**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, **2024, 13(9), 4129-4143**
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.139394

# 带有指数阻尼项的三维Navier-Stokes方程吸引子的存在性

**刘爱博，刘　佳**

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2024年8月10日；录用日期：2024年9月2日；发布日期：2024年9月12日

## 摘　要

近些年，带有多项式阻尼项的Navier-Stokes方程被推导且得到研究，并且得出了很多重要结论。本文证明了带有指数阻尼项$\alpha\left(e^{\beta|u|^2}-1\right)u(\alpha>0,\beta>0)$的三维Navier-Stokes方程在有界区域上整体吸引子的存在性。

## 关键词

三维Navier-Stokes方程，指数阻尼项，吸引子

# Existence of Attractors for the Three-Dimensional Navier-Stokes Equations with Exponential Damping

**Aibo Liu, Jia Liu**

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Aug. 10th, 2024; accepted: Sep. 2nd, 2024; published: Sep. 12th, 2024

## Abstract

**In recent years, the Navier-Stokes equations with polynomial damping have been derived and studied, and many important conclusions have been drawn. In this paper, we show that the three-dimensional Navier-Stokes equations with exponential damping $\alpha\left(e^{\beta|u|^2}-1\right)u(\alpha>0,\beta>0)$ have global attractors in the bounded domain.**

文章引用: 刘爱博, 刘佳. 带有指数阻尼项的三维 Navier-Stokes 方程吸引子的存在性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(9): 4129-4143. DOI: 10.12677/aam.2024.139394

**Keywords**

**The Three-Dimensional Navier-Stokes Equations, Exponential Damping, Attractors**



## 1. 引言

自 1933 年以来，经典的 Navier-Stokes 方程引起了很多学者的兴趣和研究，得到了很多重要结果。例如，Leray [1]与 Hopf [2]分别构造了 Navier-Stokes 方程在全空间和有界域上的弱解，并证明了三维经典 Navier-Stokes 方程当 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ 时存在一个弱解 $u$，我们将这个弱解称为 Leray-Hopf 弱解。Fujita 和 Kato 研究了经典 Navier-Stokes 方程的初值问题，并构造了三维 Navier-Stokes 方程在有界域上的温和解[3]等。

近期，又有很多学者对带有多项式阻尼项的 Navier-Stokes 方程进行了研究。2008 年，蔡晓静和酒全森研究了阻尼项为 $\alpha|u|^{\beta-1}u$ 的 Navier-Stokes 方程解的存在性和唯一性，证明了当实数 $\beta \ge 1$ 且初值 $u_0 \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)$ 时弱解具有整体存在性，当 $\beta \ge \frac{7}{2}$ 时方程具有整体强解，特别地，当 $\frac{7}{2} \le \beta \le 5$ 时强解唯一[4]。2012 年，针对这一问题，周勇证明了当 $\beta \ge 3$ 时强解的整体存在性，并且建立了两个正则性准则，还证明了当 $\beta \ge 1$ 时强解和弱解存在的唯一性。2021 年，J. Benameur 构建了带有指数阻尼项 $\alpha\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u$ 的 Navier-Stokes 方程，证明了弱解的整体存在性[5]；之后，J. Benameur 和 M. Ltifi 证明了带有指数阻尼项的 Navier-Stokes 方程强解的存在性和唯一性[6]。2022 年，M. Ltifi 证明了带有对数阻尼项 $\alpha\log\left(e+|u|^2\right)|u|^2 u$ 的 Navier-Stokes 方程强解的存在性和唯一性。

同时，学者们对 Navier-Stokes 方程吸引子的存在和性质也得到了很多研究。1991 年，Ladyzhenskaya 证明了半群吸引子的存在性[7]。1992 年，A.V. Babin 和 M.I. Vishik 提出了发展方程吸引子这一概念[8]。随后，数学家们对二维和三维 Navier-Stokes 方程的吸引子作了大量研究，并得出了很多重要结论。1998 年，R. Rosa 证明了二维 Navier-Stokes 流体在无界域上的整体吸引子[9]。2000 年，E Feireisl 证明了三维可压缩 Navier-Stokes 方程紧致的整体吸引子的存在性[10]。2011 年，宋学力和侯延仁证明了阻尼项为 $\alpha|u|^{\beta-1}u$ 的 Navier-Stokes 方程在有界域中整体吸引子的存在性[11]。

基于以上学者的研究，我们发现对于带有多项式阻尼项的 Navier-Stokes 方程吸引子的存在性的研究颇少，考虑到吸引子对于 Navier-Stokes 方程研究的重要意义，本文将对带有指数阻尼项的 Navier-Stokes 方程吸引子的存在性进行研究。

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是边界 $\partial\Omega$ 足够光滑的有界区域，本文的主要研究目的是，带有指数阻尼项 $\alpha\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u$ 的三维 Navier-Stokes 方程整体吸引子的存在性。为便于证明，本文构建了如下方程：

$$\begin{cases} u_t - \mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \alpha\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u + \nabla p = 0, & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ \operatorname{div} u = 0, & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ u|_{t=0} = u_0 & x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & x\in\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\mu > 0$ 为流体的运动粘度，向量函数 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 和 $p = p(x,t)$ 分别代表速度场和流体压力，阻尼项

中 $\beta>0$ 和 $\alpha>0$ 是两个常数，函数 $u_0=u_0(x)$ 为初速度。

首先根据[3]和[4]给出方程(1)弱解和强解的定义。

**定义 1.1** [3]设 $\alpha>0$， $\beta>0$， 如果对于 $\forall T>0$， 函数对 $\langle u(x,t),p(x,t)\rangle$ 满足下列条件

i) $u\in L^\infty\left(0,T;\mathrm{L}_\sigma^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;\mathrm{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)\right)$， $\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2\in L^1\left((0,T)\times\Omega\right)$；

ii) $u_t-\mu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\alpha\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u+\nabla p=0$ 在 $D'(0,T;\Omega)$ 成立，$u$满足方程

$$-\int_0^T\langle u,\varphi_t\rangle+\mu\int_0^T\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle-\int_0^T\langle(u\cdot\nabla)u,\varphi\rangle+\alpha\int_0^T\left\langle\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u,\varphi\right\rangle=\langle u_0,\varphi(0)\rangle,$$

iii) $\mathrm{div}u(x,t)=0$， a.e. $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$，

则称函数对 $\langle u(x,t),p(x,t)\rangle$ 是方程(1)的弱解，其中 $\varphi\in\mathrm{C}_{0,\sigma}^\infty(0,T;\Omega)$ 且 $\mathrm{div}\varphi(\cdot,T)=0$。

**定义 1.2** [4]如果函数对 $\langle u(x,t),p(x,t)\rangle$ 是方程(1)的弱解， $u_0\in\mathrm{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$，且满足

$$u\in L^\infty\left(0,T;\mathrm{H}^1(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;\dot{\mathrm{H}}^2(\Omega)\right),$$

$$\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2,\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2,\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2\in L^1\left((0,T)\times\Omega\right)$$

