Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(2), 202-216
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.142064

Hans汉斯

具有干摩擦的双弹簧振子的全局动力学

毛睿婕

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2025年1月18日；录用日期：2025年2月11日；发布日期：2025年2月20日

摘 要

本文研究了一类具有干摩擦的双弹簧振子模型的全局动力学。首先，根据牛顿第二定律建立具有干摩擦的双弹簧振子模型的微分方程，求得系统的平衡点。接下来，通过 **Filippov** 理论证明了系统存在一个平衡点集或三个平衡点集。然后，再根据非光滑的 **Lyapunov** 函数和集值导数以及 **LaSalle** 不变原理等相关理论讨论了不同情况下平衡点集的渐近稳定性。最后，绘制分岔图分析了系统的分岔情况，并选取合适的参数进行数值模拟验证结论。

关键词

干摩擦，弹簧振子，**Filippov**系统，**Lyapunov** 函数，**LaSalle**不变原理

Global Dynamics of Double-Spring Oscillators with Dry Friction

Ruijie Mao

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Jan. 18^{th}, 2025; accepted: Feb. 11^{th}, 2025; published: Feb. 20^{th}, 2025

文章引用: 毛睿婕. 具有干摩擦的双弹簧振子的全局动力学[J]. 应用数学进展, 2025, 14(2): 202-216.
DOI: 10.12677/aam.2025.142064

Abstract

In this paper, the global dynamics of a class of double-spring oscillator model with dry friction is studied. Firstly, according to Newton's second law, the differential equation of the double-spring oscillator model with dry friction is established to obtain the equilibrium point of the system. Next, the Filippov correlation theory proves that there is one equilibrium set or three equilibrium sets in the system. Then, the asymptotic stability of the equilibrium set in different cases is discussed according to the non-smooth Lyapunov function, the set-valued derivative and LaSalle's invariant principle. Finally, the bifurcation diagram is drawn to analyze the bifurcation of the system, and the appropriate parameters are selected for numerical simulation to verify the conclusion.

Keywords

Dry Friction, Spring Oscillator, Filippov System, Lyapunov Functions, LaSalle Invariant Principle

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

1. 引言

在过去几十年中, 弹簧振子模型在物理学、工程学和力学等多个领域有重要的应用价值, 受到学者们的广泛关注 [1–3]. 在弹簧振子模型中, 摩擦导致的不连续振动影响难以忽视, 能产生丰富的动力学行为. 并且, 现实生活中的摩擦现象十分复杂, 根据不同情况分类有动摩擦和静摩擦, 滑动摩擦和滚动摩擦, 以及干摩擦和湿摩擦等. 为方便研究, 弹簧振子模型中的摩擦力大多用干摩擦来描述. 随着非线性动力学理论的不断发展, 人们对于带干摩擦的弹簧振子的动力学行为有了更深入的认识 [3]. 在理论上, 研究干摩擦对弹簧振子模型的影响 [4] 可以帮助我们更好地理解振动和干摩擦的相互作用机制. 在实际应用中, 如地震工程, 机械设计等领域, 对干摩擦振动的影响有深入的理解可以有助于设计和优化系统 [5].

近年来, 为了更好地掌握摩擦动力学原理, 减少摩擦对机械工程的影响, 许多学者开始研究干摩

擦影响下的弹簧振子模型. 文献 [6,7] 研究了干摩擦影响下分段光滑的弹簧振子系统, 完整分析了系统的全局动力学. 文献 [8] 分析了在干摩擦影响下一类物体置于水平面的弹簧振子模型的全局动力学行为. 文献 [9–11] 提出了一类新的光滑不连续原型振子. 值得注意的是, 文献 [9] 提出的双弹簧振子模型有两个弹力相等的可拉伸和压缩的弹簧, 分析了极限情况下系统的动力学行为. 但是, 在实际工程应用中, 很难保证两个弹簧弹力完全相等. 当两个弹簧弹力不相等时, 两个弹簧所连接的物块会与非光滑的竖直杆发生挤压产生摩擦力, 在摩擦力的影响下会产生更丰富的动力学行为. 基于此动机, 本文将文献 [9] 提出的双弹簧模型进行推广, 考虑摩擦力对系统动力学行为的影响, 完整分析了一类具有干摩擦的双弹簧振子的动力学行为.

本文的其余部分如下：在第 2 节中, 我们建立弹簧振子的数学物理模型并给出了 Filippov 系统的相关理论. 在第 3 节中, 主要讨论平衡点集的存在性和稳定性. 在最后一节, 绘制系统的分岔图并进行数值模拟.

2. 模型介绍及预备知识

本文研究的弹簧振子模型示意图如图 1所示. 质量为 m 的物块的两侧分别通过一个刚度为 k_1 和一个刚度为 k_2 的可拉伸和压缩的弹簧与固定点连接, 弹簧的刚度 k_1 和 k_2 不相等, 为方便讨论记 $k_1 > k_2$. L 为弹簧的原长, l 为固定点到非光滑竖直杆的距离. 假设物块始终在竖直固定杆上运动, 记竖直向下的方向为正方向.

