

具有阈值控制的植物病虫害模型的全局动力学分析

杨 梦

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2024年12月28日; 录用日期: 2025年1月18日; 发布日期: 2025年1月29日

摘 要

本文研究了一类分段光滑的植物病虫害模型, 通过研究感染个体的数量在单位时间内的变化, 以决定是否采取移除措施。利用 *Filippov* 理论、非光滑 *Lyap-unov* 函数等方法, 根据基本再生数的取值情况, 讨论系统的无病平衡点、地方病平衡点的全局动力学行为。最后, 采用数值仿真的方法展示了全局动力学。

关键词

Filippov系统, 植物病虫害, 阈值控制, 全局动力学

Global Dynamics Analysis of a Plant Disease Model with Threshold Control

Meng Yang

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Dec. 28th, 2024; accepted: Jan. 18th, 2025; published: Jan. 29th, 2025

Abstract

This paper studies the global dynamics of a class of piecewise smooth plant disease model, by studying the change in the number of infected individuals per unit time, to determine whether removal measures should be taken. Based on the value of the basic reproduction number and combined with Filippov theory, non-smooth Lyapunov function and other methods, discussing the global dynamical behaviors of the disease-free equilibrium and the endemic equilibrium of the system. Finally, using numerical simulation to show global dynamics.

Keywords

Filippov System, Plant Diseases, Threshold Control, Global Dynamics

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

植物病虫害治理是一个长期存在的问题,若问题处理不当会使得作物减产,还会影响作物品质,严重时甚至导致绝收,从而对粮食安全、农业生产以及经济发展等造成巨大影响.因此,植物病虫害的防治问题一直是农业生态部门、农业的生产者以及国内外研究植物病虫害的专家们关注的焦点,积极有效地防控治理植物病虫害是大力发展农业的关键一环.

随着全球气候的变化和种植模式的变革,植物病虫害的发生规律和危害程度也在不断变化 [1],这就要求我们对植物病虫害的动力学行为有更深入的了解,并制定出有效的防治策略.以疾病综合治理 (IDM) 为主,移除染病植株、重植健康植株等控制策略被广泛应用,众多学者建立相应数学模型用以分析、比较和预测植物病虫害的发展 [1–7].例如,1946年,为控制一种可可树病毒的传播,加纳砍伐了1.9亿棵染病植株 [8].以色列、西班牙和美国利用移除方法治理柑橘腐根病取得了成功 [3] [9]. Richard W Gibson [10] [11] 等在文章中也说明了移除染病植株有利于控制植物病的传播.2007年Van den Bosch F [12] 等提出了一个具有连续控制策略的植物病虫害模型,进一步研究了移除措施对植物病虫害传播的影响.

然而,要彻底消除植物病虫害是非常困难的,因此人们通常将染病植株数量控制在一定经济阈

值之下以减少损失. 在控制策略中, 大多数只以染病植株数量或密度作为控制指标, 而很少观察它们的变化率. 文献 [13] 将模型进行改进, 通过研究感染个体的加权总和及其变化率是否到达一定阈值水平, 以决定是否采取控制措施, 进而提出了切换线为曲线的 SIR 模型. 实际上, 一些害虫种群在没有天敌的情况下会迅速繁殖, 即便是初始规模很小的害虫也会导致植物病虫害的暴发, 造成比较严重的经济损失 [14]. 基于上述事实, 我们改进文献 [13] 中的阈值控制策略, 通过研究单位时间内染病植株的数量变化, 提出了一个植物病虫害模型并研究其全局动力学行为. 余下内容安排如下: 第 2 部分主要介绍所研究的模型及其预备知识, 第 3 部分是主要结果及其证明, 最后一部分为生物学意义.

