

一种新的积分值型MQ拟插值算子

常 雪, 彭兴璇*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2024年8月10日; 录用日期: 2024年9月2日; 发布日期: 2024年9月12日

摘 要

Multiquadric (MQ)函数作为径向基函数的一种,其作为核函数可逼近任何光滑函数,被广泛应用在拟插值的研究中,现有的MQ拟插值大部分都是以离散函数值为已知条件,而在实际应用中,积分值作为已知条件也比较常见,为了让MQ拟插值得到更广泛的应用,本文提出了一种新的基于积分值的MQ拟插值算子。首先利用连续区间上积分值的线性组合来对节点处的导数值进行逼近,然后根据已有的MQ拟插值进一步得到新的积分值型MQ拟插值算子,并给出了误差估计。最后通过数值实验展示了本文构造的积分值型MQ拟插值算子的逼近效果,说明了该方法的可行性和有效性。

关键词

Multiquadric函数, 积分值, 拟插值, 误差估计

A New Integral-Valued MQ Quasi-Interpolation Operator

Xue Chang, Xingxuan Peng*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Aug. 10th, 2024; accepted: Sep. 2nd, 2024; published: Sep. 12th, 2024

Abstract

As a kind of radial basis function, Multiquadric (MQ) function, as a kernel function, can approximate any smooth function, and is widely used in the research of quasi-interpolation. Most of the existing MQ quasi-interpolation is based on the known condition of the discrete function value, and in practical applications, the integral value is also a common-known condition. In order to make MQ quasi-interpolation more widely used, a new MQ quasi-interpolation operator based on integral value is proposed in this paper. First, the derivative value at the node is approximated by the linear combination

*通讯作者。

of integral values on the continuous interval, and then a new integral value MQ quasi-interpolation operator is obtained according to the existing MQ quasi-interpolation, and the error estimate is given. Finally, the approximation effect of the integral-valued MQ quasi-interpolation operator constructed in this paper is demonstrated by numerical experiments, and the feasibility and effectiveness of the proposed method are demonstrated.

Keywords

Multiquadric Function, Integral Value, Quasi-Interpolation, Error Estimation

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在实际情况中, 函数在离散点处的函数值并不是已知的, 而是以在连续等距区间上的积分值作为已知条件, 这就需要依据积分值来求逼近函数, 在力学、数理统计等方面有广泛的应用。现有对于已知积分值来对函数进行重构的方法是利用样条函数, 因为样条函数空间具有是分片多项式空间等优点, 所以它作为逼近空间受到很多学者的青睐, Behforooz [1]最先以积分值作为已知条件来构造三次样条插值函数, 接着 Behforooz [2]还研究了关于积分值的五次样条插值方法。Lang 和 Xu [3]将四次 B 样条和积分值相结合, Wu 和 Zhang [4]将积分值与六次样条相结合, 都证明了其在节点处具有超收敛性。但以上的方法都需要求解线性方程组, 需要进行大量的计算, 为了避免这一缺点, 关于积分值型样条拟插值被广泛研究, Boujraf 等[5]利用给定区间上的积分值的线性组合对 Pual Sablonniere [6]提出的离散的单变量样条拟插值中的函数值进行替换, 得到了积分值型三次样条拟插值。2018 年, 吴金明等[7]进一步得到了连续区间上关于积分值的五次样条拟插值。由于样条函数也存在一些缺点, 比如有时不能满足被逼近函数的光滑性的较高要求, 而 MQ 函数作为径向基函数, 几乎可以逼近所有的函数。因此在 Hardy [8]提出 MQ 函数后, MQ 拟插值就有了很好的发展。Beatson 和 Powell [9]对有限区间上的拟插值进行了研究, 提出了定义在有界区间上的 MQ 拟插值算子 L_A, L_B, L_C 。Wu 和 Schaback [10]对文献[9]的结果进行了改进, 提出了不需要已知边界导数值 MQ 拟插值算子 L_D 。关于 MQ 拟插值的研究还有很多。而在 2016 年, 高文武在文献[11]中提出了针对导数信息的 MQ 拟插值算子, 并表明了它具有收敛性和保形性, 这使拟插值可以应用到更多的领域。而对于积分值型 MQ 拟插值, 在 2019 年, 吴金明等[12]在 Wang 和 Xu 等[13]提出的拟插值算子的基础上, 用已知的积分值信息分别对结点处函数值和一阶导数值进行逼近, 从而得到新的关于积分值的 MQ 拟插值算子。