则称函数对 $\langle u(x,t),p(x,t)\rangle$ 是方程(1)的强解。

通过定义 1.1 可知，如果 $u\in L^\infty\left(0,T;\mathrm{L}_\sigma^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;\mathrm{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)\right)$ 是方程(1)在 $[0,T]$ 上的弱解，那么 $u$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u,v)+\mu((u,v))+b(u,u,v)+\left(\alpha\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u,v\right)=0,\ \ \forall v\in V,\forall t>0,\\ u(0)=u_0.\end{cases}\tag{2}$$

方程(2)等价于函数方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\mu Au+B(u)+G(u)=0,\ \forall t>0,\ \forall T>0,\\ u(0)=u_0.\end{cases}\tag{3}$$

其中 $Au=-\tilde{P}\Delta u$ 是 Stokes 算子， $\tilde{P}$ 是 $\left(L^2(\Omega)\right)^3$ 在 $H$ 上的正交投影，定义为 $\langle Au,v\rangle=((u,v))$，且 $F(u)=\alpha\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u$， $G(u)=\tilde{P}F(u)$。 $B:V\times V\to V'$ 是双线性算子，定义为 $\langle B(u,v),w\rangle=b(u,v,w)$， $B(u)=B(u,u)$，其中

$$b(u,v,w)=\sum_{i,j=1}^3\int_\Omega u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j\mathrm{d}x$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $V$ 与 $V'$ 的对偶积。

本文定义 $\mathbf{Z}=\mathrm{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)\cap\bigcup_{4\le p\le\infty}L^\infty\left(0,T;L^p(\Omega)\right)$，下面将给出本文的主要结论：

**定理 1.3** 假设 $\alpha>0$， $\beta>0$， $u_0\in\mathbf{Z}$，则方程(3)存在一个 $\left(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2\right)$ 整体吸引子，且在 $\mathrm{H}^2(\Omega)$ 中具有不变性和紧致性。

本文的结构如下：第二章将介绍本文所用到的基本符号和相关引理，第三章将给出多个命题的证明，为证明后文吸引子的整体存在性作铺垫，第四章将利用第三章的结论证明带有指数阻尼项 $\alpha\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u$ 的三维 Navier-Stokes 方程整体吸引子的存在性。

## 2. 基本符号和相关引理

本章将介绍本文所用到的基本符号和定义，以及已经证明过的相关定理和引理。

### 2.1. 基本符号

本节将介绍本文所用到的基本符号：

$\mathrm{C}_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ 表示全体 $C^{\infty}$ 实向量值函数的集合 $u=(u_1,u_2,u_3)$，并在 $\Omega$ 中具有紧支撑，使得 $\mathrm{div}u=0$。函数空间 $\mathrm{L}_{\sigma}^{p}(\Omega)$，$1<p<\infty$，定义为 $\mathrm{L}^{p}(\Omega)$ 中 $\mathrm{C}_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ 的闭包，其中 $\mathrm{L}^{p}(\Omega)=\left(L^{p}(\Omega)\right)^{3}$，赋范数为 $|\cdot|_p$。$\mathrm{W}_{0,\sigma}^{k,p}(\Omega)$ 为 $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$ 中 $\mathrm{C}_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ 的闭包，赋范数为 $\|\cdot\|_{k,p}$，当 $p=2$ 时，定义 $\mathrm{H}^{k}(\Omega)=\mathrm{W}^{k,2}(\Omega)$，$\mathrm{H}_{0,\sigma}^{k}(\Omega)=\mathrm{W}_{0,\sigma}^{k,2}(\Omega)$。$\mathrm{H}^{-k}(\Omega)$ 表示 $\mathrm{H}_{0,\sigma}^{k}(\Omega)$ 的对偶空间，$\dot{\mathrm{H}}^{2}(\Omega)$ 表示齐次 Sobolev 空间。

本文定义 $\mathcal{V}=\left\{u\in\left(C_0^{\infty}(\Omega)\right)^3:\mathrm{div}u=0\right\}$，$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别表示 $\mathcal{V}$ 在 $\left(L^2(\Omega)\right)^3$ 和 $\left(H_0^1(\Omega)\right)^3$ 下的闭包。显然，$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是可分的希尔伯特空间，$H'$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的对偶空间，存在连续嵌入 $\boldsymbol{V}\hookrightarrow\boldsymbol{H}\hookrightarrow V'$，且 $\boldsymbol{V}\hookrightarrow\boldsymbol{H}$ 是紧嵌入。$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 的内积表示为：

$$(u,v)=\int_{\Omega}u\cdot v\mathrm{d}x,\ \forall u,v\in\boldsymbol{H},\ \ ((u,v))=\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega}\nabla u_i\cdot\nabla v_i\mathrm{d}x,\ \forall u,v\in\boldsymbol{V},$$

并且范数表示为 $|\cdot|_2=(\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$，$\|\cdot\|=((\cdot,\cdot))^{\frac{1}{2}}$。因此，在本文中，$\boldsymbol{H}=\mathrm{L}_{\sigma}^{2}(\Omega)$，$\boldsymbol{V}=\mathrm{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$，$\mathbf{Z}=\boldsymbol{V}\cap\bigcup_{4\le p\le\infty}L^{\infty}\left(0,T;L^{p}(\Omega)\right)$。

由于 $\partial\Omega$ 是足够正则的，$D(A)=\left(\boldsymbol{H}^2(\Omega)\right)^3\cap\boldsymbol{V}$ 和 $|Aw|_2$ 在 $D(A)$ 中定义了一个范数，它等价于 $\left(\boldsymbol{H}^2(\Omega)\right)^3$ 中的范数，即存在一个仅依赖于 $\Omega$ 的常数 $c_1(\Omega)>0$，使得

$$\|w\|_{\left(\boldsymbol{H}^2(\Omega)\right)^3}\le c_1(\Omega)|Aw|_2,\quad \forall w\in D(A).$$

本文中的 $c$ 表示常数，$c$ 的值可能会随其依赖值的变化而变化。

### 2.2. 相关引理

在本节中，我们将根据[3]和[4]给出方程(1)的弱解和强解的存在性以及相关引理。

首先给出方程(1)弱解的存在性。

**引理 2.1** [3] 设 $\alpha>0$，$\beta>0$，$u_0\in\boldsymbol{H}$，对于给定的 $T>0$，方程(1)存在一个弱解 $u\in L^{\infty}\left(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega)\right)\cap C\left(0,T;\mathrm{H}^{-2}(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;\dot{\mathrm{H}}^1(\Omega)\right)\cap\mathcal{E}_{\beta}$，且对于任何 $t\ge0$ 有

$$\|u(t)\|_2^2+2\int_0^t\|\nabla u(z)\|_2^2\mathrm{d}z+2\alpha\int_0^t\left\|\left(\mathrm{e}^{\beta|z|^2}-1\right)|u(z)|^2\right\|_{L^1}\mathrm{d}z\le\|u_0\|_2^2.$$

其中 $\mathcal{E}_{\beta}=\left\{f:(0,T)\times\Omega\to\Omega;\left(\mathrm{e}^{\beta|f|^2}-1\right)|f|^2\in L^1\left((0,T)\times\Omega\right)\right\}$。