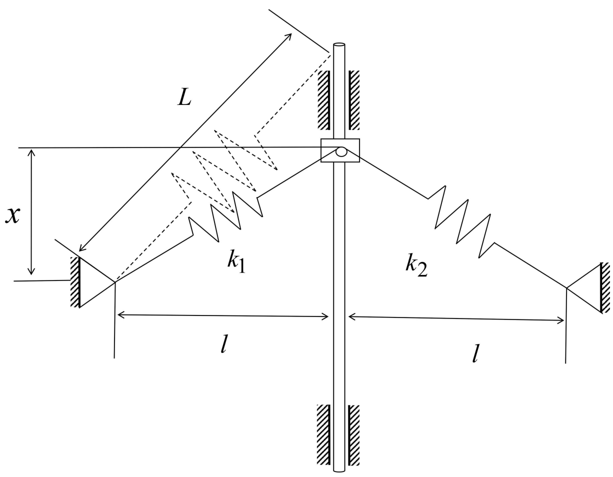

Figure 1. Schematic diagram of the model

图 1. 模型示意图

设物块随时间运动的位置, 速度, 加速度分别为 x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, 物块和非光滑的竖直固定杆之间的摩擦系数为 μ. 根据牛顿第二定律可得

$$m\ddot{x} = F_T + F_S$$

其中, F_T 为物块运动方向上所受的弹力, F_S 为物块与非光滑的竖直固定杆之间库仑摩擦力, 表达式分别为

$$F_T = -(k_1 + k_2)x \left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2 + l^2}}\right),$$

$$F_S \in -\mu\left(k_1-k_2\right) l\left|1-\frac{L}{\sqrt{x^2+l^2}}\right| \operatorname{Sign}(\dot{x}),$$

整理得到如下系统：

$$m\ddot{x}+\left(k_1+k_2\right) x\left(1-\frac{L}{\sqrt{x^2+l^2}}\right) \in -\mu\left(k_1-k_2\right) l\left|1-\frac{L}{\sqrt{x^2+l^2}}\right| \operatorname{Sign}(\dot{x}). \tag{2.1}$$

$\operatorname{Sign}(\dot{x})$的表达式为:

$$\operatorname{Sign}(\dot{x})=\begin{cases}\{1\}, & \dot{x}>0,\\ [-1,1], & \dot{x}=0,\\ \{-1\}, & \dot{x}<0.\end{cases}$$

令 $\dot{x}=y$, 则系统 (2.1) 可等价为

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}\in-\frac{k_1+k_2}{m} x\left(1-\frac{L}{\sqrt{x^2+l^2}}\right)-\frac{\mu\left(k_1-k_2\right)}{m} l\left|1-\frac{L}{\sqrt{x^2+l^2}}\right| \operatorname{Sign}(\dot{x}).\end{cases} \tag{2.2}$$

系统 (2.2) 可进一步化为

$$F(x, y)=\left(y,-\frac{k_1+k_2}{m} x\left(1-\frac{L}{\sqrt{x^2+l^2}}\right)-\frac{\mu\left(k_1-k_2\right)}{m} l\left|1-\frac{L}{\sqrt{x^2+l^2}}\right| \operatorname{Sign}(\dot{x})\right)^{\mathrm{T}}.$$

在这里, T 表示转置, 系统 (2.1) 也可表示为

$$(\dot{x}, \dot{y})^T \in F(x, y). \tag{2.3}$$

由于向量场的不连续性, 系统 (2.3) 的解主要采用 Filippov 所提出的微分包含的方式来定义, 参见文献 [12]. 下面讨论系统 (2.3) 的子系统动力学.

当 $l \geq L$ 时, $1-\frac{L}{\sqrt{x^2+l^2}} \geq 0$ 恒成立, $\mathbb{R}^2$ 被分为两个区域, $G_+=\left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y>0\right\}$ 和 $G_-=\left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y<0\right\}$. 系统 (2.3) 有以下两个子系统:

$$F_+:\quad \begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-f^+(x),\end{cases} \quad y>0, \tag{2.4}$$

$$F_-:\quad \begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-f^-(x), \quad y<0.\end{cases} \tag{2.5}$$

其中,

$$f^+(x)=\frac{k_1+k_2}{m} x\left(1-\frac{L}{\sqrt{x^2+l^2}}\right)+\frac{\mu\left(k_1-k_2\right)}{m} l\left(1-\frac{L}{\sqrt{x^2+l^2}}\right), \tag{2.6}$$

$$f^-(x)=\frac{k_1+k_2}{m} x\left(1-\frac{L}{\sqrt{x^2+l^2}}\right)-\frac{\mu\left(k_1-k_2\right)}{m} l\left(1-\frac{L}{\sqrt{x^2+l^2}}\right). \tag{2.7}$$

系统 (2.3) 的切换线为 $\Sigma = \{(x, y) \mid y = 0\}$, 切换线上的方向向量为 $\overrightarrow{n_1} = (0, 1)$, 为了后面分析切换线 Σ 附近的动力学行为, 在此引入李导数概念, 对于任意的 $p \in h^{-1}(0)$, $\nabla h(p) \neq 0$, 由李导数定义知, h 关于向量场的李导数可表示为

$$L_F h = \langle \nabla h, F \rangle,$$

其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示标准内积, 而 h 关于向量场的 $m \geq 2$ 阶方向导数可表示为 $L_F^m h = \langle \nabla L_F^{m-1} h, F \rangle$.

定义2.1 [13] 假设 ∇h 总指向 G_+, 则 Σ 可以分为以下三个区域:

(1) 若对于切换线 Σ 上的点 X 满足 $L_{F_+}h(X) \cdot L_{F_-}h(X) > 0$, 且 $X \in \Sigma_c$, 则称 Σ_c 为穿越域;

(2) 若对于切换线 Σ 上的点 X 满足 $L_{F_+}h(X) \leq 0$, $L_{F_-}h(X) \geq 0$, 且 $X \in \Sigma_s$, 则称 Σ_s 为吸引滑模域;

(3) 若对于切换线 Σ 上的点 X, 满足 $L_{F_+}h(X) \geq 0$, $L_{F_-}h(X) \leq 0$, 且 $X \in \Sigma_e$, 则称 Σ_e 为排斥滑模域.

