Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(1), 24-32
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.141005

含有3-圈的平面图的有效染色数

沈儒雄

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2024年12月9日；录用日期：2025年1月2日；发布日期：2025年1月13日

摘 要

给定平面图G的一个顶点染色，如果图G的某个面F的所有顶点颜色各不相同，我们称面F为彩虹面。而如果平面图G中没有任何一个面是彩虹面，我们称这种染色为有效染色. 在这种有效染色方案中，所使用的颜色种类的最大值定义为该平面图的有效染色数，记作$\chi_f(G)$。**Jungič, Král′**和**Škrekovski**研究了一类围长至少为4的平面图的有效染色数。本文主要研究了一类既包含3-圈又包含长度至少为5的面圈的平面图的有效染色数并得到了它的下界。

关键词

平面图，彩虹面，有效染色

The Valid Coloring Number of Plane Graphs Containing 3-Cycles

Ruxiong Shen

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Dec. 9^{th}, 2024; accepted: Jan. 2^{nd}, 2025; published: Jan. 13^{th}, 2025

文章引用: 沈儒雄. 含有3-圈的平面图的有效染色数[J]. 应用数学进展, 2025, 14(1): 24-32.
DOI: 10.12677/aam.2025.141005

Abstract

Given a vertex coloring of a plane graph G, if all the vertices of a face F of G receive mutually different colors, then the face F is called a rainbow face. A valid coloring is a coloring of G such that no face of G is rainbow. The maximum number of colors used in a valid coloring of a plane graph G is referred to as the valid coloring number, denoted by $\chi_f(G)$. Jungič, Král′ and Škrekovski focused on the valid coloring number of a class of plane graphs with girth at least 4. In this paper, we mainly study the valid coloring number of a class of plane graphs containing 3-cycles and faces with cycles of length at least 5 and get its lower bound.

Keywords

Plane Graph, Rainbow Face, Valid Coloring

1. 研究背景

对给定的顶点染色平面图G, 如果图G的面F的顶点颜色都相同, 那么面F是单色的. 如果图G的面F的顶点颜色都不同, 那么面F是彩虹的. 如果平面图G中没有任何一个面是彩虹面, 我们称这种染色为有效染色. 在平面图G的有效染色中使用的最大颜色数称为有效染色数, 记作$\chi_f(G)$.

彩虹图的研究是图论研究的热点问题之一, 平面图中彩虹面的研究吸引了越来越多研究者的关注. Czap和Jendrol′ [1]对平面图的面约束染色进行了概述. 早期学者们大多研究平面图中不含单色面的染色问题. 关于单色面的研究起源于Zykov [2]的早期工作, 之后Kündgen和Ramamurthi [3]对其进行了深入的探索和扩展. 近年来, 研究者们开始将注意力转向平面图中不含彩虹面的研究. 其中, 部分学者们对不同类型的图也展开了研究, 如三角剖分图 [4, 5], 四角剖分图 [6], 平面立方图 [7, 8], 半正则多面体图 [9]. 同时, 有关彩虹染色的极值问题 [10–17]、混合染色问题 [18–22] 也得到了广泛的研究. 其中, Penaud [22]证明了每个平面图都有一个2-顶点染色, 使得该图中既没有单色面也没有彩虹面. Diwan [18]进一步指出, 每个至少包含5个顶点的平面图都有一个3-顶点染色, 使得该图中既没有单色面也没有彩虹面.

2004年, Ramamurthi和West [23]发现每个n阶平面图G都有有效染色, 并且他们发现有效染色数$\chi_f(G)$与其它参数之间存在一定的数量关系, 也即

$$\chi_f(G) \geq \alpha(G)+1 \geq \lceil \frac{n}{\chi(G)} \rceil + 1.$$

其中$\alpha(G)$是独立数, $\chi(G)$是正常染色数.

此外, 文献 [23]还证明了当图G的正常染色数$\chi(G)$分别为2和3时, 相应的有效染色数$\chi_f(G)$的下界为$\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$和$\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$. 并且这两个下界是紧的. 通过四色定理可得每个平面图G 都有一个颜色数至少为$\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$的有效染色. 根据Grötzsch定理 [24]可知, 每个不含3-圈的平面图都是3-可染的. 因此每个不含3-圈的n阶平面图G的有效染色数$\chi_f(G)$至少为$\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$. 然而Ramamurthi 和West [23] 推测此时$\chi_f(G)$存在更优的下界, 于是他们提出如下猜想.