本文根据文献[12]中利用积分值的线性组合逼近函数的一阶导数值, 提出了一种新的关于积分值的 MQ 拟插值算子, 此过程不要求解线性方程组, 将积分值和 MQ 函数进行结合, 也避免了样条函数空间的一些缺点, 现有的 MQ 拟插值算子大多数都是以函数值、导数值作为已知条件, 而实际应用中大多数以积分值作为已知条件, 导数值信息在实际问题中不容易获取, 为了使 MQ 拟插值得到更广泛的应用, 本文提出了一种新的基于积分值的 MQ 拟插值算子, 并且给出了相应的误差估计。

2. 有界区间上的 MQ 拟插值算子

已知节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$, 在这些节点处的导数值为 $\{f'(x_j)\}_{j=0}^N$, 并且还已知区间 $[a, b]$

内任意一点处的函数值 $f(\bar{x})$, 这里 $h = \max_{0 \leq j \leq N-1} (x_{j+1} - x_j)$ 。则高文武[11]构造的有界区间 $[a, b]$ 上的 MQ 拟插值算子 $Q_D^{\bar{x}} f(x)$ 为

$$\begin{aligned} Q_D^{\bar{x}} f(x) = & f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{N-1} f'(x_j) (\varphi_j(x) - \varphi_j(\bar{x})) \\ & + f'(a) \left[\frac{\phi(\bar{x}-a) - \phi(x-a)}{4} + \frac{\phi(\bar{x}-x_1) - \phi(x-x_1)}{4} + \frac{x-\bar{x}}{2} \right] \\ & + f'(b) \left[\frac{\phi(x-b) - \phi(\bar{x}-b)}{4} + \frac{\phi(x-x_{N-1}) - \phi(\bar{x}-x_{N-1})}{4} + \frac{x-\bar{x}}{2} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \frac{\phi(x-x_{j-1}) - \phi(x-x_{j+1})}{4}, \quad 1 \leq j \leq N-1, \\ \phi(x) &= [x^2 + c^2]^{\frac{1}{2}}, \quad c \text{ 为形状参数。} \end{aligned}$$

对于 MQ 拟插值算子 $Q_D^{\bar{x}} f(x)$, 误差估计如下。

定理 1 [11] 记 $f(x) \in C^3(R)$ 且满足 $|f'(x)| \leq M|x|^{2-\varepsilon}$, 这里 M 为任意的正整数, ε 为任意小的正数, 则拟插值算子 $Q_D^{\bar{x}} f(x)$ 的误差估计为

$$\|Q_D^{\bar{x}} f - f\|_{\infty} \leq (K_1 h^2 + K_2 c h + K_3 c^2 |\lg h|) |x - \bar{x}|$$

根据定理可知:

当 $c^2 |\lg h| = o(h^2)$ 时, $\|Q_D^{\bar{x}} f - f\|_{\infty} \leq o(h^2) |x - \bar{x}|$;

当 $c = o(h)$ 时, $\|Q_D^{\bar{x}} f - f\|_{\infty} \leq o(h^2 |\lg h|) |x - \bar{x}|$ 。

3. 有界区间上积分型 MQ 拟插值算子的构造

本节首先根据文献[12], 利用连续区间上积分值的线性组合以 $o(h^4)$ 去逼近函数 $f(x)$ 在节点 x_j 处的一阶导数值 $f'(x_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$ 。然后利用此逼近将 MQ 拟插值算子 $Q_D^{\bar{x}} f(x)$ 中的一阶导数值进行替换, 从而得到新的拟插值算子 $\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f(x)$ 。

3.1. 对节点处一阶导数值的逼近

在有界区间 $[a, b]$ 上的节点 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$, 其中 $x_i = a + ih$, $0 \leq i \leq N$, $h = (b-a)/N$, 节点区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的积分值为 I_i , $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ 。连续等距区间上的积分值和函数在节点处一阶导数值的关系如下引理 1 所示。