2. 模型介绍及预备知识

本文将采取移除染病植株的措施, 以控制植物病虫害的传播. 若单位时间内染病植株数量是递增的, 则移除染病植株以降低植物病虫害传播风险. 因此, 植物病虫害模型用分段光滑微分方程描述如下:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta SI - \eta_1 S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \eta_2 I - \varepsilon v I, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, $S = S(t)$ 和 $I = I(t)$ 分别表示易感植株和染病植株在 t 时刻的数量; $\beta > 0$ 表示疾病传播率; $A > 0$ 为易感植株的恒定种植率; $\eta_1 > 0$ 和 $\eta_2 > 0$ 分别表示易感植株和感染植株的死亡率或收获率; $v > 0$ 表示染病植株的移除率.

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & H(S, I) < 0, \\ 1, & H(S, I) > 0, \end{cases}$$

为控制函数, 其中 $H(S, I) = \beta SI - \eta_2 I$. 当 $H(S, I) = \beta SI - \eta_2 I > 0$ 时, 表示单位时间内染病植株数量是递增的, 此时采取移除措施, 否则不采取措施.

记 $\mathbb{R}_+^2 = \{(S, I) \mid S > 0, I > 0\}$, 在 $\mathbb{R}_+^2$ 上, 系统 (2.1) 由以下两个子系统

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta SI - \eta_1 S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \eta_2 I, \end{cases} \quad (S, I) \in G_1, \quad (2.2)$$

和

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta SI - \eta_1 S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \eta_2 I - v I, \end{cases} \quad (S, I) \in G_2, \quad (2.3)$$

组成, (2.2) 和 (2.3) 分别是左半子系统和右半子系统, 其中

$$G_1 = \left\{ (S, I) \in \mathbb{R}_+^2 \mid S < \frac{\eta_2}{\beta} \right\}, G_2 = \left\{ (S, I) \in \mathbb{R}_+^2 \mid S > \frac{\eta_2}{\beta} \right\}.$$

记

$$\Sigma = \left\{ (S, I) \in \mathbb{R}_+^2 \mid S = \frac{\eta_2}{\beta} \right\},$$

则称 Σ 为系统 (2.1) 的切换线.

对于左半子系统 (2.2), 基本再生数为 $R_1 = \frac{A\beta}{\eta_1\eta_2}$, 存在无病平衡点 $E_1^0 = \left(\frac{A}{\eta_1}, 0\right)$, 且当 $R_1 > 1$ 时, 存在唯一的地方病平衡点

$$E_1 = (S_1, I_1) = \left(\frac{\eta_2}{\beta}, \frac{A}{\eta_2} - \frac{\eta_1}{\beta}\right).$$

对于右半子系统 (2.3), 基本再生数为 $R_2 = \frac{A\beta}{\eta_1(\eta_2+v)}$, 无病平衡点为 $E_2^0 = \left(\frac{A}{\eta_1}, 0\right)$, 当 $R_2 > 1$ 时, 存在唯一的地方病平衡点

$$E_2 = (S_2, I_2) = \left(\frac{\eta_2+v}{\beta}, \frac{A}{\eta_2+v} - \frac{\eta_1}{\beta}\right).$$

显然, $S_1 < S_2$ 且 $I_1 > I_2$. 下面给出关于子系统的动力学性质的结果, 其证明可参见文献 [15].

命题2.1. 关于子系统 (2.2) 和 (2.3), 有以下结论成立:

- (i) 对于子系统 (2.2), 当 $R_1 \leq 1$ 时, E_1^0 全局渐近稳定, 而当 $R_1 > 1$ 时, E_1 全局渐近稳定.
- (ii) 对于子系统 (2.3), 当 $R_2 \leq 1$ 时, E_2^0 全局渐近稳定, 而当 $R_2 > 1$ 时, E_2 全局渐近稳定.

由于系统 (2.1) 是一个右端不连续的微分系统, 本文将讨论该系统在 *Filippov* 意义下的解 [16], 其定义如下:

定义2.2. [17] 若向量函数 $(S(t), I(t))$ 在 $[0, T)$ 的任意有界闭子区间 $[t_1, t_2]$ 上绝对连续 ($0 < T \leq +\infty$), 满足 $S(0) = S_0$ 和 $I(0) = I_0$, 且存在可测函数 $\gamma = \gamma(t) : [0, T) \rightarrow [0, 1]$ 使得对几乎所有的 $t \in [0, T)$ 有

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta SI - \eta_1 S, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \eta_2 I - \gamma v I, \end{cases} \quad (2.4)$$

那么称向量函数 $(S(t), I(t))$ 是系统 (2.1) 过初始值 (S_0, I_0) 的解.