猜想1. *如果G是不含3-圈的n阶平面图且$n \geq 4$, 那么$\chi_f(G) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.*

Kráľ [25]证明了猜想1在平面图G围长至少为5的条件下成立. 随后Jungič, Kráľ和Škrekovski [26]完全证明了猜想1. Dvořák, Kráľ和Škrekovski [27]将注意力转移到有效染色数$\chi_f(G)$的上界的研究中. 并且他们得到了当图G分别为3-, 4-, 5-连通平面图时$\chi_f(G)$的上界.

注意到Jungič, Kráľ和Škrekovski [26]证明了如下定理

定理1.1. [26] *设G是一个平面图. 图G有n个顶点, 围长为g且$4 \leq g \leq n$. 那么*

$$\chi_f(G) \geq \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, & \text{若} g = 4, \\ \lceil \frac{g-3}{g-2}n - \frac{g-7}{2(g-2)} \rceil, & \text{若} g \geq 5 \text{是奇数}, \\ \lceil \frac{g-3}{g-2}n - \frac{g-6}{2(g-2)} \rceil, & \text{若} g \geq 6 \text{是偶数}. \end{cases}$$

此外, 如果G的面数是偶数, 那么

$$\chi_f(G) \geq \lceil \frac{g-3}{g-2}n - \frac{2}{g-2} \rceil.$$

从定理1.1中可知, 作者只考虑了围长至少为4的平面图的有效染色数. 本文在其基础上研究了一类既包含3-圈又包含长度至少为5的面圈的平面图的有效染色数. 首先我们阐述了一些与本文主要结论相关的定理和引理, 为后续研究提供了必要的工具和依据. 随后我们深入探讨不包含几乎完美匹配的平面连通图的覆盖问题并确定其边数的上界. 进一步地, 我们给出了既包含3- 圈又包含长度至少为5的面圈的平面图的有效染色数的下界, 也即本文的主要结论.

2. 主要结论

如果图G的一个分支的顶点数是奇数, 那么这个分支被称为图G的奇分支. 同样地, 如果一个分支的顶点数是偶数, 那么这个分支被称为图G的偶分支. 此外, 如果图G的一个边集内的任意两条边都没有共同的顶点, 那么这样的边集被称为图G的一个匹配. 我们用$q(G)$来表示图G中奇分支的数

量, 而$def(G)$表示图G的亏损.

定理2.1. [28] 设G是一个n阶图. 那么图G的匹配至多含有$\frac{n-def(G)}{2}$条边, 其中
$def(G) = \max_{S\subseteq G}(q(G\backslash S) - |S|)$.

图G的一个覆盖是指G的一个生成子图, 其中每个顶点的度数至少为1, 且该子图不一定是连通的.

引理2.2. [25] 设G是一个n阶平面图. 如果G的对偶图G^*有一个m条边的覆盖, 那么$\chi_f(G) \geq n - m$.

设G是一个n阶图. 如果一个匹配覆盖了G中$n-1$个顶点, 那么称这个匹配为G的一个几乎完美匹配.

定理2.3. 设G是一个平面连通图. 该图有f个面, k个大小为3的边割集, 且其余边割集大小至少为g, 其中$g \geq 4$. 如果G不包含几乎完美匹配, 那么G包含一个至多有$\lfloor \frac{f-2}{g-2} + \frac{k(g-3)}{2(g-2)} \rfloor$ 条边的覆盖.

证明:

设G的顶点数为n, 边数为m, 最大匹配的边数为μ. 因为G含有k个大小为3的边割集, 且其余边割集大小至少为g, 所以G至多含有k个度数为3的顶点, 且其余顶点的度数至少为g. 根据定理2.1可知, 存在集合$S \subseteq V(G)$使得$def(G) = n - 2\mu = q(G \setminus S) - |S|$.