为了确定 Σ_s 或 Σ_e 上解的性态, 根据 Filippov 凸方法 [14]知, 系统 (2.3) 在滑模区域上的动力学方程(即滑模方程)为:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F_s(X) = (1 - \lambda)F_+(X) + \lambda F_-(X),$$

其中, $\lambda = \frac{L_{F_+}h(X)}{L_{F_+}h(X) - L_{F_-}h(X)} \in (0, 1)$.

通过简单计算, 当 $l > L$ 时, 系统 (2.4) 有唯一的平衡点 $(-x_1, 0)$, 系统 (2.5) 有唯一的平衡点 $(x_1, 0)$. 当 $l = L$ 时, 系统 (2.4) 有两个平衡点 $(-x_1, 0)$ 和 $(0, 0)$, 系统 (2.5) 有两个平衡点 $(x_1, 0)$ 和 $(0, 0)$, 其中, $x_1 = \frac{\mu l(k_1 - k_2)}{k_1 + k_2}$.

根据平衡点与切换线的相对位置, 有如下定义.

定义2.2 [15] 对于系统 (2.3) 中的平衡点, 有

(1) 满足下面条件之一: (i) $X \in G_+, F_+(X) = 0$; (ii) $X \in G_-, F_-(X) = 0$, 则称平衡点 X 是系统 (2.3) 的实平衡点;

(2) 满足下面条件之一: (i) $X \in G_-, F_+(X) = 0$; (ii) $X \in G_+, F_-(X) = 0$, 则称平衡点 X 是系统 (2.3) 的虚平衡点;

(3) 当 $X \in \Sigma_s \cup \Sigma_e$ 时, 满足 $F_s(X) = 0$ 时, 称平衡点 X 是系统 (2.3) 的伪平衡点;

(4) 当 $X \in \Sigma$ 时, 且满足 $F_+(X) = 0$ 或 $F_-(X) = 0$, 则称 X 是系统 (2.3) 的边界平衡点;

(5) 当 $X \in \Sigma$ 时, 且满足下面条件之一: (i) $L_{F_+}h(X) = 0, F_+(X) \neq 0$; (ii) $L_{F_-}h(X) = 0, F_-(X) \neq 0$, 则称 X 是系统 (2.3) 的切点.

为了便于讨论平衡点的稳定性, 文献 [8] 对文献 [16] 进行了推广, 通过弱化稳定性的一些条件来改进文献 [16] 中的定理. 从而, 不需要将一个平衡点转变为$(0, 0)^T$, 也不要求函数 V 在整个平面内是正定的, 得到了如下引理.

引理2.3 设$(x^*, y^*)^T$ 是系统(2.3) 的一个平衡点, 假定存在$(x^*, y^*)^T$ 的一个邻域 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ 和一个函数$V : D \to \mathbb{R}$, 使得V 是局部Lipschitz 连续的、正则的, 且在U 内点$(x^*, y^*)^T$ 的附近是正定的.

若对于所有的$(x,y)^T \in U$, 有

$$\max \dot{V}^{(2.3)}(x,y) \le 0,$$

则平衡点$(x^*,y^*)^T$ 是稳定的.

当 $L > l$ 时, 系统 (2.3) 有三条切换线:

$$\Sigma_1 = \{(x,y)^T | y = 0\}, \quad \Sigma_2 = \{(x,y)^T | x = \sqrt{L^2 - l^2}\}, \quad \Sigma_3 = \{(x,y)^T | x = -\sqrt{L^2 - l^2}\},$$

切换线上的方向向量分别为 $\overrightarrow{n_1} = (0,1), \overrightarrow{n_2} = (1,0), \overrightarrow{n_3} = (1,0)$, 所以 $\mathbb{R}^2$ 被分为六个区域:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, x > \sqrt{L^2 - l^2}\right\}, \\
G_2 &= \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, -\sqrt{L^2 - l^2} < x < \sqrt{L^2 - l^2}\right\}, \\
G_3 &= \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, x < -\sqrt{L^2 - l^2}\right\}, \\
G_4 &= \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, x > \sqrt{L^2 - l^2}\right\}, \\
G_5 &= \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, -\sqrt{L^2 - l^2} < x < \sqrt{L^2 - l^2}\right\}, \\
G_6 &= \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, x < -\sqrt{L^2 - l^2}\right\}.
\end{aligned}$$

六个区域的子系统分别为

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f^+(x), \end{cases} \quad (x,y)^T \in G_1,$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f^-(x), \end{cases} \quad (x,y)^T \in G_2,$$

$$S_3 : \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f^+(x), \end{cases} \quad (x,y)^T \in G_3,$$

$$S_4 : \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f^-(x), \end{cases} \quad (x,y)^T \in G_4,$$

$$S_5 : \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f^+(x), \end{cases} \quad (x,y)^T \in G_5,$$

$$S_6:\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-f^{-}(x),\end{cases}\qquad (x,y)^T\in G_6.$$

通过简单计算, 子系统 S_i 有三个平衡点:

$$\begin{aligned}
&S_1:(-x_1,0),(-x_2,0),(x_2,0);\\
&S_2:(\ x_1\ ,0),(-x_2,0),(x_2,0);\\
&S_3:(-x_1,0),(-x_2,0),(x_2,0);\\
&S_4:(\ x_1\ ,0),(-x_2,0),(x_2,0);\\
&S_5:(-x_1,0),(-x_2,0),(x_2,0);\\
&S_6:(\ x_1\ ,0),(-x_2,0),(x_2,0).
\end{aligned}$$

其中,

$$x_1=\frac{\mu l(k_1-k_2)}{k_1+k_2},\ x_2=\sqrt{L^2-l^2}.$$

x_1 和 x_2 的大小关系取决于参数 l 和 L 的关系. 当 $l<L<Pl$, $x_1>x_2$; 当 $L=Pl, x_1=x_2$; 当 $L>Pl$, $x_1<x_2$. 其中,

$$P=\frac{\sqrt{\mu^2\left(k_1-k_2\right)^2+\left(k_1+k_2\right)^2}}{k_1+k_2}>1.$$

3. 平衡点集的存在性和稳定性

由于 $l\geq L$ 时,系统 (2.3) 只有一条切换线, $l<L$ 时,系统 (2.3) 有三条切换线. 接下来, 我们分 $l\geq L$ 和 $l<L$ 两种情况来讨论系统 (2.3) 的全局动力学.