根据平衡点与切换线的相对位置, 子系统的平衡点关于系统 (2.1) 分为实平衡点, 虚平衡点和边界平衡点三类 [15]. 对于系统 (2.1), E_1^0 和 E_2^0 分别是实平衡点和虚平衡点; E_1 当 $0 < R_1 < 1$ 时为虚平衡点, 当 $R_1 \geq 1$ 时为边界平衡点; E_2 当 $0 < R_2 < 1$ 时是虚平衡点, 当 $R_2 > 1$ 时为实平衡点, 而当 $R_2 = 1$ 时为边界平衡点.

为了考虑本文植物病虫害模型的生物学意义, 需分析系统 (2.1) 解的有界性和正性, 其结果由下面这个命题给出, 证明可参见文献 [15].

命题2.3. 若 $(S(t), I(t))$ 是系统 (2.1) 过初始值 (S_0, I_0) 的解且满足 $S_0 > 0$ 和 $I_0 > 0$, 则对 $\forall t > 0$, $(S(t), I(t))$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上存在且有界, 并且 $S(t) > 0$ 和 $I(t) > 0$ 成立.

切换线附近的动力学行为会对 *Filippov* 系统的全局动力学产生重要影响, 下面分析系统 (2.1) 在切换线 Σ 附近的动力学行为. 根据文献 [15] [16], 系统 (2.1) 的切换线 Σ 可分为穿越域 $\Sigma_c = \Sigma_{c_1} \cup \Sigma_{c_2}$ 和滑模域 Σ_s 两个部分, 其中

$$\Sigma_{c_1} = \left\{ (S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < I < I_1, S = \frac{\eta_2}{\beta} \right\}, \quad \Sigma_{c_2} = \left\{ (S, I) \in \mathbb{R}_+^2 : I > I_1, S = \frac{\eta_2}{\beta} \right\},$$

而系统的滑模域仅存在一个点 $\Sigma_s = \{E_1\}$.

通过对向量场进行分析, 系统 (2.1) 的解在穿越域 Σ_{c_1} 中从左往右穿过切换线, 在穿越域 Σ_{c_2} 中从右往左穿过切换线.

本文将利用弱渐近稳定研究系统 (2.1) 的全局动力学, 因此下面给出文献 [18] 中关于弱渐近稳定的定义.

定义2.4. 若对所有包含 E 的邻域 V , 存在邻域 U 使得 $E \subseteq U \subseteq V$, 且对任意 $x \in U$, 存在系统 (2.1) 满足初始条件 $\varphi_0(x) = x$ 的某个解 φ_t , 使得对 $\forall t \geq 0, \varphi_t(x) \in V$ 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) \in E$, 则称平衡点集 E 弱渐近稳定. 若 $V = \mathbb{R}_+^2$, 则称平衡点集 E 是弱全局渐近稳定的.

3. 主要结果及证明

本节将根据 R_1 的取值分三种情形讨论系统 (2.1) 的全局动力学.

情形1: $R_1 < 1$.

此时可推出 $\frac{A}{\eta_1} < \frac{\eta_2}{\beta}$, 从而 E_2^0 和 E_1 均为虚平衡点. 由 $I_1 > I_2$ 可知, 地方病平衡点 E_2 也为虚平衡点. 因此, 系统 (2.1) 存在唯一的实平衡点 E_1^0 .

定理3.1. 如果 $R_1 < 1$, 那么系统 (2.1) 存在唯一的无病平衡点 E_1^0 , 且该平衡点在 $\mathbb{R}_+^2$ 上是全局渐近稳定的.

