**Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(2), 286-301**
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.142071

# 指数型非线性椭圆方程解的渐近行为

**郭锦钰**

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2025 年 1 月 21 日；录用日期：2025 年 2 月 15 日；发布日期：2025 年 2 月 25 日

## 摘 要

本文主要研究的是六阶指数型非线性椭圆方程, 该方程为负的拉普拉斯算子的三次方作用于 $u(x)$ 等于 $e$ 的 $u(x)$ 次方. $e$ 的 $u(x)$ 次方函数在 $R$ 的六维空间去掉一个单位球 $B$ 的区域上是勒贝格可积的, 其中单位球 $B$ 是由 $R$ 六维空间中满足 $x$ 的模小于 1 的所有 $x$ 组成. 当 $x$ 的模趋于无穷大的时候, $u(x)/\ln|x|$ 的极限是 $\alpha$, 其中 $\alpha$ 小于 **-6**.

## 关键词

六阶椭圆方程，渐近行为，共形几何

# Asymptotic Behavior of an Exponential Nonlinear Elliptic Equation Solution

**Jinyu Guo**

School of Mathematics Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Jan. $21^{st}$, 2025; accepted: Feb. $15^{th}$, 2025; published: Feb. $25^{th}$, 2025

文章引用: 郭锦钰. 指数型非线性椭圆方程解的渐近行为 [J]. 应用数学进展, 2025, 14(2): 286-301.
DOI: 10.12677/aam.2025.142071

## Abstract

**This paper mainly studies the sixth-order exponential nonlinear elliptic equation, which is the cube of the negative Laplacian acting on $u$ equal to $e$ to the power of $u$. The function $e$ to the power of $u(x)$ is Lebesgue integrable in the region of the six-dimensional space of $R$ excluding a unit ball $B$, where the unit ball $B$ is composed of all $x$ in the six-dimensional space of $R$ satisfying the modulus of $x$ is less than 1. When the modulus of $x$ tends to infinity, the limit of $u(x)/\ln|x|$ is $\alpha$, where $\alpha$ is less than -6.**



## Keywords

**Elliptic Equations of Sixth Order, Asymptotic Behavior, Conformal Geometry**



Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access


## 1. 引言

在数学物理学中, 保形几何方程可以描述稳态流中的平均场涡度, 以及超导理论或电弱理论中的陈氏 -西蒙斯涡度. 关于这个主题的更多结果, 感兴趣的读者可以参考文献 [1].

本文主要研究以下方程解在无穷远处的渐近行为:

$$-\triangle u = e^u \quad \mathbb{R}^2 \setminus B, \quad \int_{\mathbb{R}^2\setminus B} e^{u(x)}dx \tag{1.1}$$

其中 $B$=$\{x \in \mathbb{R}^2$:$|x| < 1\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中单位球.

$$\triangle^2 u = e^u \quad \mathbb{R}^4 \setminus B, \quad \int_{\mathbb{R}^4\setminus B} e^{u(x)}dx \tag{1.2}$$

其中 $B$=$\{x \in \mathbb{R}^4$:$|x| < 1\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中单位球.

$$(-\triangle)^3 u = e^u \quad \mathbb{R}^6 \setminus B, \quad \int_{\mathbb{R}^6\setminus B} e^{u(x)}dx < \infty \tag{1.3}$$

其中 $B$=$\{x \in \mathbb{R}^6$:$|x| < 1\}$ 是 $\mathbb{R}^6$ 中单位球.

方程 (1-1)-(1-3) 在共形几何上有根. 设 $(M, g)$ 是一个完备的黎曼流形, 与 $g$ 相关联有一些张量, 如全曲率张量 $R_g$,Ricci 曲率张量 $\mathrm{Ric}_g$ 和标量曲率 $S_g$. 拉普拉斯算子 $\triangle_g$ 是 $M$ 上的一个著名的椭圆算子. 在 6 维欧式空间中, 方程 (1-3) 与 $Q-$ 曲率问题密切相关.$Q-$ 曲率类似于 2 维空间中的标量曲率. 文献 [2] [3] 研究 2 维中的标量曲率的相关问题.

文献 [4] 研究方程 (1-1) 在 $\mathbb{R}^2$ 空间中解的结构, 基于无穷远处解上界的估计, 应用改进的运动平面方法, 证明了解的一些全局性和渐近性行为. 文献 [5] [6] [7] 对方程 (1-2) 在 $\mathbb{R}^4$ 空间中解进行分类, 得到解 $u$ 的定性行为 (如爆炸, 先验估计). 方程 (1-3) 在 $\mathbb{R}^6$ 空间中解的结构类似于文献 [8] 方程解的结构. 根据文献 [8], 假设 $u \in C^6(\mathbb{R}^6)$ 是方程 (1-3) 的解, 得到在 $\mathbb{R}^6$ 空间中的一个重要结论 $(-\triangle)^i u \geq 0$,$i = 1, 2$, 利用文献 [9] 中移动球面法简化径向对称解的情况, 结合极值原理对解进行分类, 得到当 $|x|$ 趋于无穷远时 $u(x)$ 的渐近行为.

设 $u \in C^6(\mathbb{R}^6 \setminus B)$ 是方程 (1-3) 的解, 通过 Kelvin 变化

$$v(y) = u(x), \quad y = \frac{x}{|x|^2}$$

方程 (1-3) 可以转化为

$$(-\triangle_y)^3 v = |y|^{-12} e^v \quad B \setminus \{0\}, \quad \int_{B\setminus\{0\}} |y|^{-12} e^v dy < \infty \tag{1.4}$$

其中 $B$=$\{x \in \mathbb{R}^6$:$|x| < 1\}$ 是 $\mathbb{R}^6$ 中单位球, 方程 (1-3) 在无穷远的渐近行为等价于方程 (1-6) 解在原点处精确的渐近性态.