情形1: $l\geq L$

系统 (2.3) 的切换线为 $\Sigma=\{(x,y)\mid y=0\}$, 切换线上的方向向量为$\overrightarrow{n}=(0,1)$. 根据滑模域的定义, 通过简单计算可得, 系统 (2.3) 的滑模域为

$$\Sigma_s=\{(x,0)\mid x\in(-x_1,x_1)\}$$

进一步, Σ_s 的动力学取决于滑模方程

$$\dot{x}=y,\quad y=0.$$

显然, 滑模域上的每一点都是伪平衡点, 这意味着 Σ_s 包含了系统 (2.3) 的伪平衡点集, 本文简记为平衡点集.

接下来, 将根据 Filippov 理论和非光滑的 Lyapunov 函数以及 LaSalle 不变原理讨论平衡点集的存在性和稳定性, 当 $l\geq L$ 时, 系统 (2.3) 平衡点集的存在性和稳定性由定理3.1给出.

定理3.1 当 $l\geq L$ 时, 系统 (2.3)有唯一的平衡点集 $\bar{E}=\{(x,0)^T|-x_1\leq x\leq x_1\}$, 且平衡点集 $\bar{E}$ 是全局渐近稳定的.

证明 当 $l \geq L$ 时, 滑模域为 $\{(x,0) \mid x \in [-x_1, x_1]\}$, 此时系统 (2.3) 存在唯一的平衡点集

$$\bar{E} = \{(x,0)^T | -x_1 \leq x \leq x_1\}.$$

且平衡点集是吸引的, 其在切换线 Σ 附近的向量场如图 2所示证明平衡点集 $\bar{E}$ 的稳定性, 需要证明平衡点集中任意一点都是稳定的. 在平衡集 $\bar{E}$ 中任取一个平衡点 $(\bar{x}^*, 0)^T \in \bar{E}$, 考虑一个非光滑函数

$$V_{\bar{x}^*}(x,y) = \begin{cases} \int_{\bar{x}^*}^{x} f^+(\rho)\mathrm{d}\rho + \frac{1}{2}y^2, & x \geq \bar{x}^*, \\ \int_{\bar{x}^*}^{x} f^-(\rho)\mathrm{d}\rho + \frac{1}{2}y^2, & x < \bar{x}^*. \end{cases} \tag{3.1}$$

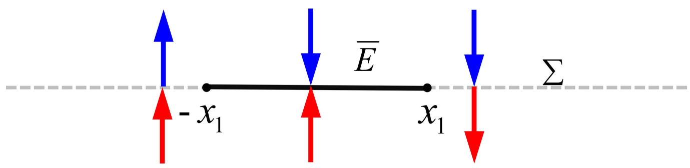

Figure 2. When $l \geq L$, the vector field of the system (2.3) near $Sigma$

图 2. 当 $l \geq L$ 时, 系统 (2.3) 在 Σ 附近的向量场

此时, 有 $V_{\bar{x}^*}(\bar{x}^*, 0) = 0$, 且 $V_{\bar{x}^*}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内是局部 Lipschitz 连续的、正则的, 此外, $V_{\bar{x}^*}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内点 $(\bar{x}^*, 0)^T$ 附近是正定的. 经过简单计算得 $V_{\bar{x}^*}$ 的广义梯度为

$$\partial V_{\bar{x}^*} = \begin{cases} \{(f^+(x), y)^T\}, & x > \bar{x}^*, \\ \{(f^-(x), y)^T\}, & x < \bar{x}^*, \\ \{(\xi, y)^T \mid f^-(x) \leq \xi \leq f^+(x)\}, & x = \bar{x}^*. \end{cases}$$

为方便起见, 微分包含 (2.3) 的集值映射 $F(x,y)$ 可重新表述为

$$F(x,y) = \begin{cases} \left\{(y, -f^+(x))^{\mathrm{T}}\right\}, & y > 0, \\ \left\{(y, -f^-(x))^{\mathrm{T}}\right\}, & y < 0, \\ \left\{(y, -\xi)^{\mathrm{T}} \mid f^-(x) \leq \xi \leq f^+(x)\right\}, & y = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

则可以得到 $V_{\bar{x}^*}$ 的集值导数为

$$\dot{\bar{V}}_{\bar{x}^*} = \begin{cases} 0, & x > \bar{x}^*, y \geq 0, \\ y(f^+(x) - f^-(x)), & x > \bar{x}^*, y < 0, \\ y(f^-(x) - f^+(x)), & x < \bar{x}^*, y > 0, \\ 0, & x < \bar{x}^*, y \leq 0, \\ \emptyset, & x = \bar{x}^*, y \neq 0, \\ 0, & x = \bar{x}^*, y = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

当 $l \geq L$ 时, $f^+(x) - f^-(x) \geq 0$, 所以有

$$\max \dot{\bar{V}}_{\bar{x}^*}^{(3.3)}(x, y) \leq 0. \tag{3.4}$$

由引理2.3知, 平衡点 $(\bar{x}^*, 0)^T$是稳定的, 故平衡点集 $\bar{E}$ 是稳定的. 并且, $V_{\bar{x}^*}$ 是系统 (2.3) 的一个 Lyapunov 函数, 此时,

$$Z_V^{(3.3)} = \{(x,y)^T \mid x > \bar{x}^*, y \geq 0\} \cup \{(x,y)^T \mid x < \bar{x}^*, y \leq 0\} \cup (\bar{x}^*, 0)^T,$$

而 $Z_V^{(3.3)}$的最大弱不变子集为 $\bar{E}$, 由 $LaSalle$ 不变原理知, $\bar{E}$ 是全局吸引的, 且 $\bar{E}$ 是稳定的, 故 $\bar{E}$ 是全局渐近稳定的.