证明. 考虑 Lyapunov 函数

$$V_1(S, I) = \frac{1}{2} \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right)^2 + \frac{A}{\eta_1} I,$$

则

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} |_{(2.1)} &= \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right) (A - \beta SI - \eta_1 S) + \frac{A}{\eta_1} (\beta SI - \eta_2 I - \varepsilon v I) \\ &\leq \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right) (A - \beta SI - \eta_1 S) + \frac{A}{\eta_1} (\beta SI - \eta_2 I) \\ &= -(\beta I + \eta_1) S^2 + \frac{2AS}{\eta_1} (\beta I + \eta_1) - \frac{A^2}{\eta_1} - \frac{A\eta_2 I}{\eta_1} \\ &= -(\eta_1 + \beta I) \left(S - \frac{A}{\eta_1} \right)^2 + \frac{AI}{\eta_1^2} (A\beta - \eta_1 \eta_2) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

所以, 根据 Lasalle 不变原理 [19], 系统 (2.1) 的平衡点 E_1^0 在 R_+^2 内全局渐近稳定. $\square$

情形2: $1 < R_1 < 1 + \frac{v}{\eta_2}$.

此时可推出 $R_2 < 1$, 系统 (2.1) 存在 E_1 和 E_2^0 两个平衡点.

定理3.2. 如果 $1 < R_1 < 1 + \frac{v}{\eta_2}$, 则

(i) 当 $A^2 \beta^2 < 4(A\beta - \eta_1 \eta_2) \eta_2^2$ 时, E_2^0 是弱全局渐近稳定的.

(ii) 当 $A^2 \beta^2 \geq 4(A\beta - \eta_1 \eta_2) \eta_2^2$ 时, 那么系统 (2.1) 存在一个不稳定的伪鞍结点 E_1 和一个稳定的结点 E_2^0 , 且存在一条连接 E_1 和 E_2^0 的异宿轨.

证明. (i) 当 $1 < R_1 < 1 + \frac{v}{\eta_2}$ 时, 可推出 $R_2 < 1$, 由命题 2.1 可知 E_2^0 是子系统 (2.3) 在 $\mathbb{R}_+^2$ 内全局

渐近稳定的平衡点, 因此系统 (2.1) 从 E_1 出发的轨线始终位于区域 G_2 内并收敛到 E_2^0 , 如图 1(a) 所示. 因此, 系统 (2.1) 不存在环绕边界平衡点 E_1 的轨线, 所以系统 (2.1) 从穿越域 Σ_{c_1} 出发的解始终停留在区域 G_2 中并收敛到 E_2^0 . 当 $A^2\beta^2 < 4(A\beta - \eta_1\eta_2)\eta_2^2$ 成立时, 子系统 (2.2) 的地方病平衡点 E_1 是稳定的焦点, 因此从区域 G_1 或穿越域 Σ_{c_2} 出发的解从 E_1 下方到达穿越域 Σ_{c_1} , 最后收敛到稳定的结点 E_2^0 . 由于 E_1 也是系统 (2.3) 的切点, 因此存在一条与 E_1 相切的解轨线, 在 $\mathbb{R}_2^+$ 内除这条解轨线以外, 其他轨线均收敛到 E_2^0 , 故 E_2^0 是弱全局渐近稳定的.

(ii) 当 $A^2\beta^2 > 4(A\beta - \eta_1\eta_2)\eta_2^2$ 时, 子系统 (2.2) 的地方病平衡点 E_1 是稳定的结点, 由系统的向量场方向可知, 从穿越域 Σ_{c_2} 出发的解始终在区域 G_1 中并收敛到 E_1 . 而从区域 G_1 出发的解有两种情况, 要么收敛到 E_1 , 要么到达穿越域 Σ_{c_1} . 由命题 2.1 可知 E_2^0 是子系统 (2.3) 在 $\mathbb{R}_+^2$ 内全局渐近稳定的平衡点, 因此系统 (2.1) 从穿越域 Σ_{c_1} 出发的解轨线始终位于区域 G_2 内并收敛到 E_2^0 , 如图 1(b) 所示. 根据文献 [18] 中的定义可知, E_1 在系统 (2.3) 中是一个可视折点, 因此切换线上的 E_1 是一个伪鞍结点. 从切点 E_1 出发的轨线在有限时间内收敛到 E_2^0 , 这就说明存在连接 E_1 和 E_2^0 的异宿轨. 而从区域 G_2 出发的解要么始终停留在区域 G_2 中并收敛到 E_2^0 , 要么穿过穿越域 Σ_{c_2} 最终收敛到 E_1 . $\square$