首先考虑$def(G) = 0$的情形. 此时G含有完美匹配, 且图G的一个覆盖可以由该完美匹配构成. 该覆盖中的边数满足

$$\frac{n}{2} = \frac{ng-2n}{2(g-2)} \leq \frac{2m+k(g-3)-2n}{2(g-2)} = \frac{m-n}{g-2} + \frac{k(g-3)}{2(g-2)} = \frac{f-2}{g-2} + \frac{k(g-3)}{2(g-2)}.$$

因为G不含有几乎完美匹配, 所以接下来只需要考虑$def(G) \geq 2$的情形. 注意S不是空集, 否则G是不连通的. 为了方便后续的证明,我们定义以下符号.

令α_{2i-1}为$G \setminus S$中顶点数为$2i-1$的奇分支数, $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty}(2i-1)\alpha_{2i-1}$ 为$G \setminus S$中奇分支的顶点数. 类似地, 令β_{2i}为$G \setminus S$中顶点数为$2i$的偶分支数, $\beta = \sum_{i=1}^{\infty} 2i\beta_{2i}$ 为$G \setminus S$中偶分支的顶点数. 令γ_i为S中度数为i的顶点数, $\gamma = \sum_{i=3}^{\infty}\gamma_i$为$S$中的顶点数. 令$\alpha'$为$G \setminus S$ 中恰好通过三条边与S相连的奇分支数. 令α^*和β^* 分别为$G \setminus S$中奇分支和偶分支中的度为3 的顶点数.

显然S和$G \setminus S$中奇分支之间的边数不超过S中所有顶点的度数和, 因此可得

$$qg - \alpha'(g-3) \leq \sum_{i=3}^{\infty} i\gamma_i = \sum_{i=g}^{\infty} i\gamma_i + 3\gamma_3.$$

根据图G的边数与顶点度的关系, 可以得到

$$\begin{aligned} 2m \geq& \alpha g - \alpha^*(g-3) + \beta g - \beta^*(g-3) + \sum_{i=3}^{\infty} i\gamma_i \\ =& \alpha g - \alpha^*(g-3) + \beta g - \beta^*(g-3) + \sum_{i=g}^{\infty} i\gamma_i + 3\gamma_3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(\alpha+\beta)g+\sum_{i=g}^{\infty}(i-2)\gamma_i+2\sum_{i=g}^{\infty}\gamma_i+g\gamma_3-(\alpha^*+\beta^*+\gamma_3)(g-3)\\
&\geq(\alpha+\beta)g+\sum_{i=g}^{\infty}\frac{(i-2)}{i}i\gamma_i+2\sum_{i=3}^{\infty}\gamma_i+(g-2)\gamma_3-k(g-3)\\
&\geq(\alpha+\beta)g+\frac{(g-2)}{g}\sum_{i=g}^{\infty}i\gamma_i+2\gamma+(g-2)\gamma_3-k(g-3)\\
&\geq(\alpha+\beta)g+\frac{(g-2)}{g}(\sum_{i=g}^{\infty}i\gamma_i+3\gamma_3)+2\gamma+\frac{g^2-5g+6}{g}\gamma_3-k(g-3)\\
&\geq(\alpha+\beta)g+\frac{(g-2)}{g}(qg-\alpha'(g-3))+2\gamma-k(g-3)\\
&=(\alpha+\beta)g+(g-2)q-\frac{\alpha'(g-2)(g-3)}{g}+2\gamma-k(g-3).
\end{aligned}
$$

对于G中包含μ条边的最大匹配, 将每个未匹配的顶点通过G中的边连接到一个已匹配的相邻顶点, 从而形成$C=\mu+def(G)$条边的覆盖. 根据$n=\alpha+\beta+\gamma$, $def(G)=q-\gamma$ 和$def(G)=n-2\mu$, 可推断出

$$
2C=2\mu+2def(G)=n+def(G)=\alpha+\beta+\gamma+q-\gamma=\alpha+\beta+q.
$$

另一方面, 根据欧拉公式可得

$$
\begin{aligned}
2f=&2m-2n+4\\
\geq&(\alpha+\beta)g+(g-2)q-\frac{\alpha'(g-2)(g-3)}{g}+2\gamma-k(g-3)-2(\alpha+\beta+\gamma)+4\\
=&(\alpha+\beta+q)(g-2)+4-\frac{\alpha'(g-2)(g-3)}{g}-k(g-3)\\
=&2C(g-2)+4-\frac{\alpha'(g-2)(g-3)}{g}-k(g-3).
\end{aligned}
$$

