Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(9), 4370-4380**
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.139417

一类移动环境下Fisher-KPP方程受迫行波的存在性及其渐近行为

陈碧霞

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2024年8月23日；录用日期：2024年9月17日；发布日期：2024年9月24日

摘 要

考虑在移动环境下Fisher-KPP方程受迫行波的存在性及其渐近行为，并假设此方程的内禀增长率函数恒大于某正常数。利用单调迭代的技巧证明了方程的非减受迫行波和非负受迫行波的存在性，进一步研究了两种受迫波的渐近行为。

关键词

移动环境，Fisher-KPP方程，单调迭代，渐近行为

The Existence and Asymptotic Behavior of Forced Traveling Waves for a Class of Fisher-KPP Equation under a Shifting Habitat

Bixia Chen

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Aug. 23rd, 2024; accepted: Sep. 17th, 2024; published: Sep. 24th, 2024

Abstract

In this paper, we consider the existence and the asymptotic behavior of the Fisher-KPP equation in the shifting habitat, and assume that the intrinsic growth rate function of this equation is always greater than a normal number. Using the technique of monotone iteration to prove the existence of non-decreasing and non-negative forced waves of the equation, we further study the asymptotic

文章引用: 陈碧霞. 一类移动环境下 Fisher-KPP 方程受迫行波的存在性及其渐近行为[J]. 应用数学进展, 2024, 13(9): 4370-4380. DOI: 10.12677/aam.2024.139417

behavior of two forced waves.

Keywords

Shifting Habitat, Fisher-KPP Equation, Monotonic Iteration, Asymptotic Behavior

1. 引言

在生态种群动力学的研究中，诸如种群的数量变化、渐近传播以及物种入侵等问题都可以通过建立合适的反应扩散方程模型来进行研究[1]-[5]。许多应用数学学者[6]-[13]利用反应扩散方程来描述环境变化对物种持续性的影响。特别地，Li 等人[6]建立如下反应扩散方程

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=d\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x)\left[r(x-ct)-u(t,x)\right],\ t>0,\ x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

来研究在气候变化的影响下物种在移动栖息地灭绝和持久生存的条件以及渐近传播速度。其中 $u(t,x)$ 表示种群在时间 t 位置 x 的密度大小，常数 $d>0$ 表示种群扩散系数，$r(\cdot)$ 表示内禀增长率函数，以速度 $c>0$ 变化。Li 等人假设 $r(\cdot)$ 满足非减连续且 $r(-\infty)<0<r(+\infty)$ 的条件。Hu 和 Zou [8]证明了对任意给定的 $c>0$，方程(1)均存在一个连接 0 和 $r(+\infty)$ 的非减受迫行波 $u(t,x)=\varphi(x-ct)$。其中，受迫行波是指其波速与环境移动速度 c 相同的波。Berestycki 和 Fang [9]考虑了方程(1)中的反应项为 $f(x-ct,u)$ 的情形，运用 PDE 的理论方法证明了强迫行波的完全存在性和多重性以及它们的吸引性，并考虑了行波在 $+\infty$ 处的衰减速度。Yang 等人[12]还讨论了气候变化下局部扩散 Lotka-Volterra 合作系统受迫行波的存在性及其渐近行为。此外，Hu 等人[13]把内禀增长率函数的条件减弱为：$r(\cdot)$ 非减连续且满足 $r(-\infty)\le 0<r(+\infty)$，并研究了移动环境下非局部扩散 Lotka-Volterra 型合作系统的受迫行波的存在性。

受上述研究工作的启发，我们将探讨种群受气候变化影响较弱或种群栖息地环境轻微恶化的情形下局部扩散 Fisher-KPP 方程受迫行波的存在性及其渐近行为，且假设如下条件成立：

(A1) 函数 $r(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非减有界且连续，并满足 $r(+\infty)>r(-\infty)>0$。

(A2) 函数 $r(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微，且 $r'(\pm\infty)$ 存在。

首先将方程(1)的受迫行波解记作 $\varphi(\xi),\xi:=x-ct$。那么，方程(1)可转化为如下非自治常微分方程

$$-c\varphi'(\xi)=d\varphi''(\xi)+\varphi(\xi)\left[r(\xi)-\varphi(\xi)\right]. \tag{2}$$

此外，方程(2)对应的极限方程分别为

$$-c\varphi'(\xi)=d\varphi''(\xi)+\varphi(\xi)\left[r(+\infty)-\varphi(\xi)\right] \tag{3}$$

和

$$-c\varphi'(\xi)=d\varphi''(\xi)+\varphi(\xi)\left[r(-\infty)-\varphi(\xi)\right] \tag{4}$$

注意到 $r(+\infty)>r(-\infty)>0$，那么极限方程(3)和(4)分别有正平衡点 $r(+\infty)$ 和 $r(-\infty)$。因此，我们将考虑连接两个正平衡点之间行波的存在性，即探讨对任意 $c>0$ 方程(2)是否存在满足边界条件

$$\lim_{\xi\to-\infty}\varphi(\xi)=r(-\infty),\quad \lim_{\xi\to+\infty}\varphi(\xi)=r(+\infty) \tag{5}$$