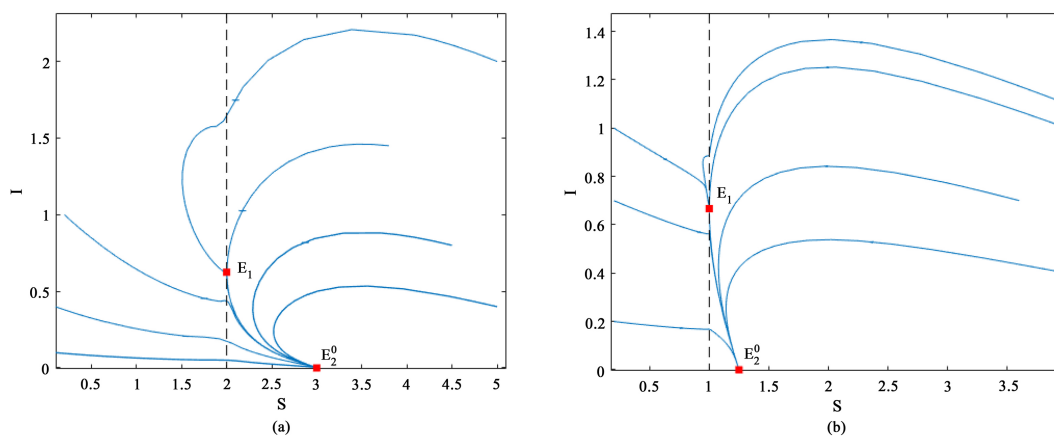


Figure 1. Schematic diagram of the trajectory of system (2.1) at $1 < R_1 < 1 + \frac{v}{\eta_2}$

图 1. 系统 (2.1) 在 $1 < R_1 < 1 + \frac{v}{\eta_2}$ 时的轨线示意图

情形3: $R_1 > 1 + \frac{v}{\eta_2}$.

此时可推出 $R_2 > 1$, 系统 (2.1) 存在 E_1 , E_2^0 和 E_2 三个平衡点.

定理3.3. 如果 $R_1 > 1 + \frac{v}{\eta_2}$, 则系统 (2.1) 存在一个鞍点 E_2^0 , 一个边界平衡点 E_1 , 一个渐近稳定的实平衡点 E_2 , 以及一条连接 E_1 和 E_2 的异宿轨, 且有以下结论成立:

(i) 若 $A^2\beta^2 \geq 4(A\beta - \eta_1\eta_2)\eta_2^2$, 则 E_1 为伪鞍结点, 且 E_2 在 $\mathbb{R}_2^+ \setminus \{E_1\}$ 上全局渐近稳定.

(ii) 若 $A^2\beta^2 < 4(A\beta - \eta_1\eta_2)\eta_2^2$, 则 E_1 为伪鞍点, 且 E_2 在 $\mathbb{R}_2^+$ 上弱全局渐近稳定.

证明. 由 $R_1 > 1 + \frac{v}{\eta_2}$ 可知 $1 < R_2$, 也即 $\det(E_2) > 0, \text{tr}(E_2) < 0$, 则平衡点 E_2 是渐近稳定的结点或焦点, E_2^0 是一个鞍点. 由命题 2.1 可知 E_2 是子系统 (2.3) 在 $\mathbb{R}_+^2$ 内全局渐近稳定的平衡点, 因此从 E_1 出发的解始终位于区域 G_2 内并在有限时间内收敛到 E_2 , 这就说明存在连接 E_1 和 E_2 的异宿轨, 如图 2(a), 图 2(b) 所示. 这样, 系统 (2.1) 不存在环绕边界平衡点 E_1 的轨线, 因此系统 (2.1) 从穿越域 Σ_{c_1} 出发的解始终在区域 G_2 中并收敛到 E_2 .