## 2. 主要结果

定理 **2.1.** 设 $u \in C^6(\mathbb{R}^6 \setminus B)$ 是方程 (1-3) 的解, 且满足

$$u(x) = o(|x|^2), \quad |x| \to \infty \tag{2.1}$$

则有

$$\frac{u(x)}{\ln|\mathrm{x}|} \to \alpha, \quad |x| \to \infty \tag{2.2}$$

其中 $\alpha < -6$,$|\mathbb{S}|^5$ 是单位球体的表面积,$\kappa$ 是一个常数.

## 3. 定性性质

定义 $\rho = |y|$ 和

$$\bar{v}(\rho) := \frac{1}{|\mathbb{S}^5|} \int_{\mathbb{S}^5} v(\rho, \theta) d\theta, \quad \rho \in (0, 1) \tag{3.1}$$

其中 $|\mathbb{S}^5|$ 是单位球体的表面积.

下面考虑当 $\rho$ 趋于原点时,$\overline{v}(\rho)$ 的渐近行为.

**引理 3.1** 设 $v \in C^6(B \setminus \{0\})$ 是方程 (1-4) 的解, 并且满足

$$v(y) = o(|y|^{-2}), \quad |y| \to 0 \tag{3.2}$$

则有

$$\frac{\overline{v}(\rho)}{\ln\rho} \to \beta, \quad \rho \to 0 \tag{3.3}$$

其中 $\beta > 6$.

证明: 结合 (1.4),(3-1) 和 (3-2), 经计算 $\overline{v}(\rho)$ 满足方程

$$(-\triangle_y)^3 \overline{v} = \rho^{-12}\overline{e^v} \quad \rho \in (0,1) \quad \int_0^1 \rho^{-7}\overline{e^v} d\rho < \infty \tag{3.4}$$

和

$$\overline{v}(\rho) = o(\rho^{-2}), \quad \rho \to 0 \tag{3.5}$$

第一步: 先证明如果 $\lim_{\rho\to 0} \rho^5 \overline{v}'(\rho)$ 存在, 则 $\rho^5\overline{v}'(\rho)$ 的极限几乎处处为 0.

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^5 \overline{v}'(\rho) = 0 \tag{3.6}$$

反证法: 假设存在 M 不为 0(M 可能为 $\pm\infty$), 即 $\lim_{\rho\to 0} \rho^5 \overline{v}'(\rho) = M$. 下面考虑两种情况:(1)M>0,(2)M<0 对于 (1), 由定义可知: 存在 $M_0 > 0$ 和 $\rho_0 > 0$, 有

$$\overline{v}'(\rho) \geq M_0 \rho^{-5}, \quad \rho \in (0, \rho_0) \tag{3.7}$$

将 (3-7) 在 $(\rho, \rho_0)$ 上积分, 整理得到

$$\overline{v}(\rho) \leq -\frac{M_0}{4}\rho^{-4} + \frac{M_0}{4}\rho_0^{-4} + \overline{v}_0(\rho), \quad \rho \in (0, \rho_0) \tag{3.8}$$

(3-8) 与 (3-5) 矛盾, 假设不成立.

对于 (2), 由定义可知: 存在 $M_0 < 0$ 和 $\rho_0 > 0$, 有

$$\overline{v}'(\rho) \leq M_0 \rho^{-5}, \quad \rho \in (0, \rho_0) \tag{3.9}$$

对 (3-9) 在 $(\rho, \rho_0)$ 上积分, 得到

$$\overline{v}(\rho) \geq -\frac{M_0}{4}\rho^{-4} + \frac{M_0}{4}\rho_0^{-4} + \overline{v}_0(\rho), \quad \rho \in (0, \rho_0) \tag{3.10}$$

(3-10) 与 (3-5) 矛盾, 则有 (3-6) 成立.

第二步: 我们将先证明如果 $\lim_{\rho\to 0}\rho^5(\triangle\overline{v})'(\rho)$ 存在, 且 $\rho^5(\triangle\overline{v})'(\rho)$ 的极限几乎处处为 0.

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^5(\triangle\overline{v})'(\rho)=0 \tag{3.11}$$

反证法: 假设存在 M 不为 0(M 可能为 $\pm\infty$), 即 $\lim_{\rho\to 0}\rho^5(\triangle\overline{v})'(\rho)=M$. 下面考虑两种情况:(1)M>0,(2)

M<0. 对于 (1), 由定义可知: 存在 $M_0>0$ 和 $\rho_0>0$, 有

$$(\triangle\overline{v})'(\rho)\geq M_0\rho^{-5},\quad \rho\in(0,\rho_0) \tag{3.12}$$

对 (3-12) 在 $(\rho,\rho_0)$ 上积分, 得到

$$\triangle\overline{v}(\rho)\leq\frac{M_0}{4}\rho_0^{-4}-\frac{M_0}{4}\rho^{-4}+\triangle\overline{v}(\rho_0),\quad \rho\in(0,\rho_0) \tag{3.13}$$

通过第一步 $\lim_{\rho\to 0}\rho^5\overline{v}'(\rho)=0$, 将 (3-13) 在 (0,$\rho$) 积分, 得到

$$\overline{v}'(\rho)\leq\frac{\rho\triangle\overline{v}(\rho_0)}{6}-\frac{M}{8}\rho^{-3}+\frac{M_0\rho_0^{-4}\rho}{24},\quad \rho\in(0,\rho_0) \tag{3.14}$$

将 (3-14) 在 [$\rho$,$\rho_*$] 积分:

$$\overline{v}(\rho)\geq\frac{M\rho^{-2}}{16}-\frac{M\rho_*^{-2}}{16}+\overline{v}(\rho_*)+\frac{(\rho^2-\rho_*^2)}{12}(\frac{M_0\rho_0^{-4}}{4}+\triangle\overline{v}(\rho_0)),\quad \rho\in(0,\rho_0) \tag{3.15}$$

(3-15) 和 (3-5) 矛盾. 同理可证 (2), 因此 (3-11) 得证.