情形2: $l < L$

系统 (2.3) 有三条切换线, 分别为 $\Sigma_1 = \{(x,y)^T \mid y = 0\}, \Sigma_2 = \{(x,y)^T \mid x = \sqrt{L^2 - l^2}\}, \Sigma_3 = \{(x,y)^T \mid x = -\sqrt{L^2 - l^2}\}$. 通过计算易知, 切换线 Σ_2 和 Σ_3 上无滑模, 故主要讨论 Σ_1 上的滑模域. 当 $l < L \leq Pl$ 时, 系统 (2.3) 的滑模域为

$$\Sigma_s = \{(x, 0) \mid x \in [-x_1, x_1]\}.$$

当 $L > Pl$ 时, 系统 (2.3) 的滑模域为

$$\Sigma_s = \{(x, 0) \mid x \in [-x_1, x_1] \cup [-x_2] \cup [x_2]\}.$$

此时系统 (2.3) 在切换线 Σ_1 上的滑模动力学方程为

$$\dot{x} = y, \; y = 0.$$

同样地, 滑模域上每一点都是伪平衡点, 滑模域及其端点构成平衡点集. 当 $l < L$ 时, 系统 (2.3) 平衡点集的存在性和稳定性由定理3.2给出.

定理3.2 当 $l < L$ 时, 有以下结论成立:

(i) 当 $l < L \leq Pl$ 时, 系统 (2.3) 有唯一的平衡点集 $\tilde{E} = \{(x,0)^T| - x_1 \leq x \leq x_1\}$ 是全局渐近稳定的;

(ii) 当 $L > Pl$ 时, 系统 (2.3) 有三个平衡点集 $E_1 = \{(x_2, 0)^T\}$, $E_2\{(-x_2, 0)^T\}$, $\hat{E} = \{(x,0)^T| - x_1 \leq x \leq x_1\}$, 其中 E_1 和 E_2 是渐近稳定的, $\hat{E}$ 不稳定.

证明 对于 (i), 当 $l < L \leq Pl$ 时, $-x_1 \leq -x_2 < 0 < x_2 \leq x_1$, 滑模域为 $\{(x, 0) \mid x \in (-x_1, x_1)\}$, 此时系统 (2.3) 存在一个平衡点集

$$\tilde{E} = \{(x,0)^T| - x_1 \leq x \leq x_1\}.$$

且平衡点集是吸引的, 其在切换线 Σ 附近的向量场如图 3所示接下来, 分段取 Lyapunov 函数证明

DOI: 10.12677/aam.2025.142064

平衡点集的稳定性. 在平衡集 $\tilde{E}$ 中任取一个平衡点 $(\tilde{x}^*,0)^T \in \tilde{E}$, 且满足条件 $-x_1 \le \tilde{x}^* \le -x_2$ 或 $x_2 \le \tilde{x}^* \le x_1$, 考虑一个非光滑函数

$$V_{\tilde{x}^*}(x,y)=\begin{cases}\int_{\tilde{x}^*}^{x} f^+(\rho)\mathrm{d}\rho+\frac{1}{2}y^2, & x\ge \tilde{x}^*,\\ \int_{\tilde{x}^*}^{x} f^-(\rho)\mathrm{d}\rho+\frac{1}{2}y^2, & x< \tilde{x}^*.\end{cases} \tag{3.5}$$

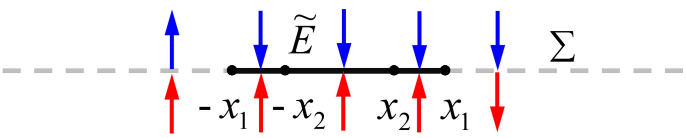

Figure 3. When $l<L$, the vector field of the system (2.3) near $Sigma$

图 3. 当 $l<L$ 时, 系统 (2.3) 在 Σ 附近的向量场

此时, 有 $V_{\tilde{x}^*}(\bar{x}^*,0)=0$, 且 $V_{\tilde{x}^*}$在 $\mathbb{R}^2$ 内是局部 Lipschitz 连续的、正则的, 此外, $V_{\tilde{x}^*}$在 $\mathbb{R}^2$内点 $(\tilde{x}^*,0)^T$附近是正定的. 经过简单计算得 $V_{\tilde{x}^*}$的广义梯度为

$$\partial V_{\tilde{x}^*}=\begin{cases}\{(f^+(x),y)^T\}, & x>\tilde{x}^*,\\ \{(f^-(x),y)^T\}, & x<\tilde{x}^*,\\ \{(\xi,y)^T \mid f^-(x)\le\xi\le f^+(x)\}, & x=\tilde{x}^*.\end{cases}$$

微分包含 (2.3) 的集值映射 $F(x,y)$ 可重新表述为

$$F(x,y)=\begin{cases}\left\{(y,-f^+(x))^{\mathrm{T}}\right\}, & y>0,\\ \left\{(y,-f^-(x))^{\mathrm{T}}\right\}, & y<0,\\ \left\{(y,-\xi)^{\mathrm{T}} \mid f^-(x)\le\xi\le f^+(x)\right\}, & y=0.\end{cases} \tag{3.6}$$