进而

$$
\begin{aligned}
C\leq&\frac{f-2}{g-2}+\frac{\alpha'(g-3)}{2g}+\frac{k(g-3)}{2(g-2)}\\
\leq&\frac{f-2}{g-2}+\frac{k(g-3)}{2g}+\frac{k(g-3)}{2(g-2)}\\
=&\frac{f-2}{g-2}+\frac{k(g-1)(g-3)}{g(g-2)}.
\end{aligned}
$$

于是可知所构造的覆盖至多含有$\lfloor\frac{f-2}{g-2}+\frac{k(g-1)(g-3)}{g(g-2)}\rfloor$ 条边.

综上所述, 定理2.3证明完毕. □

定理2.4. 设G是一个平面图. 图G有n个顶点, 围长为3, 且不含有长度大于3小于g的圈, 其中$4 \leq g \leq n$. 设G既包含k个3-圈又包含长度至少为5的面圈. 那么

$$\chi_f(G) \geq \begin{cases} \lceil \frac{2n-k}{4} \rceil + 1, & \text{若} g = 4, \\ \lceil \frac{g-3}{g-2} n - \frac{g-7+k(g-3)}{2(g-2)} \rceil, & \text{若} g \geq 5 \text{是奇数}, \\ \lceil \frac{g-3}{g-2} n - \frac{g-6+k(g-3)}{2(g-2)} \rceil, & \text{若} g \geq 6 \text{是偶数}. \end{cases}$$

此外, 如果G的面数是偶数, 那么

$$\chi_f(G) \geq \lceil \frac{g-3}{g-2} n - \frac{2-k(g-3)}{g-2} \rceil.$$

证明: 令f为G的面数, m为边数. 如果G是无圈的, 那么$\chi_f(G) = n-1$, 其符合定理2.4中的界限. 因此假设G含有圈. 因为移除一个桥不会影响G中的圈的长度和G的面结构(也不会影响顶点染色), 所以假设G是无桥的. 如果G含有孤立点, 那么对除孤立点外的部分染色, 并给孤立点一个新颜色即可. 因此假设G不含有孤立点.

设G^*是G的对偶图, 那么$n^* = f$且$f^* \leq n$. 因为G是无桥的, 所以G^*是无环的. 因为G^*的每组边割至少对应于G中的一个圈, 所以G^*的每组边割集的大小至少为3, 且不含有大于3小于g的边割集. 根据定理2.3可知, 当G^*不含有几乎完美匹配时, G^*含有一个至多有$\lfloor \frac{f^*-2}{g-2} + \frac{k(g-3)}{2(g-2)} \rfloor \leq \lfloor \frac{n-2}{g-2} + \frac{k(g-3)}{2(g-2)} \rfloor$条边的覆盖.

接下来考虑G^*含有几乎完美匹配的情形. 如果G^*含有几乎完美匹配, 那么通过添加一条G^*中的边来连接G^*中未匹配的顶点与其被匹配的相邻顶点, 得到一个G^* 的覆盖. 设G含有k'个长度为3的面圈, 那么该覆盖边数满足

$$\begin{aligned} \frac{n^*+1}{2} &= \frac{gf-2f}{2(g-2)} + \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{2m+k'(g-3)-2f}{2(g-2)} + \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{n}{g-2} + \frac{g-6+k'(g-3)}{2(g-2)} \\ &\leq \frac{n}{g-2} + \frac{g-6+k(g-3)}{2(g-2)}. \end{aligned}$$

如果g是奇数, 那么$fg-k'(g-3)+1\le 2m$. 从而该覆盖的边数满足

$$\begin{aligned}\frac{n^*+1}{2} &= \frac{gf-2f}{2(g-2)}+\frac{1}{2}\\ &\le \frac{2m+k'(g-3)-1-2f}{2(g-2)}+\frac{1}{2}\\ &\le \frac{n}{g-2}+\frac{g-7+k'(g-3)}{2(g-2)}\\ &\le \frac{n}{g-2}+\frac{g-7+k(g-3)}{2(g-2)}.\end{aligned}$$