下面引理将介绍方程(1)强解的存在性和唯一性。

**引理 2.2** [4] 设 $\alpha>0$，$\beta>0$，$u_0\in\boldsymbol{V}$，则方程(1)存在唯一强解 $u\in L^{\infty}(0,T;\boldsymbol{V})\cap C\left(0,T;\mathrm{H}^{-2}(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;\dot{\mathrm{H}}^2(\Omega)\right)\cap\mathcal{H}_{\beta}$，且对于任何 $t\ge0$ 有

$$\|u(t)\|_2^2+2\int_0^t\|\nabla u\|_2^2+2\alpha\int_0^t\left\|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2\right\|_{L^1}\le\|u_0\|_2^2;$$

$$\|\nabla u(t)\|_2^2+\int_0^t\|\Delta u\|_2^2+\alpha\beta\int_0^t\left\|\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla\left(|u|^2\right)\right|^2\right\|_{L^1}+\alpha\int_0^t\left\|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2\right\|_{L^1}\le\|\nabla u_0\|_2^2\mathrm{e}^{\frac{t}{\alpha\beta^2}};$$

$$\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2+\int_0^t\left\|\Delta u\right\|_2^2+\alpha\beta\int_0^t\left\|\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla\left(|u|^2\right)\right|^2\right\|_{L^1}+\alpha\int_0^t\left\|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2\right\|_{L^1}\le M_{\alpha,\beta}\left(u_0\right),$$

其中 $M_{\alpha,\beta}\left(u_0\right)=\left\|\nabla u_0\right\|_2^2+\dfrac{\left\|u_0\right\|_2^2}{\alpha\beta^2}$，

$$\mathcal{H}_\beta=\left\{f:(0,T)\times\Omega\to\Omega;\left(\mathrm{e}^{\beta|f|^2}-1\right)|f|^2,\left(\mathrm{e}^{\beta|f|^2}-1\right)|\nabla f|^2,\mathrm{e}^{\beta|f|^2}\left|\nabla|f|^2\right|^2\in L^1\left((0,T)\times\Omega\right)\right\}.$$

下面将介绍方程(1)的高正则解及其存在性的证明。

**定义 2.3** 如果函数对 $\langle u(x,t),p(x,t)\rangle$ 是方程(1)的弱解，$u_0\in\mathbf{Z}$，且满足

$$u\in L^\infty\left(0,T;\boldsymbol{V}\right)\cap L^2\left(0,T;\dot{\mathrm{H}}^2(\Omega)\right),\ \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\in L^\infty\left(0,T;L^1(\Omega)\right),$$

则称函数对 $\langle u(x,t),p(x,t)\rangle$ 是方程(1)的高正则解。

**引理 2.4** 设 $\alpha>0$，$\beta>0$，$u_0\in\mathbf{Z}$，则对于 $\forall t\ge 0$，方程(1)存在整体强解：

$$u\in L^\infty\left(0,T;\boldsymbol{V}\right)\cap C\left(0,T;\mathrm{H}^{-2}(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;\dot{\mathrm{H}}^2(\Omega)\right)\cap\mathcal{H}_\beta,\ \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\in L^\infty\left(0,T;L^1(\Omega)\right),$$

满足

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le t\le T}\left(\|u\|^2+\int_\Omega\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\right)\mathrm{d}x\right)+\alpha\int_0^T\int_\Omega\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\frac{\alpha\beta}{2}\int_0^T\int_\Omega\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\left|u_t\right|_2^2\mathrm{d}t+\frac{\mu}{2}\int_0^T|\Delta u|_2^2\,\mathrm{d}t\le C.\end{aligned}$$

引理 2.5 将介绍方程(3)中 $F(u)$ 的性质，便于后续吸引子的研究。

**引理 2.5** 设 $F(u)=\alpha\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u$，则

1) 设 $\alpha>0$，$\beta>0$，$F$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中连续可微，对于 $\mathbb{R}^3$ 中 $u=\left(u_1,u_2,u_3\right)$ 的雅可比矩阵为：

$$F'(u)=\alpha\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left(1+2\beta u_1^2\right)-1 & 2\beta\mathrm{e}^{\beta|u|^2}u_1u_2 & 2\beta\mathrm{e}^{\beta|u|^2}u_1u_3\\ 2\beta\mathrm{e}^{\beta|u|^2}u_1u_2 & \mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left(1+2\beta u_2^2\right)-1 & 2\beta\mathrm{e}^{\beta|u|^2}u_2u_3\\ 2\beta\mathrm{e}^{\beta|u|^2}u_1u_3 & 2\beta\mathrm{e}^{\beta|u|^2}u_2u_3 & \mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left(1+2\beta u_3^2\right)-1\end{pmatrix}$$

进而 $F'(u)$ 是正定的，且对于任意 $u,v,w\in\mathbb{R}^3$ 有：

$$\left|\left(F'(u)v\right)\cdot w\right|\le c\mathrm{e}^{\beta|u|^2}|u|^2|v||w|,$$

其中，$c$ 是取决于 $\beta$ 和 $\alpha$ 的大于零的常数。

2) $F$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中单调，即对任意 $u,v\in\mathbb{R}^3$ 有：

$$\left(F(u)-F(v),u-v\right)\ge 0\quad [1].$$

## 3. 解的一致估计

本章将构建方程(3)解的一致估计($t\to\infty$)，共有 7 个命题证明，这些命题在第四节中证明吸引子的存在性是十分必要的。我们从 $\boldsymbol{H}$ 中的估计开始，在下面的命题中为便于估计，我们取 $\mu=1$。

**命题 3.1** 假设 $\alpha>0$，$\beta>0$，$u_0\in\mathbf{Z}$，则存在常数 $\rho_1$、$I_1$ 和 $I_2$，使得

$$\left|u(t)\right|_2 \le \rho_1,\ \forall t \ge 0;$$

$$\int_t^{t+1}\left\|u(s)\right\|^2 \mathrm{d}s \le I_1,\ \int_t^{t+1}\left|\left(\mathrm{e}^{\beta|u(s)|^2}-1\right)\left|u(s)\right|^2\right|_{L^1}\mathrm{d}s < I_2,\ \forall t \ge 0.$$

**证明：**将方程(1)与 $u$ 作内积可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_2^2 + 2\|u\|_2^2 + 2\alpha\int_\Omega\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2\,\mathrm{d}x = 0, \tag{4}$$

由 Poincare 不等式知，存在 $\lambda_1$，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|_2^2 + 2\lambda_1|u|_2^2 \le 0,$$

由 Gronwall 不等式，可得

$$|u|_2^2 \le |u_0|_2^2\,\mathrm{e}^{-2\lambda_1 t},\ \forall t \ge 0,$$

则有

$$|u|_2^2 \le |u_0|_2^2 \equiv \rho_1^2,\ \forall t \ge 0, \tag{5}$$

将(13)在 $t$ 到 $t+1$ 上积分得到

$$\left|u(t+1)\right|_2^2 + 2\int_t^{t+1}\|u\|^2\mathrm{d}s + 2\alpha\int_t^{t+1}\left|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2\right|_{L^1}\mathrm{d}s \le \left|u(t)\right|_2^2$$