则可以得到 $V_{\tilde{x}^*}$的集值导数为

$$\dot{V}_{\tilde{x}^*}=\begin{cases}0, & x>\tilde{x}^*, y\ge 0,\\ y(f^+(x)-f^-(x)), & x>\tilde{x}^*, y<0,\\ y(f^-(x)-f^+(x)), & x<\tilde{x}^*, y>0,\\ 0, & x<\tilde{x}^*, y\le 0,\\ \emptyset, & x=\tilde{x}^*, y\ne 0,\\ 0, & x=\tilde{x}^*, y=0.\end{cases} \tag{3.7}$$

当 $-x_1 \le \tilde{x}^* \le -x_2$ 或 $x_2 \le \tilde{x}^* \le x_1$ 时, $f^+(x)-f^-(x)\ge 0$, 所以有

$$\max \dot{V}_{\tilde{x}^*}^{(3.7)}(x,y)\le 0. \tag{3.8}$$

当 $-x_2 < x < x_2$ 时, 在平衡集 $\tilde{E}$ 中任取一个平衡点 $(\tilde{x}^*, 0)^T \in \tilde{E}$, 考虑一个非光滑函数

$$V_{\tilde{x}^*}(x,y) = \begin{cases} \int_{\tilde{x}^*}^{x} f^-(\rho)\mathrm{d}\rho + \frac{1}{2}y^2, & x \geq \tilde{x}^*, \\ \int_{\tilde{x}^*}^{x} f^+(\rho)\mathrm{d}\rho + \frac{1}{2}y^2, & x < \tilde{x}^*. \end{cases} \tag{3.9}$$

则可以得到 $V_{\tilde{x}^*}$ 的集值导数为

$$\dot{\overline{V}}_{\tilde{x}^*} = \begin{cases} 0, & x > \tilde{x}^*, y \geq 0, \\ y(f^-(x) - f^+(x)), & x > \tilde{x}^*, y < 0, \\ y(f^+(x) - f^-(x)), & x < \tilde{x}^*, y > 0, \\ 0, & x < \tilde{x}^*, y \leq 0, \\ \emptyset, & x = \tilde{x}^*, y \neq 0, \\ 0, & x = \tilde{x}^*, y = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

$-x_2 < \tilde{x}^* < x_2$ 时, $f^+(x) - f^-(x) < 0$, 所以有

$$\max \dot{\overline{V}}_{\tilde{x}^*}^{(3.10)}(x,y) \leq 0. \tag{3.11}$$

通过两次集值导数的计算, 由引理 2 知, 平衡点 $(\tilde{x}^*, 0)^T$是稳定的, 故平衡点集 $\tilde{E}$ 是稳定的. 并且, $V_{\tilde{x}^*}$ 是系统 (2.3) 的 Lyapunov 函数, 此时,

$$Z_V = \{(x,y)^T \mid x > \tilde{x}^*, y \geq 0\} \cup \{(x,y)^T \mid x < \tilde{x}^*, y \leq 0\} \cup (\tilde{x}^*, 0)^T,$$

而 Z_V 的最大弱不变子集为 $\tilde{E}$, 由 *LaSalle* 不变原理知, $\tilde{E}$ 是全局吸引的, 又因 $\tilde{E}$ 是稳定的, 故 $\tilde{E}$ 在是全局渐近稳定的.

下面证明 (ii) . 当 $L \geq Pl$ 时, 有$-x_2 < -x_1 < 0 < x_1 < x_2$, 滑模域为 $\{(x,0) \mid x \in [-x_1, x_1]\}$. 此外, 系统 (2.3) 还有两个孤立的平衡点 $(x_2, 0)^T$ 和 $(-x_2, 0)^T$, 故系统 (2.3) 有三个平衡点集 $E_1 = \{(x_2, 0)^T\}$, $E_2 = \{(-x_2, 0)^T\}$, $\hat{E} = \{(x, 0)^T \mid -x_1 \leq x \leq x_1\}$, 系统 (2.3) 在切换线 Σ 附近的向量场如图 4所示接下来, 分别证明 $E_1, E_2, \hat{E}$ 的稳定性. 对于 E_1, 考虑 Lyapunov 函数

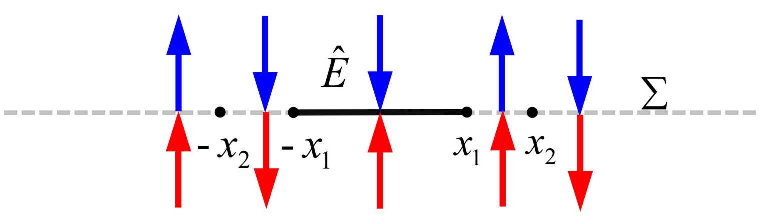

Figure 4. When $l > L$, the vector field of the system (2.3) near *Sigma*
图 4. 当 $l > L$ 时, 系统 (2.3) 在 Σ 附近的向量场

$$V_{x_2}(x,y)=\begin{cases}\int_{x_2}^{x} f^{+}(\rho)\mathrm{d}\rho+\frac{1}{2}y^2, & x\geq x_2 \text{ 或} x\leq -x_2\\ \int_{x_2}^{x} f^{-}(\rho)\mathrm{d}\rho+\frac{1}{2}y^2, & -x_2<x<x_2\end{cases} \tag{3.12}$$

沿系统 (2.3) 求导可以得到

$$\dot{V}_{x_2}=\begin{cases}0, & y\geq 0, x\geq x_2 \text{ 或} x\leq -x_2,\\ y(f^{+}(x)-f^{-}(x)), & y<0, x\geq x_2 \text{ 或} x\leq -x_2,\\ 0, & y\geq 0, -x_2<x<x_2,\\ y(f^{-}(x)-f^{+}(x)), & y<0, -x_2<x<x_2.\end{cases}$$

又因为当 $x\geq x_2$ 或 $x\leq -x_2$ 时, 有 $f^{+}(x)>f^{-}(x)$, 当 $-x_2<x<x_2$ 时, 有 $f^{+}(x)<f^{-}(x)$, 故可得$\dot{V}_{x_2}\leq 0$. 根据 *LaSalle* 不变原理可知, 平衡点集 E_1 是渐近稳定的. 对于 E_2, 类似于 E_1 的证明过程可证得 E_2 是渐近稳定的. 对于 $\hat{E}$, 类似于 (i) 的证明, 取 Lyapunov 函数 (3.9), 当 $-x_1<\hat{x}^*<x_1$ 时, 有 $\max\dot{V}_{\hat{x}^*}\leq 0$, 平衡点 $(\hat{x}^*,0)^T$ 是稳定的, 但是此时 $(-x_1,0)^T$ 和 $(x_1,0)^T$ 不稳定, 故平衡点集 $\hat{E}$ 不稳定.