的非减的解。又由于 $r(-\infty)>0$，我们还将在一定条件下探寻方程(2)满足边界条件

$$\lim_{\xi\to-\infty}\varphi(\xi)=r(-\infty),\quad \lim_{\xi\to+\infty}\varphi(\xi)=0 \tag{6}$$

的非负解。为达到研究目的，我们还需要如下假设条件：

(A*) 存在常数 $\rho>0$ 使得当 $\xi\to+\infty$ 时 $r(+\infty)-r(\xi)=o\left(\mathrm{e}^{-\rho\xi}\right)$ 成立。

我们的研究结果将表明在种群受气候变化影响较弱或环境恶化程度较轻时(即物种内禀增长率恒正时)，种群在任何一个区域内都能持久生存($\varphi(-\infty)=r(-\infty)>0$)。

本文剩余部分安排如下：在第 2 节中我们将给出一些预备知识，定义 F 算子并验证它的一些性质，同时构造两对恰当的上下解。在第 3 节中我们将利用单调迭代技巧结合波动引理证明非减受迫行波和非负受迫行波的存在性。此外，在第 4 节中我们将研究两种行波在 $\pm\infty$ 处的渐近行为。

2. 预备知识

首先，我们介绍一些函数空间。设 $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 表示由 $\mathbb{R}$ 上所有连续函数组成的空间，C^+ 表示由所有非负连续函数组成的空间，记

$$BC(\mathbb{R},\mathbb{R})=\left\{u\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|u(\xi)\right|<\infty\right\},$$

对任意的 $u,v\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，如果 $u-v\in C^+$，我们记 $u\ge v$ 或 $v\le u$。

令 $\alpha=2r(+\infty)$，则方程 $-d\lambda^2-c\lambda+\alpha=0$ 有如下两个实根：

$$\lambda_-=\frac{-c-\sqrt{c^2+4d\alpha}}{2d}<0,\quad \lambda_+=\frac{-c+\sqrt{c^2+4d\alpha}}{2d}>0.$$

定义二阶微分算子 Δ 和它的逆 Δ^{-1} 分别为

$$\Delta h:=-dh''-ch'+\alpha h,$$

$$\left(\Delta^{-1}h\right)(\xi):=\frac{1}{d\left(\lambda_+-\lambda_-\right)}\left[\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{\lambda_-(\xi-\eta)}h(\eta)\mathrm{d}\eta+\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_+(\xi-\eta)}h(\eta)\mathrm{d}\eta\right].$$

不难验证对任意给定的连续有界函数 h 都有 $\Delta\left(\Delta^{-1}h\right)=h$。另外，若 h',h'' 也是连续有界函数，那么 $\Delta^{-1}(\Delta h)=h$。

定义 2.1 若 $\overline{\varphi}(\xi),\underline{\varphi}(\xi)\in BC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足 $\overline{\varphi}',\underline{\varphi}',\overline{\varphi}'',\underline{\varphi}''\in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$\overline{\varphi}\ge\underline{\varphi}$，$\overline{\varphi}''$ 和 $\underline{\varphi}''$ 在 $\mathbb{R}\setminus\{\xi_j\}$ 上连续(ξ_j 为一有限递增点列)，且有 $\overline{\varphi}'(\xi_j+)\le\overline{\varphi}'(\xi_j-)$，$\underline{\varphi}'(\xi_j+)\ge\underline{\varphi}'(\xi_j-)$，此时，若有不等式

$$-c\overline{\varphi}'(\xi)\ge d\overline{\varphi}''(\xi)+\overline{\varphi}(\xi)\left[r(\xi)-\overline{\varphi}(\xi)\right] \tag{7}$$

和

$$-c\underline{\varphi}'(\xi)\le d\underline{\varphi}''(\xi)+\underline{\varphi}(\xi)\left[r(\xi)-\underline{\varphi}(\xi)\right] \tag{8}$$

在 $\mathbb{R}\setminus\{\xi_j\}$ 上成立，则称 $\overline{\varphi}(\xi)$ 和 $\underline{\varphi}(\xi)$ 为方程(2)的一对有序上下解。

给定一对有序上下解，可以构造先验集 Γ：

$$\Gamma=\left\{\varphi\,|\,\varphi\in BC(\mathbb{R},\mathbb{R}),\underline{\varphi}\le\varphi\le\overline{\varphi}\right\}.$$

对任意 $\varphi\in\Gamma$，定义如下算子：

$$H(\varphi)(\xi):=\alpha\varphi(\xi)+\varphi(\xi)\left[r_1(\xi)-\varphi(\xi)\right].$$

接下来，我们定义算子 F，其中 $F=\Delta^{-1}H$。下面我们先讨论算子 F 的一些性质。

引理 2.1 F 是一个非减算子，且 $F(\Gamma)\subset\Gamma$。

证明 一方面，取 $\tilde{\varphi},\hat{\varphi}\in\Gamma$ 且满足 $\tilde{\varphi}\geq\hat{\varphi}$，则对任何 $\xi\in\mathbb{R}$ 有

$$H(\tilde{\varphi})(\xi)-H(\hat{\varphi})(\xi)=\big(\alpha+r(\xi)-\tilde{\varphi}(\xi)-\hat{\varphi}(\xi)\big)\big(\tilde{\varphi}(\xi)-\hat{\varphi}(\xi)\big)\geq 0.$$