第三步: 证明存在一个正数 $M$ 满足

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^5(\triangle^2\overline{v})'(\rho)=M \tag{3.16}$$

经过计算 $\overline{v}(\rho)$ 满足方程

$$(\rho^5(\triangle^2\overline{v})')'(\rho)=-\rho^{-7}\overline{e^v},\quad \rho\in(0,1) \tag{3.17}$$

令 $f(\rho):=\rho^5(\triangle^2\overline{v})'(\rho)$, 由 (3-17) 可知 $f(\rho)$ 是递减函数, 并且 $\lim_{\rho\to 0}\rho^5(\triangle^2\overline{v})'(\rho)=M<\infty$ 存在,$M$ 可能为 $+\infty$. 对于 $\varepsilon$>0 足够小, 将 (3-18) 在 ($\varepsilon$,1) 上积分, 有

$$(\triangle^2\overline{v})'(1)-\varepsilon^2(\triangle^2\overline{v})'(\varepsilon)=-\int_\varepsilon^1\rho^{-7}\overline{e^v}d\rho \tag{3.18}$$

因为 $\int_0^1\rho^{-7}\overline{e^v}d\rho<\infty$, 可知 $M$ 取不到 $+\infty$. 接下来证明 $M$ >0.

反证法: 假设 $\lim_{\rho\to 0}\rho^5(\triangle^2\overline{v})'(\rho)=M\leq 0$, 结合 (3-17) 和 (3-18) 有

$$-(\triangle^2\overline{v})'(\rho)=(\int_0^\rho t^{-7}\overline{e^v}(t)dt-M)\rho^{-5}>0,\quad \rho\in(0,1) \tag{3.19}$$

由 (3-19) 可知 $\lim_{\rho\to 0} -\triangle^2\,\overline{v}(\rho) = N < \infty$ 存在 ($N$ 可能为 $-\infty$). 下面考虑三种情况:
(a)N>0,(b)N=0,(c)N<0
对于 (a), 由定义可知存在 $\rho_1 > 0$,$0 < N_1 \leq \frac{1}{2}N$ 有

$$-\triangle^2\overline{v}(\rho) \geq N_1, \quad \rho \in (0,\rho_1) \tag{3.20}$$

由 (3-20) 可知 $\lim_{\rho\to 0} \rho^5\triangle'\overline{v}(\rho)$ 存在, 由第二步可知

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^5\triangle'\overline{v}(\rho) = 0$$

另一方面, 因为 $N < \infty$, 则存在 $\rho_2 > 0$,$N_2 \geq 2N$ 有

$$-(\rho^5\triangle'\overline{v})'(\rho) \leq N_2\rho^5, \quad \rho \in (0,\rho_2] \tag{3.21}$$

将 (3-21) 在 (0,$\rho$) 积分, 有

$$-\triangle'\overline{v}(\rho) \leq \frac{N_2\rho}{6}, \quad \rho \in (0,\rho_2] \tag{3.22}$$

将 (3-22) 在 $[\rho,\rho_2]$, 上积分有

$$\triangle\overline{v}(\rho) \leq \triangle\overline{v}(\rho_2) + \frac{N_2\rho_2^2}{12} - \frac{N_2\rho^2}{12}, \quad \rho \in (0,\rho_2]$$

重复上述步骤有

$$\overline{v}(\rho) \geq \frac{(\triangle\overline{v}(\rho_2) + \frac{N_2\rho_2^2}{12})(\rho^2-\rho_2^2)}{12} + \frac{N_2(\rho_2^4-\rho^4)}{384} + \overline{v}(p_2), \quad \rho \in (0,\rho_2]$$

因此

$$\overline{v}(\rho) \geq -C > -\infty, \quad \rho \in (0,\rho_2] \tag{3.23}$$

这是矛盾的因为:

$$e^{-c}\int_0^1 \rho^{-7}d\rho \leq \int_0^1 \rho^{-7}e^{\overline{v}(\rho)}d\rho \leq \int_0^1 \rho^{-7}\overline{e^{v}}d\rho = \frac{1}{|\mathbb{S}^5|}\int_{B\setminus\{0\}} |y|^{-12}e^{v(y)}dy < \infty \tag{3.24}$$

对于 (b)$\lim_{\rho\to 0} -\triangle^2\,\overline{v}(\rho) = 0$, 则存在 $\rho_3 > 0$ 有

$$-\triangle^2\overline{v}(\rho) \geq 0, \quad \rho \in (0,\rho_3) \tag{3.25}$$

由 (3-25) 可知 $\lim_{\rho\to 0} \rho^5\triangle'\overline{v}(\rho)$ 存在, 由第二步可知:$\lim_{\rho\to 0} \rho^5\triangle'\overline{v}(\rho) = 0$, 则存在 $\rho_4 > 0$ 和 $N_3 > 0$ 满足

$$-(\rho^{-5}\triangle'\overline{v})'(\rho) \leq N_3\rho^5, \quad \rho \in (0,\rho_4]$$

经过计算有

$$\overline{v}(\rho) \geq -C > -\infty, \quad \rho \in (0,\rho_4]$$

这是矛盾的与 (3-24).