则有

$$2\int_t^{t+1}\left\|u(s)\right\|^2\mathrm{d}s \le \left|u(t)\right|_2^2,$$

由(14)可知

$$\int_t^{t+1}\left\|u(s)\right\|^2\mathrm{d}s \le \frac{1}{2}\left|u(t)\right|_2^2 = \frac{1}{2}\rho_1^2 \le I_1,$$

同理可证

$$\int_t^{t+1}\left|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2\right|_{L^1}\mathrm{d}s \le I_2,$$

其中 $\rho_1$、$I_1$、$I_2$ 均为常数。证毕。

**命题 3.2** 假设 $\alpha > 0$，$\beta > 0$，$u_0 \in \mathbf{Z}$，则存在时间 $t_1$ 和 $t_2$，常数 $\rho_2$ 和 $\rho_3$ 使得

$$\left\|u(t)\right\| \le \rho_2,\ \forall t \ge t_1;$$

$$\int_\Omega\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2} - |u|^2\right)\mathrm{d}x \le \rho_3,\ \forall t \ge t_2.$$

**证明：**(1) 首先，由引理 2.4 可知对于任意 $\|u_0\|^2 \le M$，$\|u\|$ 都是一致有界的，即对于每一个 $T > 0$，都有

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{\|u_0\|\le M}\left\|u(t)\right\| \le K_T,$$

其中对于每一个 $T > 0$，$K_T$ 都是有限的。

因此，对于任意序列 $\{u_{0n}\}$ 和 $\{t_n\}$，其中 $u_{0n} \in \mathbf{Z}$，$\|u_{0n}\| \le M$ 和 $t_n \in [0,T]$，

$$\left\|S\left(t_n\right)u_{0n}\right\| \to \infty\left(n \to \infty\right), \tag{6}$$

是不存在的。为证明 **Z** 中吸收集的存在性，必须排除当 $T \to \infty$ 时，$K_T \to \infty$。也就是说，必须证明

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{\|u_0\|\le M}\left\|u\left(t\right)\right\| \le K_T < \infty,\ \forall T > 0,$$

成立。

由命题 3.1 可知

$$\int_t^{t+1}\left\|u\left(s\right)\right\|^2 \mathrm{d}s \le I_1,\ \forall t \ge 0,$$

现在考虑 $\left[t,t+1\right]$ 中所有关于 $s$ 的集合，其中 $\left\|u\left(s\right)\right\|^2 > 2I_1$，并且设 $\sigma$ 为这个集合的测度，则有

$$2I_1\sigma \le \int_t^{t+1}\left\|u\left(s\right)\right\|^2 \mathrm{d}s \le I_1,$$

因此可得 $\sigma \le \frac{1}{2}$，那么在任意区间 $\left[t,t+1\right]$ 中，当点的测度 $\sigma > \frac{1}{2}$ 时，有

$$\left\|u\left(s\right)\right\|^2 \le 2I_1, \tag{7}$$

特别地，在区间 $\left[t,t+1\right]$ 中至少存在一个点使得(16)成立。

设 $\sigma = \sqrt{2I_1}$，我们将证明

$$\sup_{t\ge0}\sup_{\|u_0\|\le\sigma}\left\|u\left(t\right)\right\| < \infty,$$

成立。反之，存在一个序列 $t_n \to \infty$ 和指数 $u_{0n}$ 且 $\left\|u_{0n}\right\| \le \sigma$，使得

$$\left\|S\left(t_n\right)u_{0n}\right\| \to \infty\left(n \to \infty\right). \tag{8}$$

现在考虑区间 $\left[t_n-1,t_n\right]$，已知一定存在一个 $s_n \in \left[t_n-1,t_n\right]$，使得

$$\left\|u_n\left(s_n\right)\right\| \le \sigma,$$

现在引入一个关于时间的平移解 $v_n\left(t\right) = u_n\left(t+s_n\right)$，其中 $v_n\left(t\right)$ 是三维方程的解，且有 $v_n\left(0\right) = v_{0n}$，且 $\left\|v_{0n}\right\| \le \sigma$，由(17)可知存在 $a_n = t_n - s_n < 1$ 使得

$$\left\|v_n\left(a_n\right)\right\| \to \infty\text{，即}\left\|S\left(a_n\right)v_{0n}\right\| \to \infty.$$

但是，由(15)知这种情况是不可能出现的。

综上所述，存在一个时间 $s$，$s \in \left[0,1\right]$，使得

$$u\left(s\right) \le \sigma,$$

则一定存在某个 $\rho_2$ 使得

$$u\left(t\right) \le \rho_2,$$

因此，当 $t_1 \ge 0$ 时，则有

$$\left\|u\left(t\right)\right\| \le \rho_2,\ \forall t \ge t_1,$$

即 **Z** 中存在吸收集。

(2) 由命题 3.1 知

$$\int_t^{t+1}\left|\left(e^{\beta|u(s)|^2}-1\right)|u(s)|^2\right|_{L^1}ds=\int_t^{t+1}\int_\Omega\left(e^{\beta|u|^2}-1\right)|u|^2dxds\le\int_t^{t+1}\left(\int_\Omega|u|^2e^{\beta|u|^2}dx-\int_\Omega|u|^2dx\right)ds\le I_2,$$

因此有

$$\int_t^{t+1}\int_\Omega|u|^2e^{\beta|u|^2}dxds\le I_2+\int_t^{t+1}\int_\Omega|u|^2dxds\le C,$$

从而有

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1}\int_\Omega|u|^2e^{\beta|u|^2}dxds&\le\int_t^{t+1}\left(\int_\Omega|u|^6dx\right)^{\frac13}\left(\int_\Omega e^{\frac32\beta|u|^2}dx\right)^{\frac23}ds\\&\le\int_t^{t+1}|u|_6^2\left(\int_\Omega e^{\frac32\beta|u|^2}dx\right)^{\frac23}ds\le\int_t^{t+1}\|u\|^2\left(\int_\Omega e^{\frac32\beta|u|^2}dx\right)^{\frac23}ds\\&\le\rho_2^2\int_t^{t+1}\left(\int_\Omega e^{\frac32\beta|u|^2}dx\right)^{\frac23}ds\le c\rho_2^2\int_t^{t+1}\int_\Omega e^{\frac32\beta|u|^2}dxds\le C,\end{aligned}$$

由(1)同理可得

$$\int_\Omega e^{\beta|u|^2}dx\le c,$$

因此存在时间 $t_2\ge t_1$，使得

$$\int_\Omega\left(\frac1\beta e^{\beta|u|^2}-|u|^2\right)dx\le\int_\Omega\frac1\beta e^{\beta|u|^2}dx-\int_\Omega|u|^2dx\le\rho_3,\ \forall t\ge t_2.$$