如果G的面数是偶数, 那么G^*一定不含有几乎完美匹配, 通过引理2.2可得

$$\chi_f(G)\ge n-\lfloor\frac{n-2}{g-2}+\frac{k(g-3)}{2(g-2)}\rfloor=\lceil\frac{g-3}{g-2}n+\frac{2-k(g-3)}{g-2}\rceil.$$

如果$g\ge 5$是奇数, 可得

$$\chi_f(G)\ge n-\lfloor\frac{n}{g-2}+\frac{g-7+k(g-3)}{2(g-2)}\rfloor=\lceil\frac{g-3}{g-2}n-\frac{g-7+k(g-3)}{2(g-2)}\rceil.$$

如果$g\ge 6$是偶数, 可得

$$\chi_f(G)\ge n-\lfloor\frac{n}{g-2}+\frac{g-6+k(g-3)}{2(g-2)}\rfloor=\lceil\frac{g-3}{g-2}n-\frac{g-6+k(g-3)}{2(g-2)}\rceil.$$

最后, 剩下的情况为$g=4$并且G^*含有几乎完美匹配. 根据欧拉公式可得, G的面数至多为$n-3+\frac{k}{2}$. 由几乎完美匹配和一条额外的边组成的覆盖的边数至多为$\frac{n^*+1}{2}=\frac{f+1}{2}\le\frac{n-2+\frac{k}{2}}{2}$, 可得

$$\chi_f(G)\ge n-\lfloor\frac{n-2+\frac{k}{2}}{2}\rfloor=\lceil\frac{2n-k}{4}\rceil+1.$$

综上所述, 定理2.4证明完毕. □

3. 总结

本文受到文献 [26]的启发, 并在其基础上研究了一类既包含3-圈又包含长度至少为5的面圈的平面图的有效染色数. 本文首先通过研究平面图G的对偶图G^*的一个覆盖的边数的最大值. 其次根据引理2.2得到了包含3-圈又包含长度至少为5的面圈的平面图的有效染色数的下界. 这一研究也为今后继续研究平面图在其他面约束条件下的有效染色数提供了思路. 未来的研究方向, 主要是继续研究一类既包含3-圈又包含长度至少为5的面圈的平面图的有效染色数的最优下界, 以及探索包含不同长度的圈的平面图的有效染色数.

参考文献

[1] Czap, J. and Jendrol', S. (2017) Facially-constrained Colorings of Plane Graphs: A Survey. *Discrete Mathematics*, **340**, 2691-2703. https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.07.026

[2] Zykov, A.A. (1974) Hypergraphs. *Russian Mathematical Surveys*, **29**, 89-156. https://doi.org/10.1070/rm1974v029n06abeh001303

[3] Kündgen, A. and Ramamurthi, R. (2002) Coloring Face-Hypergraphs of Graphs on Surfaces. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **85**, 307-337. https://doi.org/10.1006/jctb.2001.2107

[4] Nakamoto, A., Negami, S., Ohba, K. and Suzuki, Y. (2016) Looseness and Independence Number of Triangulations on Closed Surfaces. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **36**, 545-554. https://doi.org/10.7151/dmgt.1870

[5] Negami, S. (2005) Looseness Ranges of Triangulations on Closed Surfaces. *Discrete Mathematics*, **303**, 167-174. https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.01.010

[6] Enami, K., Ozeki, K. and Yamaguchi, T. (2021) Proper Colorings of Plane Quadrangulations without Rainbow Faces. *Graphs and Combinatorics*, **37**, 1873-1890. https://doi.org/10.1007/s00373-021-02350-5

[7] Dvořák, Z., Z., Jendrol', S., Král', D. and Pap, G. (2009) Matchings and Nonrainbow Colorings. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **23**, 344-348. https://doi.org/10.1137/060675927

[8] Jendrol', S. (2006) Rainbowness of Cubic Plane Graphs. *Discrete Mathematics*, **306**, 3321-3326. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.06.012