从而，对任意的 $\xi\in\mathbb{R}$，有 $F(\tilde{\varphi})(\xi)\geq F(\hat{\varphi})(\xi)$。即 F 是一个非减算子。

另一方面，由 $F(\Gamma)$ 的定义可知，我们只需证对所有 $\varphi\in\Gamma$ 都有

$$\underline{\varphi}\leq F(\varphi)\leq\overline{\varphi}.$$

由于 $\overline{\varphi}(\xi)$ 和 $\underline{\varphi}(\xi)$ 是一对有序上下解，结合文献[14]的引理 3.2 我们有

$$F(\underline{\varphi})=\Delta^{-1}H(\underline{\varphi})\geq\Delta^{-1}\Delta(\underline{\varphi})=\underline{\varphi},\quad F(\overline{\varphi})=\Delta^{-1}H(\overline{\varphi})\leq\Delta^{-1}\Delta\overline{\varphi}=\overline{\varphi}. \tag{9}$$

又由 F 是一个非减算子，所以对任意的 $\varphi\in\Gamma$ 有

$$F(\underline{\varphi})\leq F(\varphi)\leq F(\overline{\varphi}). \tag{10}$$

结合(9)和(10)得到 $F(\Gamma)\subset\Gamma$。证毕。

引理 2.2 若 $\varphi(\xi)\in\Gamma$ 非减，则 $F(\varphi)(\xi)$ 关于 ξ 也非减。

证明 若 $\varphi(\xi)\in\Gamma$ 是一个关于 ξ 的非减函数，则对任意 $s\in\mathbb{R}$ 和 $\zeta>0$，有

$$\begin{aligned}&H(\varphi)(s+\zeta)-H(\varphi)(s)\\&=\big(\varphi(s+\zeta)-\varphi(s)\big)\big[\alpha+r(s+\zeta)-\varphi(s+\zeta)-\varphi(s)\big]\\&\quad+\big(r(s+\zeta)-r(s)\big)\varphi(s)\geq 0.\end{aligned}$$

对于任意的 $\xi\in\mathbb{R}$，注意到当 h 为连续有界函数时，有 $\big(\Delta^{-1}h(s+\zeta)\big)(\xi)=\big(\Delta^{-1}h(s)\big)(\xi+\zeta)$，那么

$$\begin{aligned}F(\varphi)(\xi+\zeta)&=\big[\Delta^{-1}H(\varphi)(s)\big](\xi+\zeta)\\&=\big[\Delta^{-1}H(\varphi)(s+\zeta)\big](\xi)\\&\geq\big[\Delta^{-1}H(\varphi)(s)\big](\xi)\\&=F(\varphi)(\xi).\end{aligned}$$

证毕。

方程(2)可写为

$$\Delta\varphi=H(\varphi) \tag{11}$$

因此，若映射 F 在 Γ 中存在一个不动点，即存在 $\varphi\in\Gamma$ 使得

$$\varphi=F(\varphi)$$

成立，那么该不动点必是(11)的解。若该不动点还满足边界条件(5)或(6)，则必是方程(2)的受迫行波。因此，我们通过选取两对恰当的有序上下解构造出两个先验集。

引理 2.3 若 $\varphi(\xi)\in\Gamma$ 非减，则 $F(\varphi)(\xi)$ 关于 ξ 也非减。设 $\overline{\varphi}_1(\xi)=r(+\infty)$ 和 $\underline{\varphi}_1(\xi)=r(-\infty)$，则 $\overline{\varphi}_1(\xi)$ 和 $\underline{\varphi}_1(\xi)$ 是(2)的一对有序上下解。

证明 由 $r(\xi)$ 的单调性和 $\overline{\varphi}_1(\xi)$ 的定义可知

$$-c\big(r(+\infty)\big)'\geq d_1\big(r(+\infty)\big)''+r(+\infty)\big[r_1(\xi)-r(+\infty)\big],$$

且 $\overline{\varphi}_1(\xi)$ 满足定义 2.1 的所有条件，因此 $\overline{\varphi}_1(\xi)=r(+\infty)$ 是(2)的上解。

同理可得 $\underline{\varphi}_1(\xi)=r(-\infty)$ 是(2)的下解。证毕。

记

$$c^*(\infty):=2\sqrt{dr(+\infty)}.$$

接下来，我们在 $c>c^*(\infty)$ 的条件下构造另一对有序上下解。方程(2)在原点处的线性化方程对应的特征方程为

$$\Phi(c,\lambda):=d\lambda^2-c\lambda+r(+\infty)=0.$$

容易看出，当 $c=c^*(\infty)$ 时 $\Phi(c,\lambda)=0$ 有唯一正根 λ_0；当 $c>c^*(\infty)$ 时 $\Phi(c,\lambda)=0$ 有两个正根。方便起见，我们记最小正根为 λ_1。由假设(**A***)可知，存在 $K>0$ 使得当 $\xi\ge K$ 时 $r(+\infty)-r(\xi)\le \mathrm{e}^{-\rho\xi}$ 成立。因此，对于正数 $\omega\le\min\{\rho,\lambda_0-\lambda_1\}$，当 $\xi\ge K$ 时有