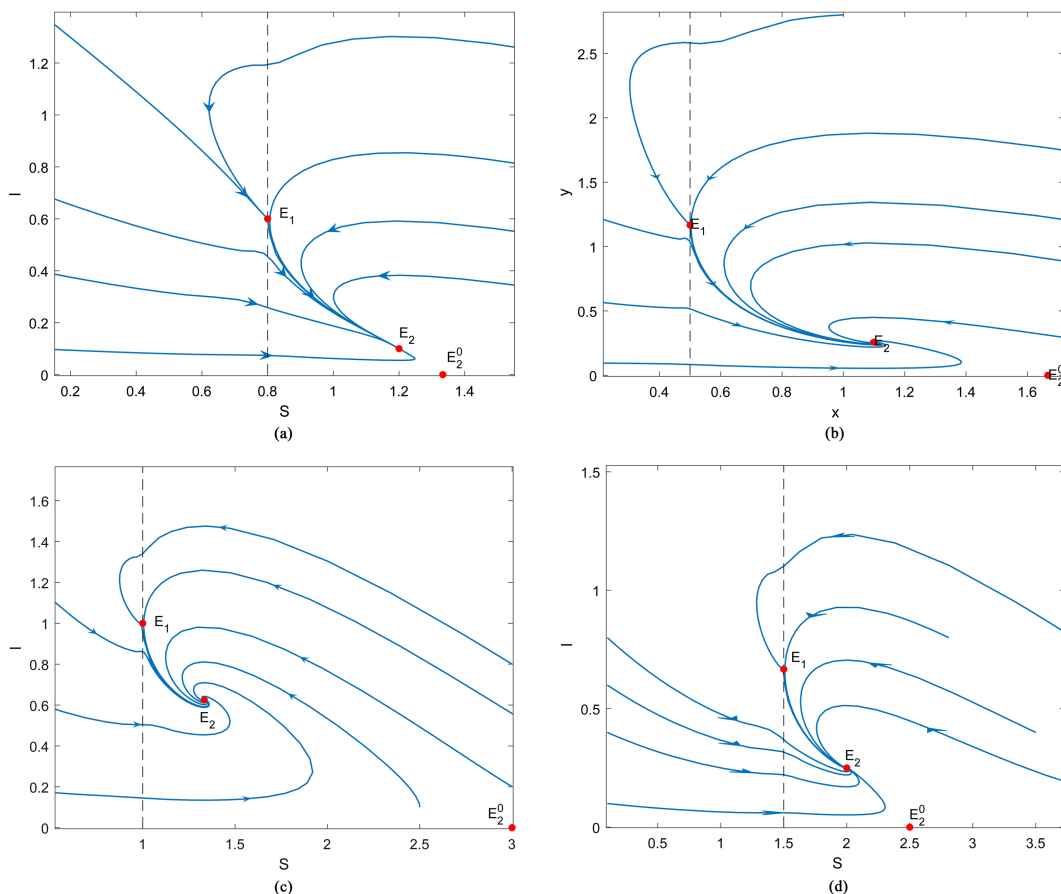


Figure 2. Schematic diagram of the trajectory of system (2.1) at $1 + \frac{v}{\eta_2} < R_0$. Where the parameters of figure (c) are $A = 0.9, \beta = 0.6, \eta_1 = 0.3, \eta_2 = 0.6, v = 0.2$; the parameters of figure (d) are $A = 5, \beta = 2, \eta_1 = 2, \eta_2 = 3, v = 1$, respectively

图 2. 系统 (2.1) 在 $1 + \frac{v}{\eta_2} < R_0$ 时的轨线示意图. 其中图 (c) 的参数分别为 $A = 0.9, \beta = 0.6, \eta_1 = 0.3, \eta_2 = 0.6, v = 0.2$ 图 (d) 的参数分别为 $A = 5, \beta = 2, \eta_1 = 2, \eta_2 = 3, v = 1$