证毕。

**命题 3.3** 假设 $\alpha>0$，$\beta>0$，$u_0\in\mathbf{Z}$，则存在时间 $t_3$ 和常数 $I_3$ 使得

$$\int_t^{t+1}|\Delta u|_2^2ds\le I_3,\ \forall t\ge t_3.$$

**证明：** 将方程(1)与 $-\Delta u$ 作内积可得

$$\begin{aligned}&\frac12\frac{d}{dt}\|u\|^2+|\Delta u|_2^2+\frac{\alpha\beta}{2}\int_\Omega e^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2dx+\alpha\int_\Omega\left(e^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2dx\\&=\int_\Omega(u\cdot\nabla)u\cdot\Delta u dx\le\int_\Omega|u||\nabla u||\Delta u|dx\\&\le\left(\int_\Omega|u|^2|\nabla u|^2dx\right)^{\frac12}\cdot\left(\int_\Omega|\Delta u|^2dx\right)^{\frac12}\\&\le\frac12\int_\Omega|u|^2|\nabla u|^2dx+\frac12\int_\Omega|\Delta u|^2dx,\end{aligned}$$

整理得

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2+|\Delta u|_2^2+\alpha\beta\int_\Omega e^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2dx+2\alpha\int_\Omega\left(e^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2dx\le\int_\Omega|u|^2|\nabla u|^2dx \tag{9}$$

由初等不等式可知

$$\alpha\left(e^{\beta|u|^2}-1\right)\ge\frac{\alpha\beta^2|u|^4}{2!},$$

则有

$$|u|^2=\frac{\sqrt{\alpha}\beta|u|^2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}\beta}\le\frac{\alpha\beta^2|u|^4}{2}+\frac{1}{\alpha\beta^2},$$

代入(18)中整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+|\Delta u|_2^2+\alpha\beta\int_\Omega \mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x+\alpha\int_\Omega\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\le\frac{2}{\alpha\beta^2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

将上式在 $t$ 到 $t+1$ 上积分可得

$$\|u(t+1)\|^2+\int_t^{t+1}|\Delta u|_2^2\mathrm{d}t+\alpha\beta\int_t^{t+1}\left|\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\left|\nabla|u|^2\right|^2\right|_{L^1}\mathrm{d}t+\alpha\int_t^{t+1}\left[\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)|\nabla u|^2\right]\mathrm{d}t\le\frac{2}{\alpha\beta^2}\int_t^{t+1}\|u\|^2\mathrm{d}t+\|u(t)\|^2.$$

由命题 3.2 可知一定存在一个时间 $t_3=\max\{t_1,t_2\}$，使得当 $t\ge t_3$ 时，

$$\|u(t)\|^2\le\rho_2^2,\int_t^{t+1}\|u(s)\|^2\mathrm{d}s\le I_1,$$

因此

$$\int_t^{t+1}|\Delta u|_2^2\mathrm{d}t\le I_3,\ \forall t\ge t_3,$$

其中 $I_3$ 是一个常量。

**命题 3.4** 假设 $\alpha>0$， $\beta>0$， $u_0\in\mathbf{Z}$，则存在时间 $t_4$ 和常数 $\rho_4$ 使得

$$|u_t(s)|_2\le\rho_4,\ \forall s\ge t_4.$$

**证明：**将方程(1)与 $u_t$ 作内积可得

$$|u_t|_2^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-u^2\right)=-\int_\Omega(u\cdot\nabla)u\cdot u_t\mathrm{d}x\le c\int_\Omega|u\cdot\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|u_t|^2\mathrm{d}x$$

整理得

$$\begin{aligned}&|u_t|_2^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\right)\mathrm{d}x\\&\le 2c\int_\Omega|u\cdot\nabla u|^2\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}|\Delta u|_2^2+C|u|_6^6\le\frac{1}{2}|\Delta u|_2^2+C\int_\Omega\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\right),\end{aligned}$$

将上式在 $t$ 到 $t+1$ 上积分可得

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+1}|u_t|_2^2\mathrm{d}s+u(t+1)^2+\alpha\int_\Omega\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u(t+1)|^2}-|u(t+1)|^2\right)\mathrm{d}x\\&\le\frac{1}{2}\int_t^{t+1}|\Delta u|_2^2\mathrm{d}s+C\int_t^{t+1}\int_\Omega\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-|u|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\|u(t)\|^2+\alpha\int_\Omega\left(\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta|u(t)|^2}-|u(t)|^2\right)\mathrm{d}x\\&\le c(I_3,\rho_3,\rho_2),\end{aligned}$$

再将方程(1)先对 $t$ 求微分，再与 $u_t$ 作内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_t|_2^2+\|u_t\|^2+\langle(u_t\cdot\nabla)u,u_t\rangle+\langle(u\cdot\nabla)u_t,u_t\rangle+\langle F'(u)u_t,u_t\rangle=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_t|_2^2+\|u_t\|^2\le|\langle(u_t\cdot\nabla)u,u_t\rangle|-\int_\Omega(F'(u)u_t)u_t\mathrm{d}x,$$

由引理 2.5 知$\left(F'(u)u_t\right)\cdot u_t$是正定的，因此有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_t|_2^2+\|u_t\|^2\le\left|\left\langle\left(u_t\cdot\nabla\right)u,u_t\right\rangle\right|\le c\|u\|^{\frac{3}{2}}|u_t|^{\frac{1}{2}}\|u\|\le\frac{1}{2}\|u_t\|^2+c|u_t|_2^2\|u\|^4, \tag{10}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_t|_2^2+\|u_t\|^2\le c|u_t|_2^2\|u\|^4,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_t|_2^2\le c\rho_2^4|u_t|_2^2,$$

将上式先在 $s$ 到 $t+1$ 上积分，其中 $t<s<t+1$，可得

$$|u_t(t+1)|_2^2\le|u_t(s)|_2^2+c\rho_2^4\int_s^{t+1}|u_t(\tau)|_2^2\,\mathrm{d}\tau,$$

再对 $s$ 在 $t$ 到 $t+1$ 上积分，有

$$\begin{aligned}|u_t(t+1)|_2^2&\le\int_t^{t+1}|u_t(s)|_2^2\,\mathrm{d}s+c\rho_2^4\int_t^{t+1}|u_t(\tau)|_2^2\,\mathrm{d}\tau\le\left(1+c\rho_2^4\right)\int_t^{t+1}|u_t(s)|_2^2\,\mathrm{d}s\\&\le\left(1+c\rho_2^4\right)\le c\left(I_3,\rho_3,\rho_2\right)\equiv\rho_2^3,\ \forall s\ge t_4.\end{aligned}$$

证毕。

**命题 3.5** 假设 $\alpha>0$， $\beta>0$， $u_0\in\mathbf{Z}$，则存在常数 $\rho_5$ 使得

$$|Au(t)|_2\le\rho_5,\ t\ge t_4.$$

**证明：**对方程(3)使用 Minkowski 不等式可得

$$|Au|_2\le|u_t|_2+|B(u)|_2+\alpha\left|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u\right|_2, \tag{11}$$