引理 1 [12] 对于 $i = 2, 3, 4, \dots, N-2$ 有

$$\tilde{f}'_i = \frac{1}{12h^2} (I_{i-2} - 15I_{i-1} + 15I_i - I_{i+1}) = f'_i + o(h^4),$$

同样 $i = 0, 1, N-1, N$ 时, 有

$$\tilde{f}'_0 = \frac{1}{12h^2} (-45I_0 + 109I_1 - 105I_2 + 51I_3 - 10I_4) = f'_0 + o(h^4),$$

$$\tilde{f}'_1 = \frac{1}{12h^2} (-10I_0 + 5I_1 + 9I_2 - 5I_3 + I_4) = f'_1 + o(h^4),$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}'_{N-1} &= \frac{1}{12h^2}(10I_{N-1} - 5I_{N-2} - 9I_{N-3} + 5I_{N-4} - I_{N-5}) = f'_{N-1} + o(h^4), \\ \tilde{f}'_N &= \frac{1}{12h^2}(45I_{N-1} - 109I_{N-2} + 105I_{N-3} - 51I_{N-4} + 10I_{N-5}) = f'_N + o(h^4).\end{aligned}$$

3.2. 积分型 MQ 拟插值算子

通过上面 3.1 节已经用积分值的线性组合来对函数 $f(x)$ 的一阶导进行逼近, 那么再利用其中的 $\tilde{f}'_j, j=0,1,\dots,N$ 对(1)式中的 $f'(x_j), j=0,1,\dots,N$ 进行替换, 即可得到新的有界区间上基于积分值的 MQ 拟插值算子 $\tilde{Q}_D^x f(x)$ 如下定义。

定义 1 给定有界区间 $[a,b]$ 上的节点 $a=x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N=b$, 节点区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上的积分值 $I_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx$, 其中 $x_j = a + jh, 0 \leq j \leq N, h = (b-a)/N$, 以及区间 $[a,b]$ 内任意一点处的函数值 $f(\bar{x})$, 关于 $f(x)$ 的 MQ 拟插值算子为

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_D^x f(x) &= f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{f}'(x_j)(\varphi_j(x) - \varphi_j(\bar{x})) \\ &\quad + \tilde{f}'(a) \left[\frac{\phi(\bar{x}-a) - \phi(x-a)}{4} + \frac{\phi(\bar{x}-x_1) - \phi(x-x_1)}{4} + \frac{x-\bar{x}}{2} \right] \\ &\quad + \tilde{f}'(b) \left[\frac{\phi(x-b) - \phi(\bar{x}-b)}{4} + \frac{\phi(x-x_{N-1}) - \phi(\bar{x}-x_{N-1})}{4} + \frac{x-\bar{x}}{2} \right]\end{aligned}\quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{f}'(x_j) &= \frac{1}{12h^2}(I_{j-2} - 15I_{j-1} + 15I_j - I_{j+1}) = f'(x_j) + o(h^4), \quad j=2,3,\dots,N-2, \\ \tilde{f}'(a) &= \frac{1}{12h^2}(-45I_0 + 109I_1 - 105I_2 + 51I_3 - 10I_4) = f'(a) + o(h^4), \\ \tilde{f}'(x_1) &= \frac{1}{12h^2}(-10I_0 + 5I_1 + 9I_2 - 5I_3 + I_4) = f'(x_1) + o(h^4), \\ \tilde{f}'(x_{N-1}) &= \frac{1}{12h^2}(10I_{N-1} - 5I_{N-2} - 9I_{N-3} + 5I_{N-4} - I_{N-5}) = f'(x_{N-1}) + o(h^4), \\ \tilde{f}'(b) &= \frac{1}{12h^2}(45I_{N-1} - 109I_{N-2} + 105I_{N-3} - 51I_{N-4} + 10I_{N-5}) = f'(b) + o(h^4). \\ \varphi_j(x) &= \frac{\phi(x-x_{j-1}) - \phi(x-x_{j+1})}{4}, \quad 1 \leq j \leq N-1, \\ \phi(x) &= [x^2 + c^2]^{\frac{1}{2}}, \quad c \text{ 为形状参数}.\end{aligned}$$