$$r(+\infty)-r(\xi)\le \mathrm{e}^{-\rho\xi}\le \mathrm{e}^{-\omega\xi}.$$

此外，当 $c>c^*(\infty)$ 有 $\Phi(c,\lambda_1+\omega)<0$，令 $M:=-\dfrac{2}{\Phi(c,\lambda_1+\omega)}$，可取 ω 足够小使得 $-\dfrac{1}{\omega}\ln\dfrac{1}{M}>\max\left\{K,-\dfrac{\ln r(+\infty)}{\lambda_1}\right\}$ 成立。定义如下两个有界连续函数

$$\overline{\varphi}_2(\xi)=\begin{cases} r(+\infty), & \xi\le\xi_1,\\ \mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}, & \xi>\xi_1,\end{cases}$$

$$\underline{\varphi}_2(\xi)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda_1\xi_2}\left(1-M\mathrm{e}^{-\omega\xi_2}\right), & \xi\le\xi_2,\\ \mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M\mathrm{e}^{-\omega\xi}\right), & \xi>\xi_2,\end{cases}$$

其中 $\xi_1=-\dfrac{1}{\lambda_1}\ln r(+\infty)$，$\xi_2\in\left(-\dfrac{1}{\omega}\ln\dfrac{1}{M},-\dfrac{1}{\omega}\ln\dfrac{\lambda_1}{(\lambda_1+\omega)M}\right)$ 使得 $\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi_2}\left(1-M\mathrm{e}^{-\omega\xi_2}\right)\in\left(0,r(-\infty)\right)$。

引理 2.4 假设 $c>c^*(\infty)$ 且(**A***)成立，则 $\overline{\varphi}_2(\xi)$ 和 $\underline{\varphi}_2(\xi)$ 是(2)的一对有序上下解。

证明 若 $\xi>\xi_1$，则 $\overline{\varphi}_2(\xi)=\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}$，计算可得

$$d\lambda_1^2\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}-c\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left[r(\xi)-\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\right]=\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left[d\lambda_1^2-c\lambda_1+r(\xi)-\mathrm{e}^{-\lambda_c\xi}\right]\le\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left[d\lambda_1^2-c\lambda_1+r(+\infty)\right]=0.$$

这表明 $\overline{\varphi}_2(\xi)$ 在 $\xi>\xi_1$ 时使得不等式(7)成立。当 $\xi<\xi_1$ 时，易证 $\overline{\varphi}_2(\xi)=r(+\infty)$ 也满足不等式(7)。此外，易知 $\overline{\varphi}_2'(\xi_1+)\le\overline{\varphi}_2'(\xi_1-)$。因此 $\overline{\varphi}_2(\xi)$ 是方程(2)的一个上解。

下面证明 $\underline{\varphi}_2(\xi)$ 是方程(2)的一个下解。当 $\xi>\xi_2$ 时，有 $\underline{\varphi}_2(\xi)=\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M\mathrm{e}^{-\omega\xi}\right)$，$\underline{\varphi}_2'(\xi)=-\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}+(\lambda_1+\omega)M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\omega)\xi}$ 和 $\underline{\varphi}_2''(\xi)=\lambda_1^2\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}-(\lambda_1+\omega)^2M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\omega)\xi}$。于是

$$\begin{aligned}
&d\underline{\varphi}_2''(\xi)+c\underline{\varphi}_2'(\xi)+\underline{\varphi}_2(\xi)\left[r(\xi)-\underline{\varphi}_2(\xi)\right]\\
&=\left[d\lambda_1^2-c\lambda_1+r(\xi)-\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M\mathrm{e}^{-\omega\xi}\right)\right]\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\\
&\quad-\left[d(\lambda_1+\omega)^2-c(\lambda_1+\omega)+r(\xi)-\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M\mathrm{e}^{-\omega\xi}\right)\right]M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\omega)\xi}\\
&=\left[-r(+\infty)+r(\xi)-\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M\mathrm{e}^{-\omega\xi}\right)\right]\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\\
&\quad-\left[\Phi(c,\lambda_1+\omega)-r(+\infty)+r(\xi)-\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left(1-M\mathrm{e}^{-\omega\xi}\right)\right]M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\omega)\xi}\\
&\ge\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left[-M\mathrm{e}^{-\omega\xi}\Phi(c,\lambda_1+\omega)-\mathrm{e}^{-\omega\xi}-\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\right]\\
&\ge\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi}\left[-M\mathrm{e}^{-\omega\xi}\Phi(c,\lambda_1+\omega)-2\mathrm{e}^{-\omega\xi}\right]\\
&=0.
\end{aligned}$$

这表明 $\underline{\varphi}_2(\xi)$ 在 $\xi>\xi_2$ 时使得不等式(8)成立。当 $\xi<\xi_2$ 时，显然 $\underline{\varphi}_2(\xi)=\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi_2}\left(1-M\mathrm{e}^{-\omega\xi_2}\right)$ 也满足不等式(8)。此外，易知 $\underline{\varphi}_2'(\xi_2+)\ge\underline{\varphi}_2'(\xi_2-)$，而且根据 $\overline{\varphi}_2(\xi)$ 和 $\underline{\varphi}_2(\xi)$ 的具体表达式可知 $\overline{\varphi}_2(\xi)\ge\underline{\varphi}_2(\xi)$。因此 $\overline{\varphi}_2(\xi)$ 和 $\underline{\varphi}_2(\xi)$ 为方程(2)的一对有序上下解。证毕。