当 $u\in\mathbf{Z}$， $v\in D(A)$ 和 $w\in\boldsymbol{H}$ 时，有

$$|b(u,v,w)|=\int_\Omega|(u\cdot\nabla)v\cdot w|\,\mathrm{d}x\le\int_\Omega|u||\nabla v||w|\,\mathrm{d}x\le c|u|_6|\nabla v|_2^{\frac{1}{2}}|Av|_2^{\frac{1}{2}}|w|_2\le c\|u\|\|v\|_?^{\frac{1}{2}}|Av|_2^{\frac{1}{2}}|w|_2,$$

显然，如果 $u\in D(A)$，则有 $B(u)\in\boldsymbol{H}$，且

$$|B(u)|_2^2=\left\langle(u\cdot\nabla)u,(u\cdot\nabla)u\right\rangle\le c\|u\|\|u\|^{\frac{1}{2}}|Au|_2^{\frac{1}{2}}|(u\cdot\nabla)u|_2,$$

整理得

$$|B(u)|_2\le c\|u\|^{\frac{3}{2}}|Au|_2^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{2}|Au|_2+c\|u\|^3, \tag{12}$$

又因

$$\begin{aligned}\alpha\left|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u\right|_2^2&=\alpha\int_\Omega\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)^2|u|^2\,\mathrm{d}x=\alpha\int_\Omega\mathrm{e}^{2\beta|u|^2}|u|^2\,\mathrm{d}x-2\alpha\int_\Omega\mathrm{e}^{\beta|u|^2}|u|^2\,\mathrm{d}x+\alpha\int_\Omega|u|^2\,\mathrm{d}x\\&\le\alpha\left(\int_\Omega\mathrm{e}^{4\beta|u|^2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|u|^4\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}-2\alpha\left(\int_\Omega\mathrm{e}^{2\beta|u|^2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|u|^4\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\alpha\int_\Omega|u|^2\,\mathrm{d}x\le\alpha\left(c,\rho_1\right),\end{aligned} \tag{13}$$

将(21)、(22)代入到(20)中可得

$$|Au|_2\le2|u_t|_2+c\|u\|^3+c\le2\rho_4+c\rho_2^3+c\equiv\rho_5,\ t\ge t_4,$$

证毕。

**命题 3.6** 假设 $\alpha>0$， $\beta>0$， $u_0\in\mathbf{Z}$，则存在时间 $t_5$、常数 $I_4$ 和 $\rho_6$ 使得

$$\int_t^{t+1}\|u_t(s)\|^2\,\mathrm{d}s \le I_4,\ t \ge t_4;$$

$$\|u\| \le \rho_6,\ t \ge t_5.$$

**证明：**由(19)可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_t|_2^2 + \|u_t\|^2 \le c|u_t|_2^2\|u\|^4,$$

将上式在 $t$ 到 $t+1$ 上积分，并根据命题 3.4 可知存在一个常数 $I_4$ 使得

$$\int_t^{t+1}\|u_t\|^2\,\mathrm{d}s \le c\int_t^{t+1}|u_t|_2^2\|u\|^4\,\mathrm{d}s + |u_t(t)|_2^2 \le c(\rho_2,\rho_4) \equiv I_4,\ t \ge t_4, \tag{14}$$

根据命题 3.5 可知

$$\|u(t)\|_{D(A)} \le \rho_5,\ \forall t \ge t_4,$$

使用 Agmon’s 不等式可知

$$\|u(t)\|_\infty \le c,\ \forall t \ge t_4.$$

现将方程(3)$_1$ 先对 $t$ 求微分，再与 $Au_t$ 作内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t\|^2 + |Au_t|_2^2 \le |b(u_t,u,Au_t)| + |b(u,u_t,Au_t)| + \int_\Omega (F'(u)u_t)\cdot Au_t\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

并通过引理 2.5 存在以下估计：

$$\begin{aligned}\int_\Omega (F'(u)u_t)\cdot Au_t\,\mathrm{d}x &\le c\int_\Omega \mathrm{e}^{\beta|u|^2}|u|^2|u_t||Au_t|\,\mathrm{d}x \le \|u\|_{L^\infty}^2|Au_t|_2\|u_t\|_{L^4}\left\|\mathrm{e}^{\beta|u|^2}\right\|_{L^4}\\ &\le c|Au_t|_{L^2}\|u_t\| \le c\|u_t\|^2 + \frac{1}{4}|Au_t|_2^2,\end{aligned} \tag{16}$$

以及

$$\begin{aligned}|b(u_t,u,Au_t)| &\le c\|u_t\|\|u\|^{\frac{1}{2}}|Au|_2^{\frac{1}{2}}|Au_t|_2 \le \frac{1}{4}|Au_t|_2^2 + c\|u_t\|^2\|u\||Au|_2\\ &\le \frac{1}{4}|Au_t|_2^2 + c\|u_t\|^2,\ \forall t \ge t_4,\end{aligned} \tag{17}$$

$$|b(u,u_t,Au_t)| \le c\|u\|\|u_t\|^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{4}|Au_t|_2^2 + c\|u\|^4\|u_t\|^2 \le \frac{1}{4}|Au_t|_2^2 + c\|u_t\|^2,\ \forall t \ge t_4, \tag{18}$$

将(25)、(26)和(27)代入到(24)中可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t\|^2 \le c\|u_t\|^2,$$

再将(23)使用 Gronwall 不等式得：

$$\|u_t\|^2 \le \rho_6^2,\ \forall t \ge t_5 = t_4 + 1,$$

证毕。

**命题 3.7** $S(t):\mathbf{Z}\mapsto\mathbf{Z}$ 是 $t \ge 0$ 时 $\mathbf{Z}$ 上的一个 Lipschitz 连续映射。

**证明：**假设 $u$、$v$ 分别是 $\mathbf{Z}$ 中初值为 $u_0$、$v_0$ 的两个解，设 $w = u - v$，且 $w_0 = u_0 - v_0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + Aw = -B(u) + B(v) - \tilde{P}F(u) + \tilde{P}F(v), \tag{19}$$

将(28)和 $Aw$ 做内积可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|^2+|Aw|_2^2&=-b(u,u,Aw)+b(v,v,Aw)-\langle F(u)-F(v),Aw\rangle\\&\le b(w,Aw,u)+b(v,Aw,w)-\langle F(u)-F(v),Aw\rangle\\&\le c\|w\|\|u\|^{\frac{1}{2}}|Au|_2^{\frac{1}{2}}|Aw|_2+c\|v\|\|w\|^{\frac{1}{2}}|Aw|_2^{\frac{3}{2}}+|F(u)-F(v)|_2|Aw|_2\\&\le\frac{3}{4}|Aw|_2^2+c\|w\|^2\left(\|u\||Au|_2+\|v\|^4\right)+c|F(u)-F(v)|_2^2,\end{aligned}\tag{20}$$

因为

$$\begin{aligned}|F(u)-F(v)|_2^2&=\alpha\int_\Omega\left|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)u-\left(\mathrm{e}^{\beta|v|^2}-1\right)v\right|^2\mathrm{d}x\\&\le c\int_\Omega\left|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)w\right|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\left|\left[\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)-\left(\mathrm{e}^{\beta|v|^2}-1\right)\right]v\right|^2\mathrm{d}x\\&\le c\int_\Omega\left|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)w\right|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\left|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-\mathrm{e}^{\beta|v|^2}\right)v\right|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由中值定理知

$$\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-\mathrm{e}^{\beta|v|^2}=2\beta\mathrm{e}^{\beta[(1-\theta)u+\theta y]^2}|(1-\theta)u+\theta y|\cdot|u-v|\le2\beta\mathrm{e}^{\beta\left(u^2+v^2\right)}|u+v|\cdot|u-v|,$$