对于 (c), 存在 $\rho_5 > 0$ 和 $-\infty < \frac{1}{2}N < N_4 < 0$ 有

$$-(\rho^5\triangle'\overline{v})'(\rho) \leq N_4\rho^5 \tag{3.26}$$

将 (3-26) 在 $(0,\rho)$ 积分, 有

$$\triangle\overline{v}(\rho) \leq \triangle\overline{v}(\rho_5) + \frac{N_4\rho_5^2}{12} - \frac{N_4\rho^2}{12}, \quad \rho \in (0, \rho_5] \tag{3.27}$$

将 (3-27) 在 $(0, \rho_5]$ 上积分有

$$\overline{v}'(\rho) \leq \frac{(\triangle\overline{v}(\rho_5) + \frac{N_4\rho_5^2}{12})\rho}{6} - \frac{N_4\rho^3}{96}, \quad \rho \in (0, \rho_5]$$

重复上述步骤有

$$\overline{v}(\rho) \geq \frac{(\triangle\overline{v}(\rho_5) + \frac{N_4\rho_5^2}{12})(\rho^2 - \rho_5^2)}{12} + \frac{N_4(\rho_5^4 - \rho^4)}{384} + \overline{v}(p_5), \quad \rho \in (0, \rho_5]$$

因此

$$\overline{v}(\rho) \geq -C > -\infty, \quad \rho \in (0, \rho_5]$$

这是矛盾与 (3-24) 矛盾.

第四步证明 (3-3). 结合 (3-18) 和 (3-19) 可知: 当 $\rho \to 0$ 时有

$$(\triangle^2\overline{v})'(\rho) = (M - \int_0^\rho s^{-7}\overline{e^v}(s))\rho^{-5} = (M - \eta(\rho))\rho^{-5} \tag{3.28}$$

在 $[\rho, \rho_*]$ 上对 (3-28) 积分有:

$$\triangle^2\overline{v}(\rho) = \triangle^2\overline{v}(\rho_*) + \frac{1}{4}M\rho_*^{-4} - \frac{1}{4}M\rho^{-4} + \int_\rho^{\rho_*}\eta(s)s^{-5}ds, \quad \rho \in (0, \rho_*) \tag{3.29}$$

其中 $\rho_* > 0$ 且足够小. 结合 (3-12) 在 $(0, \rho]$ 对 (3-29) 积分有

$$\triangle'\overline{v}(\rho) = \frac{\rho}{6}[\triangle^2\overline{v}(\rho_*) + \frac{1}{4}M\rho_*^{-4}] - \frac{M}{8}\rho^{-3} + \rho^{-5}\int_0^\rho t^5\int_t^{\rho_*}\eta(s)s^{-5}dsdt, \quad \rho \in (0, \rho_*) \tag{3.30}$$

在 $[\rho, \rho_*]$ 上对 (3-30) 积分有:

$$\begin{aligned}\triangle\overline{v}(\rho) = \triangle\overline{v}(\rho_*) + \frac{(\rho^2 - \rho_*^2)}{12}(\triangle^2\overline{v}(\rho_*) + \frac{M\rho_*^{-4}}{4}) - \frac{M(\rho_*^{-2} - \rho^{-2})}{16} \\ - \int_\rho^{\rho_*}\xi^{-5}\int_0^\xi t^5\int_t^{\rho_*}\eta(s)s^{-5}dsdtd\xi, \quad \rho \in (0, \rho_*)\end{aligned} \tag{3.31}$$

其中 $\rho_* > 0$ 并且 $\rho_*$ 足够小. 结合 (3-6) 在 $(0, \rho]$ 对 (3-31) 积分有

$$\begin{aligned}\overline{v}'(\rho) &= \frac{\rho}{6}\triangle\overline{v}(\rho_*) + \frac{\rho^3\triangle^2\overline{v}(\rho_*)}{96} + \frac{\rho^3 M\rho_*^{-4}}{384} - \frac{\rho_*^2\rho\triangle^2\overline{v}(\rho_*)}{72} \\ &\quad - \rho^{-5}\int_0^\rho \tau^5\int_\tau^{\rho_*}\xi^{-5}\int_0^\xi t^5\int_t^{\rho_*}\eta(s)s^{-5}dsdtd\xi d\tau \\ &\quad - \frac{\rho_*^2\rho}{288}M\rho_*^{-4} - \frac{1}{96}M\rho_*^{-2}\rho + \frac{M}{64\rho}, \quad \rho\in(0,\rho_*)\end{aligned}$$

重复上述步骤有

$$\begin{aligned}\overline{v}(\rho) &= (\rho_*^2-\rho^2)[\frac{M\rho_*^2}{192} - \frac{\triangle\overline{v}(\rho_*)}{12} + \frac{\rho_*^2(\triangle^2\overline{v}(\rho_*)+\frac{1}{4}M\rho_*^{-4})}{144}] \\ &\quad - \frac{(\rho_*^4-\rho^4)}{384}(\triangle^2\overline{v}(\rho_*) + \frac{1}{4}M\rho_*^{-4}) - \frac{M}{64}(\ln\rho_* - \ln\rho) + \overline{v}(\rho_*) \\ &\quad + \int_\rho^{\rho_*}\theta^{-5}\int_0^\theta \tau^5\int_\tau^{\rho_*}\xi^{-5}\int_0^\xi t^5\int_t^{\rho_*}\eta(s)s^{-5}dsdtd\xi d\tau d\theta, \quad \rho\in(0,\rho_*)\end{aligned} \tag{3.32}$$