由上述两个引理，我们得到如下两个先验集：

$$\Gamma_1:=\left\{\varphi\,|\,\varphi\in BC(\mathbb{R},\mathbb{R}),\underline{\varphi}_1\le\varphi\le\overline{\varphi}_1\right\},$$

$$\Gamma_2:=\left\{\varphi\,|\,\varphi\in BC(\mathbb{R},\mathbb{R}),\underline{\varphi}_2\le\varphi\le\overline{\varphi}_2\right\}.$$

3. 行波解的存在性

定理 3.1 若(**A1**)成立，则对任意 $c>0$，方程(2)总存在一个满足边界条件(5)的非减受迫行波。

证明 首先构造如下迭代序列：

$$\varphi_1^{(1)}=F(\overline{\varphi}_1),\varphi_1^{(n+1)}=F\left(\varphi_1^{(n)}\right),\forall n\ge 1.$$

由于 $\overline{\varphi}_1(\xi)\in\Gamma_1$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非减函数，结合引理 2.1 和引理 2.2 得到对所有的 $n\ge1$，$\overline{\varphi}_1(\xi)$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的非减函数且满足不等式

$$\overline{\varphi}_1(\xi)\ge\varphi_1^{(1)}(\xi)\ge\varphi_1^{(2)}(\xi)\ge\cdots\ge\varphi_1^{(n)}(\xi)\ge\varphi_1^{(n+1)}(\xi)\ge\cdots\ge\underline{\varphi}_1(\xi).$$

从而，存在一个有界非减函数 $\varphi_1(\xi)$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\varphi_1^{(n)}(\xi)=\varphi_1(\xi)$。很容易看出，对所有的 $n\ge1$，$\xi\in\mathbb{R}$ 有

$$\left|H\left(U_1^{(n)}\right)(\xi)\right|\le r(+\infty)\left(2r(+\infty)+\alpha\right).$$

从而利用 Lebesgue’s 控制收敛定理得

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi)&=\lim_{n\to\infty}\varphi_1^{(n+1)}(\xi)=\lim_{n\to\infty}F\left(\varphi_1^{(n)}\right)(\xi)=\lim_{n\to\infty}\left(\Delta^{-1}H\left(\varphi_1^{(n)}\right)(\xi)\right)\\&=\frac{1}{d(\lambda_+-\lambda_-)}\left[\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{\lambda_-(\xi-\eta)}H(\varphi_1)(\eta)\mathrm{d}\eta+\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_+(\xi-\eta)}H(\varphi_1)(\eta)\mathrm{d}\eta\right]\\&=F(\varphi_1)(\xi).\end{aligned}$$

即 $\varphi_1(\xi)\in\Gamma_1$ 是算子 F 的不动点，也就是说 $\varphi_1(\xi)$ 是方程(2)的解。

接下来证明 $\varphi_1(\xi)$ 满足边界条件(5)。因 $\varphi_1(\xi)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界非减函数，记 $A_1:=\lim_{\xi\to-\infty}\varphi_1(\xi)$ 和 $B_1:=\lim_{\xi\to+\infty}\varphi_1(\xi)$。显然有

$$0<r(-\infty)\le A_1\le r(+\infty),\ 0<r(-\infty)\le B_1\le r(+\infty).$$

由

$$\lim_{\xi\to-\infty}H(\varphi_1)(\xi)=A_1\left(\alpha+r(-\infty)-A_1\right),\quad\lim_{\xi\to+\infty}H(\varphi_1)(\xi)=B_1\left(\alpha+r(+\infty)-B_1\right),$$

利用 L’Hôpital 法则可得

$$\begin{aligned}A_1&=\lim_{\xi\to-\infty}\varphi_1(\xi)\\&=\lim_{\xi\to-\infty}\left(\Delta^{-1}H(\varphi_1)(\xi)\right)\\&=\lim_{\xi\to-\infty}\frac{1}{d(\lambda_+-\lambda_-)}\left[\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{\lambda_-(\xi-\eta)}H(\varphi_1)(\eta)\mathrm{d}\eta+\int_{\xi}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_+(\xi-\eta)}H(\varphi_1)(\eta)\mathrm{d}\eta\right]\end{aligned}$$

$$= \lim_{\xi\to-\infty}\frac{1}{d(\lambda_+-\lambda_-)}\left(\frac{H(\varphi_1)(\xi)}{-\lambda_-}+\frac{H(\varphi_1)(\xi)}{\lambda_+}\right)$$

$$= A_1+\frac{A_1\left[r(-\infty)-A_1\right]}{\alpha}.$$

于是 $A_1=r(-\infty)$。同理可得

$$B_1=\lim_{\xi\to+\infty}\varphi_1(\xi)=B_1+\frac{B_1\left[r(+\infty)-B_1\right]}{\alpha}.$$

所以 $B_1=r(+\infty)$。证毕。

定理 3.2 若(**A1**)和(**A***)成立，则当 $c>c^*(\infty)$ 时方程(1)存在满足边界条件(6)的非负受迫行波。

证明 类似于定理 3.1 的证明过程可得行波的存在性。由于此时 $\varphi_2(\xi)\in\Gamma_2$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续有界函数但不具备单调性，因此方程(2)的解 $\varphi_2(\xi)$ 也不具备单调性。