其中 $\theta\in(0,1)$，因此有

$$\begin{aligned}|F(u)-F(v)|_2^2&\le c\int_\Omega\left|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)w\right|^2\mathrm{d}x+c\int_\Omega\left|\mathrm{e}^{2\beta\left(u^2+v^2\right)}|u+v|wv\right|^2\mathrm{d}x\\&\le c\left|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)\right|_3^2|w|_6^2+c\left|\mathrm{e}^{4\beta\left(u^2+v^2\right)}\right|_3|u|_{12}^4|w|_6^2+c\left|\mathrm{e}^{4\beta\left(u^2+v^2\right)}\right|_3|v|_{12}^4|w|_6^2\\&\le c\left|\left(\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)\right|_3^2\|w\|^2+c\|w\|^2.\end{aligned}\tag{21}$$

将(30)代入(29)中可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|^2\le c\|w\|^2\left[\|u\||Au|_2+\|v\|^4+\left|\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right|_3^2+1\right],$$

使用 Gronwall 不等式得

$$\|w\|^2\le\|w_0\|^2\mathrm{e}^{c\int_0^t\left[\|u\||Au|_2+\|v\|^4+\left|\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right|_3^2+1\right]\mathrm{d}x},$$

其中

$$\left(\left|\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right|_3^2\right)^{\frac{3}{2}}=\int_\Omega\left|\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right|^3\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\mathrm{e}^{3\beta|u|^2}-3\mathrm{e}^{2\beta|u|^2}+3\mathrm{e}^{\beta|u|^2}-1\right)\mathrm{d}x\le c,$$

整理得

$$\|w\|^2\le\|w_0\|^2c(\rho_2,\rho_4,c).$$

证毕。

## 4. 整体吸引子

在本节中，我们证明$\{S(t)\}_{t\ge0}$整体吸引子的存在性。首先回顾一下整体吸引子的概念。

**定义 4.1** 设$\mathcal{A}$是$\mathrm{H}^2(\Omega)$的子集，如果满足以下条件，则称$\mathcal{A}$为$(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2)$整体吸引子：

1) $\mathcal{A}$在$\mathrm{H}^2(\Omega)$中紧致；

2) $\mathcal{A}$是不变的，即$S(t)\mathcal{A}=\mathcal{A}$，$\forall t\ge0$；

3) $\mathcal{A}$相对于$\mathrm{H}^2(\Omega)$的范数吸引$\mathbf{Z}$的每个有界子集，即如果$B$在$\mathbf{Z}$中有界，则有

$$dist_{\mathrm{H}^2}\left(S(t)B,\mathcal{A}\right)\to0,\ t\to\infty.$$

下面的命题给出了证明$\mathrm{H}^2(\Omega)$中整体吸引子的存在性的必要条件。

**命题 4.2** 设$\mathcal{A}$是$\{S(t)\}_{t\ge0}$的$(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$整体吸引子，则$\mathcal{A}$也是$(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2)$整体吸引子，当且仅当：

1) $\{S(t)\}_{t\ge0}$有一个有界的$(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2)$吸引集；

2) $\{S(t)\}_{t\ge0}$是$(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2)$渐近紧致的。

在接下来的内容中，我们首先证明$\{S(t)\}_{t\ge0}$有一个$(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$整体吸引子，然后通过命题 4.2 证明这个吸引子是$(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2)$整体吸引子。

我们定义

$$B_1=\{u\in\mathbf{Z}:\|u\|\le\rho_2\},\quad B_2=\{u\in D(A):|Au|_2\le\rho_5\},$$

由命题 3.2 和命题 3.5 可知，$B_1$和$B_2$分别是$\{S(t)\}_{t\ge0}$的有界$(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$和$(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2)$吸引集。

通过嵌入$D(A)\hookrightarrow\boldsymbol{V}$和命题 3.5 的紧致性，我们发现$\{S(t)\}_{t\ge0}$是$(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$渐近紧致的。因此，根据标准吸引子理论([12])，$\{S(t)\}_{t\ge0}$有一个$(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$整体吸引子$\mathcal{A}$。

下面将证明$\mathcal{A}$是$(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2)$整体吸引子，即证明$\{S(t)\}_{t\ge0}$是$(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2)$渐近紧致的。

**引理 4.3** 假设$\alpha>0$，$\beta>0$，$u_0\in\mathbf{Z}$，则$\{S(t)\}_{t\ge0}$是$(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2)$渐近紧致的。

**证明：** 设$\{u_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$在$\mathbf{Z}$中有界，且$t_n\to\infty$。我们要证明$\{S(t_n)u_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$在$\mathrm{H}^2(\Omega)$中有收敛子序列。定义

$$u_n(t)=S(t)u_{0n},\ w_n(t_n)=\left.\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_n},$$

通过公式(3)有：

$$\mu Au_n(t_n)=-w_n(t_n)-B(u_n(t_n))-G(u_n(t_n)),$$

并且根据命题 3.5 和 3.6，存在$T>0$使得对于所有$t\ge T$有

$$\left\|\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t)\right\|\le\rho_6,\tag{22}$$

$$|Au_n(t)|_2\le\rho_5,\ \forall n=1,2,\cdots,$$

其中$\rho_5$和$\rho_6$分别是命题 3.5 和 3.6 中的常数。由于$t_n\to\infty$，存在$N>0$使得对于所有$n\ge N$，都有$t_n\ge T$。因此，通过(31)有，对于所有$n\ge N$

$$\|w_n(t_n)\|\le\rho_6\text{ 且 }|Au_n(t)|_2\le\rho_5，\quad\forall n=1,2,\cdots\tag{23}$$

通过紧致嵌入$\mathbf{Z}\hookrightarrow\boldsymbol{H}$和$D(A)\hookrightarrow\mathbf{Z}$，我们从(32)中发现存在$w\in\mathbf{Z}$和$v\in D(A)$使得子序列