(i) 当 $A^2\beta^2 > 4(A\beta - \eta_1\eta_2)\eta_2^2$ 时, 子系统 (2.2) 的地方病平衡点 E_1 是稳定的结点, 由系统的向量场方向可知, 从穿越域 Σ_{c_2} 出发的解始终位于区域 G_1 中并收敛到 E_1 . 根据文献 [18] 中的定义可知, E_1 在系统 (2.3) 中是一个可视折点, 因此切换线上的 E_1 是一个不稳定的伪鞍结点, 且 E_2 在 $\mathbb{R}_2^+ \setminus \{E_1\}$ 上全局渐近稳定.

(ii) 当 $A^2\beta^2 \leq 4(A\beta - \eta_1\eta_2)\eta_2^2$ 成立时, 子系统 (2.2) 的地方病平衡点 E_1 是稳定的焦点, 因此从区域 G_1 或穿越域 Σ_{c_2} 出发的解从 E_1 下方到达穿越域 Σ_{c_1} , 最后收敛到 E_2 . 由于 E_1 也是系统 (2.3) 的切点, 因此存在一条与 E_1 相切的解轨线, 在 $\mathbb{R}_2^+$ 内除这条解轨线以外, 其他轨线均收敛到 E_2 , 故 E_1 是伪鞍点, E_2 是弱全局渐近稳定的. 如图 2(c), 图 2(d) 所示. $\square$

4. 结语

本节主要讨论上述理论结果的生物学意义, 并指出移除措施对植物病虫害的影响. 为了更加有

效地控制植物病虫害的传播, 我们通过研究单位时间内感染植株的数量变化来决定是否采取移除措施. 当 $\frac{dS}{dt} < 0$ 时, 表示单位时间内感染植株的数量在减少, 这表明不采取移除措施, 植物病虫害最终也会消亡; 当 $\frac{dS}{dt} > 0$ 时, 表示单位时间内感染植株的数量在增加, 需要采取移除措施以控制植物病虫害的传播.

通过上述研究结果可知, 当 $R_1 < 1$ 时, 定理 3.1 表明无病平衡点 E_1^0 是全局渐近稳定的, 因此, 即便不采取控制措施也能控制疾病的传播, 且病虫害最终会消亡. 当 $1 < R_1 < 1 + \frac{\nu}{\eta_2}$ 时, 定理 3.2 表明通过采取控制措施疾病有可能会短暂停留在临界值, 但最终也会消亡. 当 $R_1 > 1 + \frac{\nu}{\eta_2}$ 时, 采取控制措施能够避免疾病的爆发.

事实上, 当染病植株达到或超过某一阈值水平, 人们才意识到问题的严重性并采取措施, 但无论染病植株增长多快, 只要没有达到一定的水平, 人们就不会采取控制措施, 这可能导致植物病害的爆发, 造成比较严重的经济损失. 本文通过单位时间内染病植株的数量变化来控制疾病的传播, 这在某些方面可以避免病虫害大量暴发.