接下来证明 $\varphi_2(\xi)$ 满足边界条件(6)。根据 $\underline{\varphi}_2(\xi)$ 和 $\overline{\varphi}_2(\xi)$ 的定义可知 $\varphi_2(\xi)$ 为正解，且有

$$\lim_{\xi\to+\infty}\underline{\varphi}_2(\xi)=0,\quad \lim_{\xi\to+\infty}\overline{\varphi}_2(\xi)=0.$$

于是 $\lim_{\xi\to+\infty}\varphi_2(\xi)=0$。

下面我们证明 $\lim_{\xi\to-\infty}\varphi_2(\xi)=r(-\infty)$。记

$$A_2:=\limsup_{\xi\to-\infty}\varphi_2(\xi),\quad B_2:=\liminf_{\xi\to-\infty}\varphi_2(\xi).$$

于是 $0<B_2\le A_2\le r(+\infty)$。由波动引理(文献[15]中引理 A.1)，存在满足 $\lim_{n\to\infty}s_n=-\infty$ 的单调序列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和满足 $\lim_{n\to\infty}t_n=-\infty$ 的单调序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_2(s_n)=A_2,\quad \lim_{n\to\infty}\varphi_2(t_n)=B_2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_2'(s_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi_2'(t_n)=0.$$

根据 $\varphi_2(\xi)=F(\varphi_2)(\xi)$ 可得

$$\varphi_2'(\xi)=\lambda_+\varphi_2(\xi)-\frac{1}{d}\int_{-\infty}^{\xi}\mathrm{e}^{\lambda_-(\xi-\eta)}H(\varphi_2)(\eta)\mathrm{d}\eta.$$

对任意 $\epsilon>0$，$\exists N_1>0$ 使得当 $\eta\in\left(-\infty,s_{N_1}\right)$ 时有

$$0<\varphi_2(\eta)<A_2+\epsilon,\quad r(-\infty)<r(\eta)<r(-\infty)+\epsilon.$$

因此，当 $n>N_1$ 时有

$$\varphi_2'(s_n)=\lambda_+\varphi_2(s_n)-\frac{1}{d}\int_{-\infty}^{s_n}\mathrm{e}^{\lambda_-(s_n-\eta)}H(\varphi_2)(\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$\ge\lambda_+\varphi_2(s_n)-\frac{1}{d}\int_{-\infty}^{s_n}\mathrm{e}^{\lambda_-(s_n-\eta)}(A_2+\epsilon)(\alpha+r(-\infty)-A_2)\mathrm{d}\eta$$

$$=\lambda_+\varphi_2(s_n)+\frac{1}{d\lambda_-}(A_2+\epsilon)(\alpha+r(-\infty)-A_2).$$

令 $n\to\infty$，我们有

$$\lambda_+A_2+\frac{1}{d\lambda_-}(A_2+\epsilon)(\alpha+r(-\infty)-A_2)\le0.$$

由 ϵ 的任意性得

$$\lambda_+ A_2 + \frac{1}{d\lambda_-} A_2\left(\alpha + r(-\infty) - A_2\right) \le 0.$$

注意到 $A_2 > 0$，上不等式可推得

$$A_2 \le r(-\infty). \tag{12}$$

类似地，对任意 $\epsilon \in (0, B_2)$，$\exists N_2 > 0$ 使得当 $\eta \in \left(-\infty, t_{N_2}\right)$ 时有

$$B_2 - \epsilon < \varphi_2(\eta) \le r(+\infty), \quad r(-\infty) < r(\eta) < r(-\infty) + \epsilon.$$

因此，当 $n > N_2$ 时有

$$\begin{aligned}
\varphi_2'(t_n) &= \lambda_+ \varphi_2(t_n) - \frac{1}{d}\int_{-\infty}^{t_n} \mathrm{e}^{\lambda_-(t_n-\eta)} H(\varphi_2)(\eta)\,\mathrm{d}\eta \\
&\le \lambda_+ \varphi_2(t_n) - \frac{1}{d}\int_{-\infty}^{t_n} \mathrm{e}^{\lambda_-(t_n-\eta)} (B_2 - \epsilon)\left(\alpha + r(-\infty) - B_2 + \epsilon\right)\mathrm{d}\eta \\
&= \lambda_+ \varphi_2(t_n) + \frac{1}{d\lambda_-}(B_2 - \epsilon)\left(\alpha + r(-\infty) - B_2 + \epsilon\right).
\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$，我们有

$$\lambda_+ B_2 + \frac{1}{d\lambda_-}(B_2 - \epsilon)\left(\alpha + r(-\infty) - B_2 + \epsilon\right) \ge 0.$$

由 ϵ 的任意性得

$$\lambda_+ B_2 + \frac{1}{d\lambda_-} B_2\left(\alpha + r(-\infty) - B_2\right) \ge 0.$$

注意到 $B_2 > 0$，上不等式可推得

$$B_2 \ge r(-\infty). \tag{13}$$

注意到 $B_2 \le A_2$，由(12)和(13)可知 $A_2 = B_2 = r(-\infty)$。因此，$\lim_{\xi\to-\infty} \varphi_2(\xi) = r(-\infty)$。证毕。