[9] Jendrol', S. and Schrötter, Š. (2008) On Rainbowness of Semiregular Polyhedra. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **58**, 359-380. https://doi.org/10.1007/s10587-008-0021-z

[10] Alon, N. (1983) On a Conjecture of Erdős, Simonovits, and Sós Concerning AntiTheorems. *Journal of Graph Theory*, **7**, 91-94. https://doi.org/10.1002/jgt.3190070112

[11] Axenovich, M. and Kündgen, A. (2001) On a Generalized Anti-Ramsey Problem. *Combinatorica*, **21**, 335-349. https://doi.org/10.1007/s004930100000

[12] Burr, S.A., Erdős, P., Graham, R.L. and T. Sós, V. (1989) Maximal Antiramsey Graphs and the Strong Chromatic Number. *Journal of Graph Theory*, **13**, 263-282. https://doi.org/10.1002/jgt.3190130302

[13] Erdős, P., Simonovits, M. and Sós, V.T. (1975) Anti-Ramsey Theorems. In: Hajnal, A., Rado, R. and Sós, V.T., Eds., *Infinite and Finite Sets: To Paul Erdős on His 60th Birthday*, North-Holland, 633-643.

[14] Jiang, T. (2002) Edge-Colorings with No Large Polychromatic Stars. *Graphs and Combinatorics*, **18**, 303-308. https://doi.org/10.1007/s003730200022

[15] Jiang, T. and West, D. (2003) On the Erdős-Simonovits-Sós Conjecture about the Anti-Ramsey Number of a Cycle. *Combinatorics, Probability and Computing*, **12**, 585-598. https://doi.org/10.1017/s096354830300590x

[16] Jiang, T. and West, D.B. (2004) Edge-Colorings of Complete Graphs That Avoid Polychromatic Trees. *Discrete Mathematics*, **274**, 137-145. https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.09.002

[17] Simonovits, M. and Sós, V.T. (1984) On Restricted Colourings of K_n. *Combinatorica*, **4**, 101-110. https://doi.org/10.1007/bf02579162

[18] Diwan, A.A. (2002) Disconnected 2-Factors in Planar Cubic Bridgeless Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **84**, 249-259. https://doi.org/10.1006/jctb.2001.2079

[19] Dvořák, Z. and Král', D. (2001) On Planar Mixed Hypergraphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **8**, R35. https://doi.org/10.37236/1579

[20] Kobler, D. and Kündgen, A. (2001) Gaps in the Chromatic Spectrum of Face-Constrained Plane Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **8**, N3. https://doi.org/10.37236/1588

[21] Kündgen, A., Mendelsohn, E. and Voloshin, V. (2000) Colouring Planar Mixed Hypergraphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **7**, R60. https://doi.org/10.37236/1538

[22] Penaud, J.G. (1975) Une Propriété De Bicoloration Des Hypergraphes Planaires. Cahiers Centre Etudes Recherche Opér, 17, 345-349.

[23] Ramamurthi, R. and West, D.B. (2004) Maximum Face-Constrained Coloring of Plane Graphs. *Discrete Mathematics*, **274**, 233-240. https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.09.001

[24] Thomassen, C. (1994) Grötzsch's 3-Color Theorem and Its Counterparts for the Torus and the Projective Plane. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **62**, 268-279. https://doi.org/10.1006/jctb.1994.1069

[25] Král', D. (2004) On Maximum Face-Constrained Coloring of Plane Graphs with No Short Face Cycles. *Discrete Mathematics*, **277**, 301-307. https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.08.001

[26] Jungić, V., Král', D. and Škrekovski, R. (2006) Colorings of Plane Graphs with No Rainbow Faces. *Combinatorica*, **26**, 169-182. https://doi.org/10.1007/s00493-006-0012-3

[27] Dvořák, Z., Král′, D. and Škrekovski, R. (2009) NonColorings of 34and 5Plane Graphs. *Journal of Graph Theory*, **63**, 129-145. https://doi.org/10.1002/jgt.20414

[28] West, D.B. (2011) A Short Proof of the Berge-Tutte Formula and the Gallai-Edmonds Structure Theorem. *European Journal of Combinatorics*, **32**, 674-676. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2011.01.009