经过计算, 当 $\rho\to 0$ 时

$$\int_\rho^{\rho_*}\theta^{-5}\int_0^\theta \tau^5\int_\tau^{\rho_*}\xi^{-5}\int_0^\xi t^5\int_t^{\rho_*}\eta(s)s^{-5}dsdtd\xi d\tau d\theta = o_\rho(1)\ln\rho + O(1) \tag{3.33}$$

结合 (3-33), 当 $\rho\to 0$ 时,(3-32) 可以写成

$$\frac{\overline{v}(\rho)}{\ln\rho}\to\beta \tag{3.34}$$

其中 $\beta = \frac{N}{64}$,$N$ >0. 因为

$$\int_0^1 \rho^{-7}e^{\overline{v}(\rho)}d\rho = \int_0^1 \rho^{-7}e^{O(\beta\ln\rho)}d\rho < \infty$$

经过简单计算 $\beta > 6$.

引理 **3.2** 设 $u$ 是方程 (1-3) 的解且满足 (2-1), 则存在常数 $C$ 有

$$\triangle^2 u(x)\to 0, \quad |x|\to\infty \tag{3.35}$$

和

$$u(x)\le C, \quad x\in\mathbb{R}^6\setminus B \tag{3.36}$$

其中 $B$=$\{x\in\mathbb{R}^6$:$|x|<1\}$ 是 $\mathbb{R}^6$ 中单位球.

证明: 第一步先证明

$$\varliminf_{|x|\to\infty}\triangle^2 u(x)\ge 0 \tag{3.37}$$

反证法: 假设 $\underline{\lim}_{|x|\to\infty} \triangle^2 u(x) < 0$, 则存在序列 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^6 \setminus B$, 当 $|x_k| \to \infty$,$k \to \infty$ 和 $\varepsilon > 0$ 并且不依赖于 $k$, 当 $k \geq 1$ 有 $\triangle^2 u(x_k) \leq -\varepsilon < 0$. 定义 $w_i(x) = (-\triangle)^i u(x)$,$i$ 取 1 和 2 代入有

$$w_1(x) + \triangle u(x) = 0$$

$$\triangle w_1(x) + w_2(x) = 0 \tag{3.38}$$

$$\triangle w_2(x) + e^{u(x)} = 0 \tag{3.39}$$

定义

$$\overline{u}(r) = \frac{1}{|\partial B_r(x_k)|} \int_{\partial B_r(x_k)} u(x) d\sigma, \quad r \in [0, \frac{1}{2}|x_k|]$$

使用 Jensen's 不等式, 当 $r \in [0, \frac{1}{2}|x_k|]$ 有;

$$\overline{w_1} + \triangle \overline{u} = 0$$

$$\triangle \overline{w_1} + \overline{w_2} = 0 \tag{3.40}$$

$$\triangle \overline{w_2} + \overline{e^u} \leq 0 \tag{3.41}$$

由 (3-41) 可知 $r^5 \overline{w_2}'(r) < 0$,$\overline{w_2}(r)$ 单调递减, 有

$$\overline{w_2}(r) \leq \overline{w_2}(0) \leq -\varepsilon < 0 \tag{3.42}$$

通过 (3-40) 和 (3-42) 有

$$\triangle \overline{w_1}(r) \geq -\overline{w_2}(0) \tag{3.43}$$

对 (3-40) 在 $(0, r]$ 上积分, 结合 (3-39) 有

$$\overline{w_1}(r) \geq c_1 r^2 \tag{3.44}$$

其中 $c_1 \geq 0$. 对 (3-44) 重复上述步骤有:

$$\overline{u}(r) \leq \overline{u}(0) - \frac{c_1}{32} r^4, \quad r \in (0, \frac{1}{2}|x_k|] \tag{3.45}$$

当 $k$ 足够大 $\overline{u}(0) = u(x_k) = o(|x_k|^2)$ 有

$$\overline{u}(\frac{1}{2}|x_k|) \leq (o(1) - \frac{c_1}{32})(\frac{1}{2}|x_k|)^4 \tag{3.46}$$

(3-46) 与 $u(x) = o(|x|^2)$ 当 $|x| \to \infty$ 时矛盾.

第二步: 证明

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}} \triangle^2 u(x) \leq 0 \tag{3.47}$$

反证法: 假设 $\overline{\lim}_{|x|\to\infty}\triangle^2 u(x)>0$, 则存在序列 $\{x_k\}\subset\mathbb{R}^6\setminus B$, 当 $|x_k|\to\infty$,$k\to\infty$ 和 $\varepsilon>0$ 不依赖于 $k$, 有

$$\triangle^2 u(x_k)\geq\varepsilon>0,\quad k\geq 1 \tag{3.48}$$

定义 $v_k(y)=u(x),y=x-x_k$,

$$\triangle^3 v_k=-e^{v_k},\quad \triangle^2 v_k(0)=\triangle^2 u(x_k)\geq\varepsilon>0 \tag{3.49}$$

定义

$$z_k(y)=\frac{\triangle^2 v_k(y)}{\triangle^2 v_k(0)},\quad \overline{z_k}(r)=\frac{1}{\partial B_r(0)}\int_{\partial B_r(0)} z_{k(y)}d\sigma,\quad r\in[0,\frac{1}{2}|x_k|] \tag{3.50}$$

则有 $z_k(0)=1$ 和

$$\triangle\bar{z}_k(y)=-\frac{\overline{e^{v_k(y)}}}{\triangle^2 v_k(0)} \tag{3.51}$$