4. 行波解的渐近行为

为了获得更多的在 $\pm\infty$ 处的行波的渐近信息，我们令

$$\varphi(\xi) = u^0(\xi) \quad \text{for} - \infty < \xi < +\infty,$$

它是满足边界条件(5)或(6)的方程(2)的解，对(2)关于 ξ 求导，那么我们知道 $\varphi'(\xi) =: \theta$ 满足

$$d\theta''(\xi) + c\theta'(\xi) + \left[r(\xi) - 2u^0\right]\theta + r'(\xi)u^0 = 0. \tag{14}$$

定理 4.1 假设(**A1**)和(**A2**)成立，那么存在正常数 P_1, P_2 使得方程(1)的行波具有以下渐近性质当 $\xi \to -\infty$ 时有

$$\varphi_1(\xi) = r(-\infty) + \left(P_1 + o(1)\right)\mathrm{e}^{\frac{-c+\sqrt{c^2+4dr(-\infty)}}{2d}\xi}.$$

且当 $\xi \to +\infty$ 时有

$$\varphi_1(\xi) = r(+\infty) - \left(P_2 + o(1)\right)\mathrm{e}^{\frac{-c-\sqrt{c^2+4dr(+\infty)}}{2d}\xi}.$$

证明 当$\xi\to-\infty$时方程(14)的极限方程可以写为

$$d\phi''(\xi)+c\phi'(\xi)-r(-\infty)\phi(\xi)=0. \tag{15}$$

注意到在(15)中我们用到了$r'(-\infty)=0$。事实上，应用 L'Hôpital's 法则，我们可以得到

$$\lim_{\xi\to-\infty}r(\xi)=\lim_{\xi\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{\xi}r(\xi)}{\mathrm{e}^{\xi}}=\lim_{\xi\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{\xi}\left[r(\xi)+r'(\xi)\right]}{\mathrm{e}^{\xi}}=\lim_{\xi\to-\infty}\left[r(\xi)+r'(\xi)\right],$$

这表明$r'(-\infty)=0$。同理可得$r'(+\infty)=0$。

方程(15)有两个形式如下的线性无关的解

$$\phi_1(\xi)=\mathrm{e}^{\frac{-c-\sqrt{c^2+4dr(-\infty)}}{2d}\xi},\quad \phi_2(\xi)=\mathrm{e}^{\frac{-c+\sqrt{c^2+4dr(-\infty)}}{2d}\xi}.$$

联立(14)和(15)，我们发现当$\xi\to-\infty$时θ具有如下性质

$$\theta(\xi)=p_1\left[1+o(1)\right]\phi_1(\xi)+q_1\left[1+o(1)\right]\phi_2(\xi).$$

由于$\lim_{\xi\to-\infty}\theta(\xi)=0$，所以必须有$p_1=0$。因此，对于$\xi\to-\infty$，

$$\varphi_1'(\xi)=\theta(\xi)=q_1\left[1+o(1)\right]\mathrm{e}^{\frac{-c+\sqrt{c^2+4dr(-\infty)}}{2d}\xi}.$$

对上式从$-\infty$到ξ积分，可以得到当$\xi\to-\infty$时，对某个常数$P_1>0$有

$$\varphi_1(\xi)=r(-\infty)+\left(P_1+o(1)\right)\mathrm{e}^{\frac{-c+\sqrt{c^2+4dr(-\infty)}}{2d}\xi}.$$

类似地，当$\xi\to+\infty$时，可以得到对某个常数$P_2>0$有

$$\varphi_1(\xi)=r(+\infty)-\left(P_2+o(1)\right)\mathrm{e}^{\frac{-c-\sqrt{c^2+4dr(+\infty)}}{2d}\xi}.$$

证毕。

定理 4.2 假设(**A1**)、(**A2**)和(**A***)成立，那么存在正常数Q_1,Q_2使得方程(1)的行波具有以下渐近性质。当$\xi\to-\infty$时有

$$\varphi_2(\xi)=r(-\infty)-\left(Q_1+o(1)\right)\mathrm{e}^{\frac{-c+\sqrt{c^2+4dr(-\infty)}}{2d}\xi}.$$

且当$\xi\to+\infty$时有

$$\varphi_2(\xi)=\left(Q_2+o(1)\right)\mathrm{e}^{\frac{-c+\sqrt{c^2-4dr(+\infty)}}{2d}\xi}.$$

证明 运用定理 4.1 的证明方法可得当$\xi\to-\infty$时，对某个常数C_1有

$$\varphi_2(\xi)=r(-\infty)+\left(C_1+o(1)\right)\mathrm{e}^{\frac{-c+\sqrt{c^2+4dr(-\infty)}}{2d}\xi}.$$

由于对任意$\xi\in\mathbb{R}$有$\lim_{\xi\to-\infty}\varphi_2(\xi)=r(-\infty)$和$\varphi_2(\xi)\le r(-\infty)$。我们可以得到常数$C<0$，记$Q_1:=-C>0$。由此可得

$$\varphi_2(\xi)=r(-\infty)-\left(Q_1+o(1)\right)\mathrm{e}^{\frac{-c+\sqrt{c^2+4dr(-\infty)}}{2d}\xi}.$$