4. 数值模拟与分岔分析

前面的结论表明, 系统 (2.3) 是结构不稳定的. 为了验证上一节的结论, 本节将选取 $L>0$ 和 $l>0$ 为分支参数, 固定参数 $m=1,\mu=1,k_1=4,k_2=2$. 在参数平面 (l,L) 中, 发现有两条余维一分岔曲线 $\mathcal{L}_1=\{(l,L)|L=l,\}$ $\mathcal{L}_2=\{(l,L)|L=Pl\}$. 如图 5 所示, 两条参数曲线把参数平面分为三个区域 G_1、 G_2、 G_3, 其中,

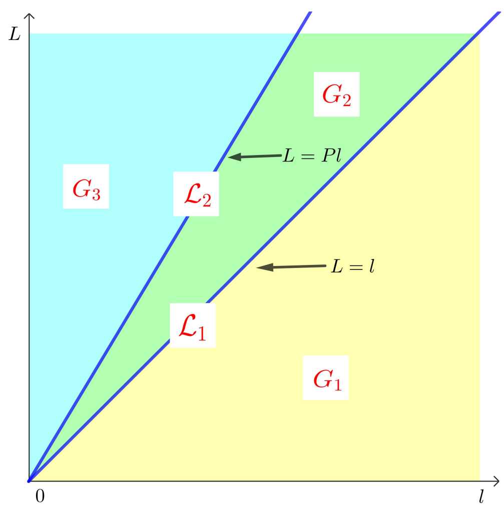

Figure 5. Branching plot of system (2.3) on the parameter plane (l,L)

图 5. 系统 (2.3) 在参数平面 (l,L) 上的分支图

$$G_1 = \{(l, L)|0 < L < l\},$$

$$G_2 = \{(l, L)|l < L \leq Pl\},$$

$$G_3 = \{(l, L)|L \geq Pl\},$$

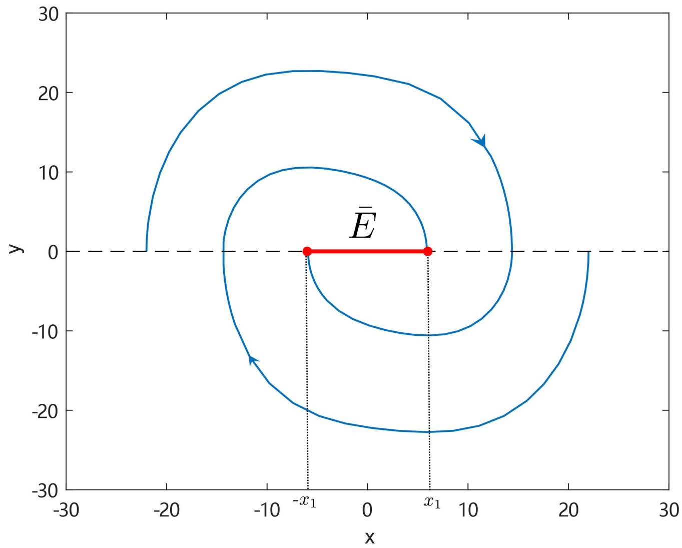

Figure 6. When $L \leq l$, the phase plot of the system (2.3)

图 6. 当 $L \leq l$ 时, 系统 (2.3) 的相位图

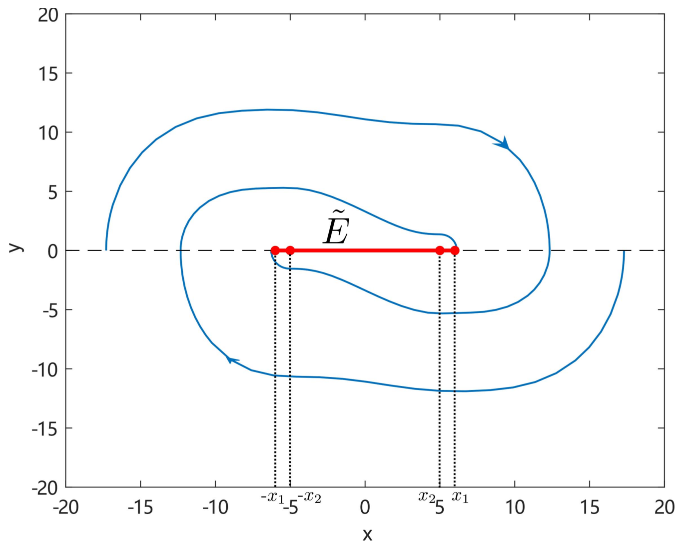

Figure 7. When $l < L \leq Pl$, the phase plot of the system (2.3)