参考文献

- [1] Jeger, M.J., Seal, S.E. and Van den Bosch, F. (2006) Evolutionary Epidemiology of Plant Virus Disease. In: *Advances in Virus Research*, Elsevier, 163-203.
[https://doi.org/10.1016/s0065-3527\(06\)67005-x](https://doi.org/10.1016/s0065-3527(06)67005-x)
- [2] van den Bosch, F. and de Roos, A.M. (1996) The Dynamics of Infectious Diseases in Orchards with Roguing and Replanting as Control Strategy. *Journal of Mathematical Biology*, **35**, 129-157. <https://doi.org/10.1007/s002850050047>
- [3] Marcus, R., Talpaz, H. and Bar-Joseph, M. (1989) A Model for the Spread and Control of Citrus Tristeza Virus Disease. *Journal of Applied Statistics*, **16**, 315-320.
<https://doi.org/10.1080/02664768900000039>
- [4] Chan, M. and Jeger, M.J. (1994) An Analytical Model of Plant Virus Disease Dynamics with Roguing and Replanting. *The Journal of Applied Ecology*, **31**, 413-427.
<https://doi.org/10.2307/2404439>
- [5] Fishman, S. and Marcus, R. (1984) A Model for Spread of Plant Disease with Periodic Removals. *Journal of Mathematical Biology*, **21**, 149-158. <https://doi.org/10.1007/bf00277667>
- [6] Luo, Y., Gao, S., Xie, D. and Dai, Y. (2015) A Discrete Plant Disease Model with Roguing and Replanting. *Advances in Difference Equations*, **2015**, 12.
<https://doi.org/10.1186/s13662-014-0332-3>
- [7] Wang, J., Zhang, X., Wang, J. and Sun, Q. (2019) Dynamics of a Nonautonomous Plant Disease Model with General Nonlinear Incidence Rate and Time-Varying Impulse. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **7**, 2518-2530. <https://doi.org/10.4236/jamp.2019.710171>

-
- [8] Thresh, J.M. and Owusu, G.K. (1986) The Control of Cocoa Swollen Shoot Disease in Ghana: An Evaluation of Eradication Procedures. *Crop Protection*, **5**, 41-52.
[https://doi.org/10.1016/0261-2194\(86\)90037-2](https://doi.org/10.1016/0261-2194(86)90037-2)
 - [9] Fishman, S., Marcus, R., Talpaz, H., Bar-Joseph, M., Oren, Y., Salomon, R., *et al.* (1983) Epidemiological and Economic Models for Spread and Control of Citrus Tristeza Virus Disease. *Phytoparasitica*, **11**, 39-49. <https://doi.org/10.1007/bf02980710>
 - [10] Thresh, J.M. and Cooter, R.J. (2005) Strategies for Controlling Cassava Mosaic Virus Disease in Africa. *Plant Pathology*, **54**, 587-614. <https://doi.org/10.1111/j.1365-3059.2005.01282.x>
 - [11] Gibson, R.W. and Aritua, V. (2002) The Perspective of Sweetpotato Chlorotic Stunt Virus in Sweetpotato Production in Africa: A Review. *African Crop Science Journal*, **10**, 281-310.
<https://doi.org/10.4314/acsj.v10i4.27531>
 - [12] van den Bosch, F., Jeger, M.J. and Gilligan, C.A. (2006) Disease Control and Its Selection for Damaging Plant Virus Strains in Vegetatively Propagated Staple Food Crops; a Theoretical Assessment. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, **274**, 11-18.
<https://doi.org/10.1098/rspb.2006.3715>
 - [13] Dong, C., Xiang, C., Xiang, Z. and Yang, Y. (2022) Global Dynamics of a Filippov Epidemic System with Nonlinear Thresholds. *Chaos, Solitons Fractals*, **163**, Article 112560.
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112560>
 - [14] Xiao, Y., Xu, X. and Tang, S. (2012) Sliding Mode Control of Outbreaks of Emerging Infectious Diseases. *Bulletin of Mathematical Biology*, **74**, 2403-2422.
<https://doi.org/10.1007/s11538-012-9758-5>
 - [15] Wang, J., Zhang, F. and Wang, L. (2016) Equilibrium, Pseudoequilibrium and Sliding-Mode Heteroclinic Orbit in a Filippov-Type Plant Disease Model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **31**, 308-324. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2016.01.017>
 - [16] Filippov, A.F. (1988) Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides. Kluwer Academic Publishers.
 - [17] 王佳伏, 徐忠齐, 黄立宏. 具有不连续控制策略的SIQR传染病模型的全局动力学分析[J]. 应用数学学报, 2023, 46(6): 998-1011.
 - [18] 黄立宏, 郭振远, 王佳伏. 右端不连续微分方程理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
 - [19] Bacciotti, A. and Ceragioli, F. (1999) Stability and Stabilization of Discontinuous Systems and Nonsmooth Lyapunov Functions. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **4**, 361-376. <https://doi.org/10.1051/cocv:1999113>