将 (3-51) 在 $(0,\rho)$ 上积分有

$$r^5\overline{z_k}'(r)=\frac{-1}{\triangle^2 v_k(0)|\mathbb{S}^5|}\int_{B_r(0)} e^{v_k}dy<0 \tag{3.52}$$

固定 $r=R$, 有

$$\int_{B_R(0)} e^{v_k}dy\leq\int_{B_{|x_k|/2}(x_k)} e^{u(x)}dx\to 0,\quad k\to\infty \tag{3.53}$$

结合 (2-52) 和 (2-53) 当 $r\in(0,R]$ 有

$$\overline{z}_k'(r)\to 0,\quad k\to\infty \tag{3.54}$$

对 (3-54) 在 [0,R] 上积分当 $r\in[0,R]$ 有

$$\overline{z}_k(r)\to 1,\quad k\to\infty \tag{3.55}$$

当 $r\in[R,|x_k|/2]$ 时有

$$-\overline{z_k}'(r)\leq\frac{r^{-5}}{\triangle^2 v_k(0)|\mathbb{S}^5|}\int_{B_{|x_k|/2}(0)} e^{v_k}dy \tag{3.56}$$

对 (3-56) 积分在 [R,r] 上积分, 当 $r\in[R,\frac{1}{2}|x_k|]$ 有:

$$0 \le \overline{z}_k(R) - \overline{z}_k(r) \le \int_R^r \frac{t^{-5}}{\triangle^2 v_k(0)|\mathbb{S}^5|} \int_{B_{|x_k|/2}(0)} e^{v_k} dy dt$$

$$= \frac{1}{4R^4 \triangle^2 v_k(0)|\mathbb{S}^5|} \int_{B_{|x_k|/2}(0)} e^{v_k} dy \to 0 \quad k \to \infty \tag{3.57}$$

和

$$\overline{z}_k(r) \to \overline{z}_k(R) = 1, \quad k \to \infty \tag{3.58}$$

结合 (3-55) 和 (3-58),$r \in [0, \frac{1}{2}|x_k|]$, 当 $k$ 足够大时, 有 $\overline{z}_k(r) \to 1$ 和 $\triangle^2 \overline{v_k}(r) \ge \frac{\triangle v_k^2(0)}{2} \ge \frac{\varepsilon}{2}$. 重复第一步的步骤有

$$u_k(r) \ge \frac{\varepsilon r^4}{768} \tag{3.59}$$

当 $|x| \to \infty$ 时,(3-59) 与 $u(x) = o(|x|^2)$ 矛盾. 结合 (3-38) 和 (3-47) 得到 (3-35).

第三步证明 $u(x) \le C$

反证法: 存在 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^6 \setminus B$, 当 $k \to \infty$ 时 $u(x_k) \to \infty$. 另 $v_k(y) = u(x), y = x - x_k$. 由 (3-35) 可知, 当 $k$ 足够大有

$$\triangle^2 v_k(y) \ge -\vartheta, \quad y \in B_{|x_k|/2}(0)$$

其中 $\vartheta$ 是大于 0 的常数. 并且有

$$\triangle^2 \overline{v}_k(r) \ge -\vartheta, \quad r \in (0, \frac{1}{2}|x_k|] \tag{3.60}$$

结合引理 2.1 将 (3-60) 在 $(0,r]$ 上积分有

$$e^{\overline{v}_k(r)} \ge e^{\overline{v}_k(0)} e^{-\frac{\vartheta}{12} r^2} = e^{\overline{u}(x_k)} e^{-\frac{\vartheta}{12} r^2} \ge M e^{-\frac{\vartheta}{12} r^2} \tag{3.61}$$

其中 $M > 0$ 且足够大. 结合 $k \to \infty$ 时 $u(x_k) \to \infty$ 和 (3-61) 有

$$\int_{B_{\frac{|x_k|}{2}}(x_k)} e^{u(y)} dy \ge M|\mathbb{S}^5| \int_0^2 r^5 e^{-\frac{\vartheta}{12} r^2} > 0 \tag{3.62}$$

(3-62) 矛盾因为

$$\int_{B_{\frac{|x_k|}{2}}(x_k)} e^{u(y)} dy \to 0$$

## 4. 定理 2.1 的证明

定义

$$w(x)=\frac{1}{64|\mathbb{S}^5|}\int_{\mathbb{R}^6\setminus B}\ln\frac{|x-y|}{|y|}e^{u(y)}dy \tag{4.1}$$

和

$$\overline{w}(r)=\frac{1}{|\partial B_r(0)|}\int_{\partial B_r(0)}w(y)d\sigma \tag{4.2}$$

经过计算有

$$\triangle^2 w(x)=\frac{1}{4|\mathbb{S}^5|}\int_{\mathbb{R}^6\setminus B}\frac{e^{u(y)}}{|x-y|^4}dy \tag{4.3}$$

和

$$\triangle^3 w(x)=e^{u(x)} \tag{4.4}$$

由引理 3.2 和文献 [8] 可知 $u(x)$ 有上界和

$$\triangle^2 w(x)\to 0,\quad |x|\to\infty \tag{4.5}$$

另 $\varphi(x)=u(x)+w(x)$

$$\triangle^3\varphi(x)=0,\quad \mathbb{R}^6\setminus B \tag{4.6}$$

利用球面坐标另 $k(t,\theta)=\varphi(r,\theta),\overline{k}(t)=\overline{\varphi}(r),t=\ln r,r=|x|$ 有:$\triangle^3\overline{\varphi}(r)=0$. 另 $z(t,\theta)=k(t,\theta)-\overline{k}(t)$, 结合 (4.4) 和 (4.6) 有:

$$\triangle^3 z(t,\theta)=0 \tag{4.7}$$

经过计算 $\triangle^3\varphi(r,\theta)$ 和 $\triangle^3\overline{\varphi}(r)$ 分别满足

$$\begin{aligned}\triangle^3\varphi(r,\theta)=&\,\varphi_r^{(6)}(r,\theta)+15r^{-1}\varphi_r^{(5)}(r,\theta)+45r^{-2}\varphi_r^{(4)}(r,\theta)\\&-30r^{-3}\varphi_r^{(3)}(r,\theta)-45r^{-4}\varphi_{rr}(r,\theta)+45r^{-5}\varphi_r(r,\theta)\\&-3r^{-4}\varphi_{rr\theta\theta}(r,\theta)-21r^{-5}\varphi_{r\theta\theta}(r,\theta)+18r^{-3}\varphi_{r^{(3)}\theta\theta}(r,\theta)\\&+3r^{-2}\varphi_{r^{(4)}\theta\theta}(r,\theta)+3r^{-5}\varphi_{\theta^{(4)}r}(r,\theta)+3r^{-5}\varphi_{\theta^{(4)}r}(r,\theta)\\&-4r^{-6}\varphi_{\theta^{(4)}}(r,\theta)+3r^{-4}\varphi_{\theta^{(4)}rr}(r,\theta)+r^{-6}\varphi_{\theta^{(6)}}(r,\theta)\end{aligned} \tag{4.8}$$

和

$$\begin{aligned}\triangle^3\overline{\varphi}(r)=&\overline{\varphi}^{(6)}(r)+15r^{-1}\overline{\varphi}^{(5)}(r)+45r^{-2}\overline{\varphi}^{(4)}(r)\\&-30r^{-3}\overline{\varphi}^{(3)}(r)-45r^{-4}\overline{\varphi}_{rr}(r)+45r^{-5}\overline{\varphi}_r(r)\end{aligned}\tag{4.9}$$

结合 (4.4)-(4.9),$z(t,\theta)$ 满足:

$$\begin{aligned}&z_t^{(6)}-20z_t^{(4)}+3\triangle_\theta z_t^{(4)}+64z_{tt}-24\triangle_\theta z_{tt}\\&+3\triangle_\theta^2 z_{tt}-4\triangle_\theta^2 z+4\triangle_\theta^3 z=0\end{aligned}\tag{4.10}$$

其中 $(t,\theta)\in(0,\infty)\times\mathbb{S}^5$.
取

$$z(t,\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}z_i^j(t)Q_i^j(\theta)\tag{4.11}$$

其中 $Q_i^j(\theta)$ 是特征值 $\sigma_i$ 特征函数并且满足

$$\triangle_\theta^2 Q=\sigma Q,\quad \theta\in\mathbb{S}^5\tag{4.12}$$

由文献 [10]: 当 N=6 时有:

$$\sigma_i=\lambda_i^2,\lambda_i=i(4+i),m_i=\frac{(1+i)(3+i)(2+i)^2}{12}$$

其中 $m_i$ 是 $\lambda_i$ 和 $Q_i^j$ 的重数并且满足

$$-\triangle_\theta Q_i^j=\lambda_i Q_i^j,\quad \theta\in S^5\tag{4.13}$$

将 (4.8)-(4.13) 将代入式子 (4.7) 有

$$(z_i^j)^{(6)}(t)-(20+3\lambda_i)(z_i^j)^{(4)}(t)+(64+24\lambda_i+3\lambda_i^2)(z_i^j)_{tt}(t)-(4\lambda_i^2+\lambda_i^3)(z_i^j)(t)=0\tag{4.14}$$

式子 (4.14) 的特征方程是:

$$\tau^{(6)}-(20+3\lambda_i)\tau^{(4)}+(64+24\lambda_i+3\lambda_i^2)\tau^2-(4\lambda_i^2+\lambda_i^3)=0\tag{4.15}$$

运用 matlab 可知方程 (4.15) 特征根

$$\tau_1^{(i)}=\sqrt{\lambda_i+4},\quad \tau_2^{(i)}=-\sqrt{\lambda_i+4}$$

$$\tau_3^{(i)}=\sqrt{\lambda_i+8-4\sqrt{\lambda_i+4}},\quad \tau_4^{(i)}=-\sqrt{\lambda_i+8-4\sqrt{\lambda_i+4}}$$

$$\tau_5^{(i)} = \sqrt{\lambda_i + 8 + 4\sqrt{\lambda_i + 4}}, \quad \tau_6^{(i)} = -\sqrt{\lambda_i + 8 + 4\sqrt{\lambda_i + 4}}$$

观察特征根有:

$$\tau_6^{(i)} < \tau_2^{(i)} < \tau_4^{(i)} < 0 < \tau_3^{(i)} < \tau_1^{(i)} < \tau_5^{(i)} \tag{4.16}$$

通过常微分方程理论知识可知, 存在 $T \gg 1$, 当 t>T 时有

$$z_i^j(t) = B_1 e^{\tau_1^{(i)}} + B_2 e^{\tau_2^{(i)}} + B_3 e^{\tau_3^{(i)}} + B_4 e^{\tau_4^{(i)}} + B_5 e^{\tau_5^{(i)}} + B_6 e^{\tau_6^{(i)}}$$

因为 $|z(t,\theta)| \leq Ct$, 有 $B_1 = B_3 = B_5 = 0$. $z_i^j(t)$ 可以表示为:

$$z_i^j(t) = B_2 e^{\tau_2^{(i)}} + B_4 e^{\tau_4^{(i)}} + B_6 e^{\tau_6^{(i)}}$$