4. 误差估计

定理 2 拟插值算子 $\tilde{Q}_D^x f(x)$ 如(2)式定义, 记 $f(x) \in C^3(R)$ 且满足 $|f'(x)| \leq M|x|^{2-\varepsilon}$, 这里 M 为任意的正整数, ε 为任意小的正数, 则拟插值算子 $\tilde{Q}_D^x f(x)$ 的误差估计为

$$\|\tilde{Q}_D^x f - f\|_{\infty} \leq (K_1 h^2 + K_2 c h + K_3 c^2 |\lg h|) |x - \bar{x}|$$

根据定理可知:

当 $c^2 |\lg h| = o(h^2)$ 时, $\|\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f - f\|_{\infty} \leq o(h^2) |x - \bar{x}|$;

当 $c = o(h)$ 时, $\|\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f - f\|_{\infty} \leq o(h^2 |\lg h|) |x - \bar{x}|$ 。

证 显然

$$\begin{aligned}\|\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f(x) - f(x)\|_{\infty} &= \|\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f(x) - Q_D^{\bar{x}} f(x) + Q_D^{\bar{x}} f(x) - f(x)\|_{\infty} \\ &\leq \|\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f(x) - Q_D^{\bar{x}} f(x)\|_{\infty} + \|Q_D^{\bar{x}} f(x) - f(x)\|_{\infty}\end{aligned}$$

对 $\forall j$ 有

$$\tilde{f}'(x_j) - f'(x_j) = o(h^4),$$

则

$$\begin{aligned}&\|\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f(x) - Q_D^{\bar{x}} f(x)\|_{\infty} \\ &= \left\| \left(\tilde{f}(\bar{x}) - f(\bar{x}) \right) + \sum_{j=1}^{N-1} \left(\tilde{f}'(x_j) - f'(x_j) \right) (\varphi_j(x) - \varphi_j(\bar{x})) \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{f}'(a) - f'(a) \right) \left[\frac{\phi(\bar{x}-a) - \phi(x-a)}{4} + \frac{\phi(\bar{x}-x_1) - \phi(x-x_1)}{4} + \frac{x-\bar{x}}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{f}'(b) - f'(b) \right) \left[\frac{\phi(x-b) - \phi(\bar{x}-b)}{4} + \frac{\phi(x-x_{N-1}) - \phi(\bar{x}-x_{N-1})}{4} + \frac{x-\bar{x}}{2} \right] \right\|_{\infty} \\ &= K \left\| \sum_{j=0}^N \tilde{f}'(x_j) - f'(x_j) \right\|_{\infty} \\ &= o(h^4)\end{aligned}$$

又由定理 1 可以得到

$$\|Q_D^{\bar{x}} f(x) - f(x)\|_{\infty} \leq (K_1 h^2 + K_2 c h + K_3 c^2 |\lg h|) |x - \bar{x}|,$$

从而 $\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f(x)$ 的误差估计为

$$\|\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f(x) - f(x)\|_{\infty} \leq (K_1 h^2 + K_2 c h + K_3 c^2 |\lg h|) |x - \bar{x}|$$

当 $c^2 |\lg h| = o(h^2)$ 时, $\|\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f - f\|_{\infty} \leq o(h^2) |x - \bar{x}|$;

当 $c = o(h)$ 时, $\|\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f - f\|_{\infty} \leq o(h^2 |\lg h|) |x - \bar{x}|$ 。

5. 数值实验

$\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f(x)$ 为本文构造的 MQ 拟插值算子并且取 $c = h^5$, 选取两个实验函数

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = \sin(\pi x)$$

针对不同的区间个数 N , 对这两个函数的最大误差如下表 1 和表 2 所示。

$$ME(N) = \|\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f(x) - f(x)\|_{\infty}$$

为了更好的展示出本文提出的拟插值算子的逼近程度, 图 1、图 2 分别给出了 $\tilde{Q}_D^{\bar{x}} f(x)$ 逼近 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 的效果图, 其中取 $N = 40$, 逼近函数用 Q_f 表示, 被逼近函数分别用 f_1 、 f_2 表示。