$$w_n(t_n) \to w \text{ 在 } \boldsymbol{H} \text{ 中强收敛，} \tag{24}$$

$$u_n(t_n) \to v \text{ 在 } \mathbf{Z} \text{ 中强收敛。} \tag{25}$$

通过公式(31)和 Agmon 不等式有

$$\|u_n(t_n)\|_\infty \le c\text{，}\quad \forall n \ge N\text{.}$$

因此，通过(34)可以得到

$$\begin{aligned}
&\left|G(u_n(t_n)) - G(v)\right|_2^2 = \left|F(u_n(t_n)) - F(v)\right|_2^2 \\
&= \int_\Omega \left|\left(e^{\beta|u_n(t_n)|^2} - 1\right)u_n(t_n) - \left(e^{\beta|v|^2} - 1\right)v\right|^2 dx \\
&= \int_\Omega \left|\left(e^{\beta|u_n(t_n)|^2} - 1\right)u_n(t_n) - \left(e^{\beta|u_n(t_n)|^2} - 1\right)v + \left(e^{\beta|u_n(t_n)|^2} - 1\right)v - \left(e^{\beta|v|^2} - 1\right)v\right|^2 dx \\
&= \int_\Omega \left|\left(e^{\beta|u_n(t_n)|^2} - 1\right)(u_n(t_n) - v) + \left[\left(e^{\beta|u_n(t_n)|^2} - 1\right) - \left(e^{\beta|v|^2} - 1\right)\right] \cdot v\right|^2 dx \\
&\le \int_\Omega \left|\left(e^{\beta|u_n(t_n)|^2} - 1\right)(u_n(t_n) - v) + 2\beta e^{2\beta\left[(u_n(t_n))^2 + v^2\right]}\left|u_n(t_n) + v\right| \cdot \left|u_n(t_n) - v\right| \cdot v\right|^2 dx \\
&\le \int_\Omega \left(e^{\beta|u_n(t_n)|^2} - 1\right)^2 (u_n(t_n) - v)^2 dx + c\int_\Omega \left|e^{2\beta\left[(u_n(t_n))^2 + v^2\right]} \cdot \left|u_n(t_n) + v\right| \cdot \left|u_n(t_n) - v\right| \cdot v\right|^2 dx \\
&\le c\left|e^{\beta|u_n(t_n)|^2} - 1\right|_3^2 \left|u_n(t_n) - v\right|_6^2 + c\left|e^{4\beta\left[(u_n(t_n))^2 + v^2\right]}\right|_3 |v|_{12}^4 \left|u_n(t_n) - v\right|_6^2 \\
&\quad + c\left|e^{4\beta\left[(u_n(t_n))^2 + v^2\right]}\right|_3 \left|u_n(t_n)\right|_{12}^4 \left|u_n(t_n) - v\right|_6^2 \\
&\le c\left|e^{\beta|u_n(t_n)|^2} - 1\right|_3^2 \left\|u_n(t_n) - v\right\|^2 + c\left\|u_n(t_n) - v\right\|^2 \le c\left\|u_n(t_n) - v\right\|^2 \to 0,
\end{aligned}$$

从而得知

$$G(u_n(t_n)) \to G(v) \text{ 在 } \boldsymbol{H} \text{ 中强收敛。} \tag{26}$$

又因

$$|b(u,v,w)| \le c\|u\|\|v\|^{\frac{1}{2}} |Av|_2^{\frac{1}{2}} |w|_2\text{，}\quad \forall u \in \mathbf{Z}\text{，}\quad v \in D(A)\text{，}\quad w \in \boldsymbol{H}\text{，}$$

所以，

$$|B(u,v)|_2 \le c\|u\|\|v\|^{\frac{1}{2}} |Av|_2^{\frac{1}{2}},$$

因此，

$$\begin{aligned}
\left|B(u_n(t_n)) - B(v)\right|_2^2 &= \int_\Omega \left[B(u_n(t_n), u_n(t_n) - v) + B(u_n(t_n) - v, v)\right]^2 dx \\
&\le 2\left(\left|B(u_n(t_n), u_n(t_n) - v)\right|_2^2 + \left|B(u_n(t_n) - v, v)\right|_2^2\right) \\
&\le c\left(\|u_n(t_n)\|^2 \|u_n(t_n) - v\| \left|A(u_n(t_n) - v)\right|_2 + \|u_n(t_n) - v\|^2 \|v\| |Au|_2\right) \to 0
\end{aligned}$$

从而得知

$$B\left(u_n\left(t_n\right)\right)\to B\left(v\right)\text{ 在 }\boldsymbol{H}\text{ 中强收敛。} \tag{27}$$

通过(33)、(35)和(36)得

当 $n\to\infty$ 时，$\mu Au_n\left(t_n\right)\to -w-B\left(v\right)-G\left(v\right)$ 在 $\boldsymbol{H}$ 中强收敛，这直接表明 $\left\{u_n\left(t_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathrm{H}^2\left(\Omega\right)$ 中收敛于 $\frac{1}{\mu}A^{-1}\left(-w-B\left(v\right)-G\left(v\right)\right)$。

下面利用上文得到的结论给出定理1.3的证明。

**定理 1.3 的证明：**由上文得知 $\left\{S\left(t\right)\right\}_{t\geq 0}$ 有一个 $\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}\right)$ 整体吸引子 $\mathcal{A}$。通过命题 3.5 得知，有界集合 $B_2=\left\{u\in D\left(A\right):\left|Au\right|_2\leq\rho_4\right\}$ 是 $\left\{S\left(t\right)\right\}_{t\geq 0}$ 的有界 $\left(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2\right)$ 吸引集。此外，引理 4.3 表明 $\left\{S\left(t\right)\right\}_{t\geq 0}$ 是 $\left(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2\right)$ 渐近紧致的。因此，由命题 4.2 可知，$\mathcal{A}$ 实际上是 $\left\{S\left(t\right)\right\}_{t\geq 0}$ 的 $\left(\mathbf{Z},\mathrm{H}^2\right)$ 整体吸引子。

## 参考文献


[1] Leray, J. (1934) Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Mathematica*, **63**, 193-248. https://doi.org/10.1007/bf02547354

[2] Hopf, E. (1950) Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Erhard Schmidt zu seinem 75. Geburtstag gewidmet. *Mathematische Nachrichten*, **4**, 213-231. https://doi.org/10.1002/mana.3210040121

[3] Fujita, H. and Kato, T. (1964) On the Navier-Stokes Initial Value Problem. I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 269-315. https://doi.org/10.1007/bf00276188

[4] Cai, X. and Jiu, Q. (2008) Weak and Strong Solutions for the Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **343**, 799-809. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.041

[5] Benameur, J. (2021) Global Solution of 3D Navier-Stokes Equations with Exponential Damping.

[6] Benameur, J. and Ltifi, M. (2021) Strong Solution of 3D-NSE with Exponential Damping.

[7] Ladyzhenskaya, O. (1991) Attractors for Semigroups and Evolution Equations. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511569418

[8] Babin, A.V. and Vishik, M.I. (1992) Attractors of Evolution Equations. Studies in Mathematics and Its Applications, Vol. 25, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

[9] Rosa, R. (1998) The Global Attractor for the 2D Navier-Stokes Flow on Some Unbounded Domains. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **32**, 71-85. https://doi.org/10.1016/s0362-546x(97)00453-7

[10] Feireisl, E. (2000) Global Attractors for the Navier-Stokes Equations of Three-Dimensional Compressible Flow. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, **331**, 35-39. https://doi.org/10.1016/s0764-4442(00)00511-5

[11] Song, X. and Hou, Y. (2011) Attractors for the Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Discrete & Continuous Dynamical Systems A*, **31**, 239-252. https://doi.org/10.3934/dcds.2011.31.239

[12] Temam, R. (1997) Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. 2nd Edition, Applied Mathematical Sciences, Vol. 68, Springer-Verlag, New York.