和

$$B_2 = O(T)e^{-\tau_2^{(i)}T}, \quad B_4 = O(T)e^{-\tau_4^{(i)}T}, \quad B_6 = O(T)e^{-\tau_6^{(i)}T}$$

因此方程 (4.14) 的解为:

$$z_i^j(t) = O(T)e^{\tau_2^{(i)}(t-T)} + O(T)e^{\tau_4^{(i)}(t-T)} + O(T)e^{\tau_6^{(i)}(t-T)} \tag{4.17}$$

取 $Z^2(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}[z_i^j(t)]^2$. 因为 $\tau_6^{(i)} < \tau_2^{(i)} < \tau_4^{(i)} < 0$, 有

$$\begin{aligned} Z^2(t) &\leq CT\sum_{i=1}^{\infty} m_i(e^{2\tau_2^{(i)}(t-T)} + e^{2\tau_4^{(i)}(t-T)} + e^{2\tau_6^{(i)}(t-T)}) \\ &\leq CT\sum_{i=1}^{\infty} m_i(e^{2\tau_4^{(i)}(t-T)} \leq CT(e^{2\tau_4^{(1)}(t-T)}) \end{aligned}$$

其中 $C$ 是一个与 $t$ 无关的正常数. 对于 $t > T_* := 10T$,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{m_{i+1}e^{2\tau_4^{(i+1)}(t-T)}}{m_i e^{2\tau_4^{(i)}(t-T)}} \leq 2e^{-2(t-T)} \leq \frac{1}{2}$$

$||Q_i^j||_{L^2(\mathbb{S}^5)} = 1$ 对于 (i,j) 有

$$||z||_{L^2(\mathbb{S}^5)} \leq Ce^{\tau_4^{(1)}(t-T)} \leq Ce^{\tau_4^{(1)}t} \tag{4.18}$$

通过对方程 (4.11) 在 $(t-1,t+1)\times\mathbb{S}^5$ 上内部 $L^\infty$ 估计有

$$|z(t,\theta)| \leq C||z||_{L^2((t-1,t+1)\times\mathbb{R}^5)} \leq Ce^{\tau_4^{(1)}t} \tag{4.19}$$

和

$$max|z(t,\theta)| \leq Ce^{\tau_4^{(1)}t}$$

代入 i=1 得到 $\tau_4^{(1)}=1$, 有 $|z(t,\theta)|=o(e^{-t})$ 和

$$o(|x|^{-1})=\varphi(r,\theta)-\overline{\varphi}(r)=u(x)+w(x)-\overline{\varphi}(|x|) \tag{4.20}$$

$$u(x)=-w(x)+\overline{\varphi}(|x|)+o(|x|^{-1}) \tag{4.21}$$

根据引理 2.1 和文献 [8] 有

$$\frac{\overline{k}(t)}{t}=\frac{\overline{\varphi}(r)}{\ln r}=\frac{\overline{u}(r)}{\ln r}+\frac{\overline{w}(r)}{\ln r}=-\frac{\overline{v}(r)}{\ln r}+\frac{\overline{w}(r)}{\ln r}\to-\beta+\alpha_0 \tag{4.22}$$

结合 (4.20)-(4.22) 有

$$\frac{u(x)}{\ln|x|}=-\frac{w(x)}{\ln|x|}+\frac{\overline{\varphi}(|x|)}{\ln|x|}+\frac{o(|x|^{-1})}{\ln|x|}\to-\beta \tag{4.23}$$

## 参考文献


[1] Graham, C.R., Jenne, R., Mason, L.J. and Sparling, G.A.J. (1992) Conformally Invariant Powers of the Laplacian, I: Existence. *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 557-565. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-46.3.557

[2] Chang, S.A. and Yang, P.C. (1997) On Uniqueness of Solutions of $n$-th Order Differential Equations in Conformal Geometry. *Mathematical Research Letters*, **4**, 91-102. https://doi.org/10.4310/mrl.1997.v4.n1.a9

[3] Graham, C.R., Jenne, R., Mason, L.J. and Sparling, G.A.J. (1992) Conformally Invariant Powers of the Laplacian, I: Existence. *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 557-565. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-46.3.557

[4] Chen, W. and Li, C. (1991) Classification of Solutions of Some Nonlinear Elliptic Equations. *Duke Mathematical Journal*, **63**, 615-622. https://doi.org/10.1215/s0012-7094-91-06325-8

[5] Lin, C.-S. (1998) A Classification of Solutions of a Conformally Invariant Fourth Order Equation in $R^n$. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **73**, 206-231. https://doi.org/10.1007/s000140050052

[6] Martinazzi, L. (2008) Classification of Solutions to the Higher Order Liouville's Equation on $R^{2m}$. *Mathematische Zeitschrift*, **263**, 307-329. https://doi.org/10.1007/s00209-008-0419-1

[7] Wei, J. and Ye, D. (2008) Nonradial Solutions for a Conformally Invariant Fourth Order Equation in $R^4$. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **32**, 373-386. https://doi.org/10.1007/s00526-007-0145-2

[8] Wei, J. and Xu, X. (1999) Classification of Solutions of Higher Order Conformally Invariant Equations. *Mathematische Annalen*, **313**, 207-228. https://doi.org/10.1007/s002080050258

[9] Goldberg, S.I. (1977) A Uniqueness Theorem for Surfaces in the Large. *Hokkaido Mathematical Journal*, **6**, 28-30.

[10] Guo, Z., Huang, X. and Zhou, F. (2015) Radial Symmetry of Entire Solutions of a Bi-Harmonic Equation with Exponential Nonlinearity. *Journal of Functional Analysis*, **268**, 1972-2004. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.12.010