Table 1. The maximum error with respect to $f_1(x)$

表 1. 对 $f_1(x)$ 的最大误差

N	$\ \tilde{Q}_D^x f(x) - f_1(x)\ _\infty$
10	4.80×10^{-3}
20	1.25×10^{-3}
40	3.17×10^{-4}
80	8.01×10^{-5}

Table 2. The maximum error with respect to $f_2(x)$

表 2. 对 $f_2(x)$ 的最大误差

N	$\ \tilde{Q}_D^x f(x) - f_2(x)\ _\infty$
20	4.14×10^{-3}
40	1.03×10^{-3}
80	2.57×10^{-4}
160	6.43×10^{-5}

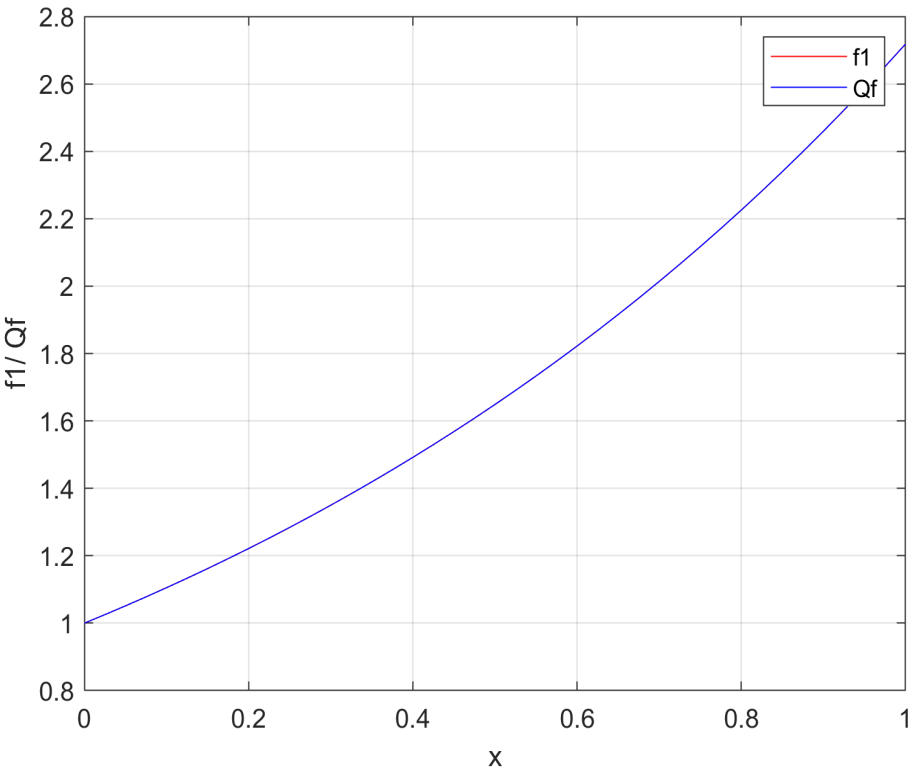


Figure 1. $\tilde{Q}_D^x f(x)$ rendering of the approximation of $f_1(x)$

图 1. $\tilde{Q}_D^x f(x)$ 逼近 $f_1(x)$ 的效果图

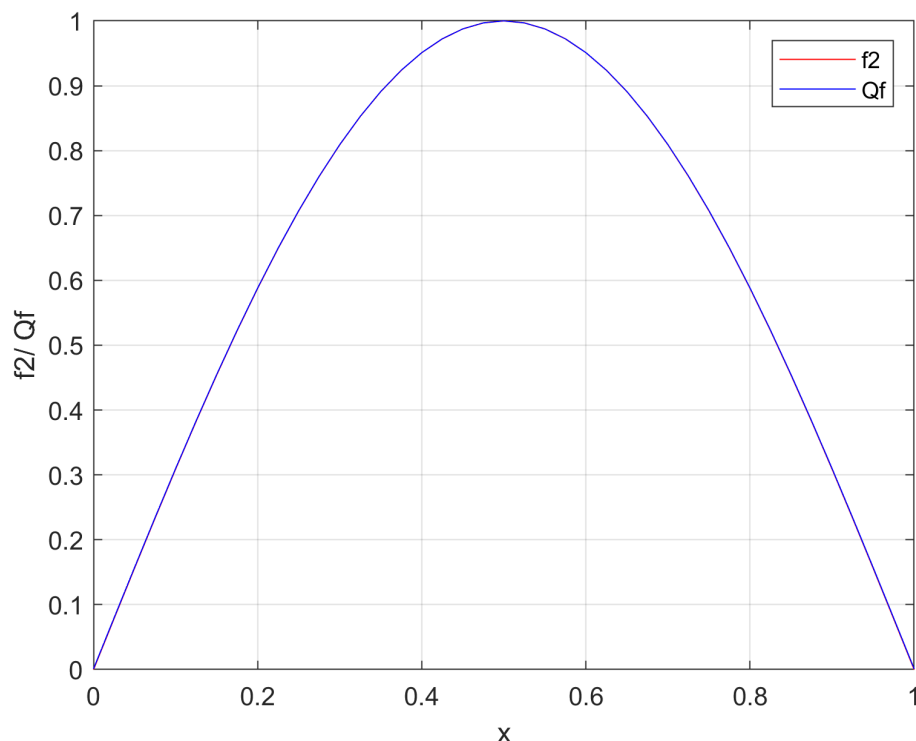


Figure 2. $\tilde{Q}_D^x f(x)$ rendering of the approximation of $f_2(x)$

图 2. $\tilde{Q}_D^x f(x)$ 逼近 $f_2(x)$ 的效果图

通过以上数值实验可以看出本文提出的拟插值算子 $\tilde{Q}_D^x f(x)$ 具有较为不错的逼近精度。

6. 结论

本文提出了一种新的关于积分值的 MQ 拟插值算子, 通过利用积分值的线性组合逼近函数的导数值和 MQ 拟插值算子 $Q_D^x f(x)$ 进行函数重构, 并给出了相应的误差估计。

参考文献

- [1] Behforooz, H. (2006) Approximation by Integro Cubic Splines. *Applied Mathematics and Computation*, **175**, 8-15. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.07.066>
- [2] Behforooz, H. (2010) Interpolation by Integro Quintic Splines. *Applied Mathematics and Computation*, **216**, 364-367. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.01.009>
- [3] Lang, F. and Xu, X. (2012) On Integro Quartic Spline Interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **236**, 4214-4226. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.05.017>
- [4] Wu, J. and Zhang, X. (2013) Integro Sextic Spline Interpolation and Its Super Convergence. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 6431-6436. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.12.062>