当$\xi\to+\infty$时，(14)的极限方程如下

$$d\psi''(\xi)+c\psi'(\xi)+r(+\infty)\psi(\xi)=0. \tag{16}$$

方程(16)有两个形式如下的独立的解

$$\psi_1(\xi)=\mathrm{e}^{\frac{-c-\sqrt{c^2-4dr(+\infty)}}{2d}\xi},\quad \psi_2(\xi)=\mathrm{e}^{\frac{-c+\sqrt{c^2-4dr(+\infty)}}{2d}\xi}.$$

类似地，我们可以得到当$\xi\to+\infty$时，对某个常数D_1,D_2有

$$\varphi_2(\xi)=-(D_1+o(1))\mathrm{e}^{\frac{-c-\sqrt{c^2-4dr(-\infty)}}{2d}\xi}-(D_2+o(1))\mathrm{e}^{\frac{-c+\sqrt{c^2-4dr(-\infty)}}{2d}\xi}.$$

进一步可得对某个常数D有

$$\varphi_2(\xi)=-(D+o(1))\mathrm{e}^{\frac{-c+\sqrt{c^2-4dr(-\infty)}}{2d}\xi}.$$

由于对任意$\xi\in\mathbb{R}$有$\lim_{\xi\to+\infty}\varphi_2(\xi)=0$和$\varphi_2(\xi)\ge 0$。我们可以得到常数$D<0$，记$Q_2:=-D>0$，由此可得

$$\varphi_2(\xi)=(Q_2+o(1))\mathrm{e}^{\frac{-c+\sqrt{c^2-4dr(-\infty)}}{2d}\xi}.$$

证毕。

5. 总结

本文主要研究了一类移动环境下随机扩散 Fisher-KPP 方程受迫波的存在性及其渐近行为，主要通过构造上下解和先验集，运用单调迭代技巧证明了该方程非减受迫行波和非负受迫行波的存在性。当环境移动速度$c>0$时，证明了方程(1)存在一个连接$r(-\infty)$和$r(+\infty)$两个正平衡点的非减受迫行波。当$c>c^*(\infty)$时，证明了方程(1)存在一个连接$r(-\infty)$和 0 的非负受迫行波。并研究了这两种行波在$\pm\infty$处的渐近行为。同时注意到这两个受迫波的边界条件中都有$\lim_{\xi\to-\infty}\varphi(\xi)=r(-\infty)$。由于$r(\cdot)$恒正，$r(-\infty)>0$，这表明种群栖息地环境是轻微恶化的，因此可知该种群在任一固定的区域上都可以持久生存。

参考文献

[1] Fisher, R.A. (1937) The Wave of Advance of Advantageous Genes. *Annals of Eugenics*, **7**, 355-369. https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x

[2] Kolomgorov, A.N., Petrovskii, I.G. and Piskunov, N.S. (1937) Study of a Diffusion Equation That Is Related to the Growth of a Quality of Matter, and Its Application to a Biological Problem. Moscow University Mathematics Bulletin, **1**, 1-26.

[3] Cantrell, R.S. and Cosner, C. (2004) Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations. Wiley. https://doi.org/10.1002/0470871296

[4] 倪维明. 浅谈反应扩散方程[J]. 数学传播, 2016, 34(4): 17-26.

[5] 楼元. 空间生态学中的一些反应扩散方程模型[J]. 中国科学: 数学, 2015, 45(10): 1619-1634.

[6] Li, B., Bewick, S., Shang, J. and Fagan, W.F. (2014) Persistence and Spread of a Species with a Shifting Habitat Edge. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **74**, 1397-1417. https://doi.org/10.1137/130938463

[7] Fang, J., Lou, Y. and Wu, J. (2016) Can Pathogen Spread Keep Pace with Its Host Invasion? *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **76**, 1633-1657. https://doi.org/10.1137/15m1029564

[8] Hu, H. and Zou, X. (2017) Existence of an Extinction Wave in the Fisher Equation with a Shifting Habitat. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **145**, 4763-4771. https://doi.org/10.1090/proc/13687

[9] Berestycki, H. and Fang, J. (2018) Forced Waves of the Fisher-KPP Equation in a Shifting Environment. *Journal of Differential Equations*, **264**, 2157-2183. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.10.016

[10] Li, W., Wang, J. and Zhao, X. (2018) Spatial Dynamics of a Nonlocal Dispersal Population Model in a Shifting Environment. *Journal of Nonlinear Science*, **28**, 1189-1219. https://doi.org/10.1007/s00332-018-9445-2

[11] Wu, C., Wang, Y. and Zou, X. (2019) Spatial-Temporal Dynamics of a Lotka-Volterra Competition Model with Nonlocal Dispersal under Shifting Environment. *Journal of Differential Equations*, **267**, 4890-4921. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.05.019

[12] Yang, Y., Wu, C. and Li, Z. (2019) Forced Waves and Their Asymptotics in a Lotka-Volterra Cooperative Model under Climate Change. *Applied Mathematics and Computation*, **353**, 254-264. https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.01.058

[13] Hu, H., Deng, L. and Huang, J. (2021) Traveling Wave of a Nonlocal Dispersal Lotka-Volterra Cooperation Model under Shifting Habitat. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **500**, Article 125100. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125100

[14] Hu, H. and Zou, X. (2021) Traveling Waves of a Diffusive SIR Epidemic Model with General Nonlinear Incidence and Infinitely Distributed Latency but without Demography. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **58**, Article 103224. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2020.103224

[15] Smith, H.L. (2011) An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. Springer.