图 7. 当 $l < L \leq Pl$ 时, 系统 (2.3) 的相位图

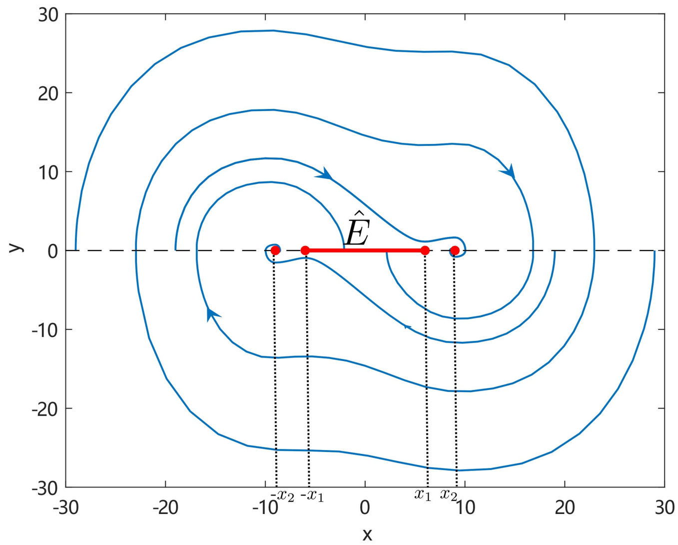

Figure 8. When $L > Pl$, the phase plot of the system (2.3)
图 8. 当 $L > Pl$ 时, 系统 (2.3) 的相位图

当参数 (l, L) 穿越分岔曲线 $\mathcal{L}_1$ 从区域 G_1 到达 G_2 时, 系统 (2.3) 平衡点的个数发生改变. 穿越分岔曲线 $\mathcal{L}_2$ 从区域 G_2 到达 G_3 , 系统 (2.3) 平衡点集的个数发生改变. 在区域 G_1、 G_2、 G_3 中, 分别取特殊参数值来验证定理.当参数取区域 G_1 内的一点 $(l, L) = (12, 10)$ 时, 满足定理 3 中的条件, 此时存在唯一的平衡点集 $\bar{E}$, 且 $\bar{E}$ 是全局渐近稳定的, 如图 6所示;当参数取区域 G_2 内的一点 $(l, L) = (12, 13)$ 时, 满足定理 3 中 (i) 的条件, 此时存在一个平衡点集 $\tilde{E}$ 是全局渐近稳定的, 如图7所示;当参数取区域 G_3 内的一点 $(l, L) = (12, 15)$ 时, 满足定理 3 中 (ii) 的条件, 此时存在三个平衡点集, E_1 和 E_1 是渐近稳定的, $\hat{E}$ 不稳定, 如图 8所示.

基金项目

长沙理工大学研究生科研创新项目（CSLGCX23104）。

参考文献

[1] 谢建华, 乐源, 李登辉. 非线性动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2018.

[2] Zhuravlev, V.F. (2010) History of the Law of Dry Friction. *Doklady Physics*, **55**, 344-345. https://doi.org/10.1134/s1028335810070086

[3] 徐世浩, 张雄. 弹簧振子在光滑水平面内的运动规律[J]. 大学物理, 2020, 39(5): 52-57, 69.

[4] Abdullah, M., Rahmayanti, H.D., Yuliza, E. and Munir, R. (2023) The Stable and Unstable Oscillations of a Rod Attached to Many Springs. *European Journal of Physics*, **44**, Article 055004. https://doi.org/10.1088/1361-6404/acdb0f

[5] Beatty, M.F. (2009) Small Longitudinal Oscillations of a Load on an Incompressible, Isotropic Limited Elastic Spring. *International Journal of Engineering Science*, **47**, 1110-1118. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2008.06.009

[6] Chen, H. and Xie, J. (2016) Harmonic and Subharmonic Solutions of the SD Oscillator. *Nonlinear Dynamics*, **84**, 2477-2486. https://doi.org/10.1007/s11071-016-2659-7

[7] Chen, H., Tang, Y. and Wang, Z. (2022) The Discontinuous Limit Case of an Archetypal Oscillator with a Constant Excitation and Van Der Pol Damping. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **438**, Article 133362. https://doi.org/10.1016/j.physd.2022.133362

[8] Wang, J., Huang, W. and Huang, L. (2023) Global Dynamics and Bifurcation for a Discontinuous Oscillator with Irrational Nonlinearity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **119**, Article 107073. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.107073

[9] Cao, Q., Wiercigroch, M., Pavlovskaia, E.E., Grebogi, C. and Thompson, J.M.T. (2008) The Limit Case Response of the Archetypal Oscillator for Smooth and Discontinuous Dynamics. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **43**, 462-473. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.01.003

[10] Li, Z., Cao, Q. and Léger, A. (2015) The Equilibrium Stability for a Smooth and Discontinuous Oscillator with Dry Friction. *Acta Mechanica Sinica*, **32**, 309-319. https://doi.org/10.1007/s10409-015-0481-y

[11] Han, N., Cao, Q.J. and Wiercigroch, M. (2013) Estimation of Chaotic Thresholds for the Recently Proposed Rotating Pendulum. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **23**, Article 1350074. https://doi.org/10.1142/s0218127413500740

[12] Filippov, A.F. (1964) Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side. Kluwer Academic Publishers.

[13] 黄立宏, 郭振远, 王佳伏. 右端不连续微分方程理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011.

[14] 黄立宏, 王佳伏. 右端不连续微分方程模型及其动力学分析[M]. 北京: 科学出版社, 2021.

[15] Buzzi, C.A., de Carvalho, T. and da Silva, P.R. (2013) Closed Poly-Trajectories and Poincaré Index of Non-Smooth Vector Fields on the Plane. *Journal of Dynamical and ControlSystems*, **19**, 173-193. https://doi.org/10.1007/s10883-013-9169-4

[16] Bacciotti, A. and Ceragioli, F. (1999) Stability and Stabilization of Discontinuous Systems and Nonsmooth Lyapunov Functions. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **4**, 361-376. https://doi.org/10.1051/cocv:1999113