- [5] Boujraf, A., Sbibi, D., Tahrichi, M. and Tijini, A. (2015) A Simple Method for Constructing Integro Spline Quasi-interpolants. *Mathematics and Computers in Simulation*, **111**, 36-47. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2014.11.019>
- [6] Sablonniere, P. (2005) Univariate Spline Quasi-Interpolants and Applications to Numerical Analysis. *Ren Diconti Del Seminario Matematico*, **63**, 211-222.
- [7] 吴金明, 张雨, 张晓磊, 等. 积分值五次样条拟插值[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2018, 30(5): 801-807.
- [8] Hardy, R.L. (1971) Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces. *Journal of Geophysical Research*, **76**, 1905-1915. <https://doi.org/10.1029/jb076i008p01905>
- [9] Beatson, R.K. and Powell, M.J.D. (1992) Univariate Multiquadric Approximation: Quasi-Interpolation to Scattered Data.

-
- Constructive Approximation*, **8**, 275-288. <https://doi.org/10.1007/bf01279020>
- [10] Wu, Z. and Robert, S. (1994) Shape Preserving Properties and Convergence of Univariate Multiquadric Quasi-Interpolation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **10**, 441-446. <https://doi.org/10.1007/bf02016334>
- [11] 高文武. 基于导数信息的 Multiquadric 拟插值[J]. 复旦学报, 2016, 55(3): 298-303.
- [12] 吴金明, 单婷婷, 朱春钢. 连续区间上积分值的 MQ 拟插值算子[J]. 系统科学与数学, 2019, 39(12): 1972-1982.
- [13] Wang, R., Xu, M. and Fang, Q. (2010) A Kind of Improved Univariate Multiquadric Quasi-Interpolation Operators. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 451-456. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.06.023>