamma_n\ge0$，因此对所有 $t\in[0,1]$，有

$$c_{1,\mu}\le\max_{t\in[0,1]}I_\mu(\gamma_n(t))\le c_{1,\mu}+\frac{1}{n}.$$

由 Ekeland 变分原理[15]，可得 $\gamma_n^*\in\Gamma$ 具有以下性质：

1) $c_{1,\mu}\le\max_{t\in[0,1]}I_\mu(\gamma_n^*(t))\le\max_{t\in[0,1]}I_\mu(\gamma_n(t))<c_{1,\mu}+\frac{1}{n}$；

2) $\max_{t\in[0,1]}\left|(\gamma_n(t))-(\gamma_n^*(t))\right|<\frac{1}{\sqrt{n}}$；

3) 存在 $t_n\in[0,1]$，使得 $z_n=\gamma_n^*(t_n)$ 满足 $I_\mu(z_n)=\max_{t\in[0,1]}I_\mu(\gamma_n^*(t_n))$ 和 $\left|I'_\mu(z_n)\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}$。

特别地，我们得到一个 $(PS)_{c_{1,\mu}}$ 序列 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset H$。通过注释 1.1，我们得到一个收敛的子序列，仍记为 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$。因此可以假设在 H 中，当 $n\to\infty$ 时，有 $z_n\to z$。再由上面的性质可得，在 H 中，当 $n\to\infty$ 时，有 $\gamma_n(t_n)\to z$。因为 $\gamma_n(t)\ge0$，所以我们得到在 $\mathbb{R}^3$ 中，几乎处处有 $z\ge0$ 且 $I_\mu(z)>0$，它是方程(1.3)的一个解。由强极大值原理可得在 $\mathbb{R}^3$ 中 $z>0$，取 $u_\mu=z$，故命题得证。

命题 1.2 假设条件(V1)成立，当 $\mu_1<\mu<\mu_1+\bar{\delta}$ 时，方程(1.3)有一个正解 w_μ 且满足 $I_\mu(w_\mu)<0$。

证明. 设 $B_{\rho_1}:=\left\{u\in H:|u|\le\rho_1\right\}$，其中 ρ_1 同引理 1.3 的(2)。定义

$$c_{2,\mu}:=\inf_{|u|\le\rho_1}I_\mu(u).$$

显然 $c_{2,\mu} > -\infty$。参考[1]的方法，可得存在正常数 C_i，使得

$$\begin{aligned} I_\mu\left(t\eta_R e_1\right) &\le \left(\mu_1-\mu\right)\frac{t^2}{4}\int \eta_R^2 e_1^2 \mathrm{d}x + \frac{b}{4}t^4\left(\int\left|\nabla\left(\eta_R e_1\right)\right|^2 \mathrm{d}x\right)^2 \\ &\quad -\frac{\lambda t^4}{4}\int \phi_{\eta_R e_1}\left(\eta_R e_1\right)^2 \mathrm{d}x - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int \eta_R^{p+1} e_1^{p+1} \mathrm{d}x \\ &\le -C_1 t^2 + C_2 t^4 - C_3 t^4 - C_4 t^{p+1}. \end{aligned}$$

当 $t > 0$ 足够大时，可得 $I_\mu\left(t\eta_R e_1\right) < 0$。因此 $c_{2,\mu} < 0$ 得证。

同命题 1.1 的方法，根据 Ekeland 变分原理和注释 1.1，可得 $w_\mu \ge 0$ 是方程(1.3)的一个解，且 $I_\mu\left(w_\mu\right) < 0$。由强极大值原理可得在 $\mathbb{R}^3$ 中 $w_\mu > 0$。该命题得证。

定理 1.1 证明. 定理 1.1 的(1)由命题 1.1 得证，定理 1.1 的(2)结合命题 1.1 和命题 1.2 得证，故定理 1.1 得证。

参考文献

[1] Chen, J. (2014) Multiple Positive Solutions to a Class of Kirchhoff Equation on with Indefinite Nonlinearity. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **96**, 134-145. https://doi.org/10.1016/j.na.2013.11.012

[2] Niu, R. and Wang, H. (2023) Solutions for Planar Kirchhoff-Schrödinger-Poisson Systems with General Nonlinearities. *Boundary Value Problems*, **2023**, Article No. 66. https://doi.org/10.1186/s13661-023-01756-9

[3] Che, G. and Chen, H. (2020) Existence and Multiplicity of Positive Solutions for Kirchhoff-Schrödinger-Poisson System with Critical Growth. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas*, *Físicas y Naturales*. *Serie A*. *Matemáticas*, **114**, Article No. 78. https://doi.org/10.1007/s13398-020-00809-3

[4] Soluki, M., Rasouli, S.H. and Afrouzi, G.A. (2023) Solutions of a Schrödinger-Kirchhoff-Poisson System with Concave-Convex Nonlinearities. *Journal of Elliptic and Parabolic Equations*, **9**, 1233-1244. https://doi.org/10.1007/s41808-023-00243-7

[5] Zhang, M. and Qian, A. (2021) Existence and Asymptotic Behavior of Ground State Sign-Changing Solutions for a Nonlinear Schrödinger-Poisson-Kirchhoff System in R^3. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **51**, 1879-1897. https://doi.org/10.1216/rmj.2021.51.1879

[6] Yang, J., Guo, W., Li, W. and Zhang, J. (2022) Existence of Normalized Solutions for a Class of Kirchhoff-Schrödinger-Poisson Equations in R^3. *Annals of Functional Analysis*, **14**, Article No. 13. https://doi.org/10.1007/s43034-022-00240-2

[7] Wang, Z., Zhang, X. and Chen, J. (2015) Standing Waves for Nonlinear Schrödinger-Poisson Equation with High Frequency. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **45**, 601-614. https://doi.org/10.12775/tmna.2015.028

[8] Seok, J. (2013) On Nonlinear Schrödinger-Poisson Equations with General Potentials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **401**, 672-681. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.12.054

[9] Sun, J. and Ma, S. (2016) Ground State Solutions for Some Schrödinger-Poisson Systems with Periodic Potentials. *Journal of Differential Equations*, **260**, 2119-2149. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.09.057

[10] Zhou, J. and Wu, Y. (2023) Existence and Concentration of Solutions for Nonlinear Schrödinger-Poisson System with Steep Potential Well. https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-3141933/v1

[11] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P.H. (1973) Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications. *Journal of Functional Analysis*, **14**, 349-381. https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7

[12] 张倩. 关于两类非线性椭圆型方程组基态解和变号解的研究[D]: [博士学位论文]. 福州: 福建师范大学, 2022.

[13] Alama, S. and Tarantello, G. (1993) On Semilinear Elliptic Equations with Indefinite Nonlinearities. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **1**, 439-475. https://doi.org/10.1007/bf01206962

[14] Alama, S. and Tarantello, G. (1996) Elliptic Problems with Nonlinearities Indefinite in Sign. *Journal of Functional Analysis*, **141**, 159-215. https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0125

[15] Aubin, J. and Ekeland, I. (1984) Applied Nonlinear Analysis. Wiley.