Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(3), 467-482
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.143132

带有时间依赖阻尼的Kirchhoff型波方程的拉回吸引子

苏 洁

四川化工职业技术学院基础教学部，四川 泸州

收稿日期：2025年2月25日；录用日期：2025年3月18日；发布日期：2025年3月26日

摘 要

对于带有时间依赖阻尼的 Kirchhoff 型波方程, 本文研究了其解的长时间行为. 运用收缩函数的方法验证了过程的渐近紧性, 得到了拉回吸引子的存在性。

关键词

收缩函数，拉回吸引子，时间依赖阻尼，**Kirchhoff** 波方程

Pullback Attractors for Kirchhoff-Type Wave Equation with Time-Dependent Damping

Jie Su

Department of Basic Teaching, Sichuan Vocational College of Chemical Technology, Luzhou Sichuan

Received: Feb. 25^{th}, 2025; accepted: Mar. 18^{th}, 2025; published: Mar. 26^{th}, 2025

文章引用: 苏洁. 带有时间依赖阻尼的Kirchhoff型波方程的拉回吸引子[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 467-482.
DOI: 10.12677/aam.2025.143132

Abstract

In this paper, we are concerned with the long-time behavior of solutions in the time-dependent functional space for the Kirchhoff wave equation with strong damping and nonlinear perturbations. The existence of pullback attractor is achieved by using the contraction function method to verify the asymptotic compactness of the process.

Keywords

Contraction Function, Pullback Attractor, Time-Dependent Damping, Kirchhoff Wave Equation

1. 引言

在边界充分光滑的有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geqslant 3)$ 中, 考虑如下带有时间依赖阻尼的 Kirchhoff 型波方程

$$\begin{cases} u_{tt} - (1+\delta\|\nabla u\|^2)\Delta u + \beta(t)u_t = f(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geqslant 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\delta \in [0,1]$, $f(u)$ 是非线性项.

方程(1)源于模型 $u_{tt} - (a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x)\Delta u = g(x,u)$. 起初是由 Kirchhoff 提出的, 用以描述物理学中可伸缩绳横向振动所引起的长度变化的现象, 推广了著名的 D′lembert 波方程. 其中 a 表示的是绳子内子的性质, b 表示的是绳子初始的张力, u 表示的是横向的位移, $g(x,u)$ 表示的是给予伸缩绳横向的力. 对于方程 (1), 许多学者做了大量研究，且得到了相关结论. 在没有时间依赖阻尼的情况下, 文献 [1]建立了适定性以及全局和指数吸引子的存在性, 文献 [2]考虑了长时间性态对更广义的刚度和阻尼系数, 并且涵盖了超临界情形.

当 $\beta(t)$ 为关于 t 的函数时, 以往用于刻画自治动力系统的全局吸引子以及用于刻画非自治动力系统的一致吸引子和拉回吸引子等经典概念一般不能用来刻画该耗散动力系统. 为了解决这个问题, Di Plinio, Duane and Temam [1] 描述了作用于时间依赖空间族的解算子等概念, 修正了拉回吸引子

的经典定义和理论, 给出了时间依赖吸引子的定义. 在此基础上, 文献 [3]研究了时间依赖空间上吸引子的渐近结构. 文献 [4]讨论了带有非线性阻尼的波方程时间依赖吸引子的存在性. 文献 [5]研究了 Plate 方程时间依赖吸引子的渐近性. 文献 [6–8]研究了抽象发展方程的时间依赖全局吸引子. 文献 [9, 10]考虑了 Kirchhoff 型波方程的时间依赖全局吸引子.

受上述参考文献的启发, 本文运用收缩函数的方法讨论了带有时间依赖阻尼的 Kirchhoff 波方程, 并且在能量空间上得到了时间依赖拉回吸引子.

设 $\beta(t):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是一个连续函数, 属于 $L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R})$,有常数 $C_\beta\geqslant 1$ 满足以下假设:

$$1\leqslant\int_t^{t+1}\beta(s)\mathrm{d}s=\int_t^{t+1}\alpha(s)\mathrm{d}s-\int_t^{t+1}\gamma(s)\mathrm{d}s\leqslant C_\beta,\quad\forall t\in\mathbb{R}\tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(s)\mathrm{d}s<\infty.\tag{3}$$

其中函数 $\alpha(t)$ 和 $\gamma(t)$ 分别是函数 $\beta(t)$ 的正部和负部, 即 $\alpha(t):=\max\{\beta(t),0\}$, $\gamma(t):=\max\{-\beta(t),0\}$.

注： (2) 式左端的 1 可以用任意的正常数 C_{β_0} 代替, 只要 $C_\beta\geqslant C_{\beta_0}$ 即可.

设非线性项 f 是局部 Lipschitz 连续的, 满足临界增长条件

$$|f(u)-f(v)|\leqslant C|u-v|(1+|u|^r+|v|^r),\qquad u,v\in\mathbb{R},\tag{4}$$

这里常数 $C\geqslant 0$, $0<r\leqslant\frac{q-2}{2}$, $q=\frac{2Q}{Q-2}$.

满足耗散性条件

$$\limsup_{|u|\to\infty}\frac{f(u)}{u}<\mu_1,\qquad\forall u\in\mathbb{R},\tag{5}$$

其中 $\mu_1>0$ 为 $-\Delta$ 在Dirichlet 边界条件下的第一特征值.

当把域分为 $B_R\subset\mathbb{R}$ 和它的补空间, 可得存在常数 $0\leqslant C_0<\mu_1, C_1\in\mathbb{R}$ 使得

$$uf(u)\leqslant C_1|u|+C_0|u|^2,\qquad\forall u\in\mathbb{R},\tag{6}$$

此外, 当我们选择合适的 B_R, 可得存在常数 $C_0\in(0,\frac{\mu_1}{2})$ 满足上述 (6) 式.

2. 预备知识

我们有以下简记:

$$L^p=L^p(\Omega),\ \ H^k=W^{k,2}(\Omega),\ \ V_1=H_0^1,\ \ V_{-1}=H^{-1},\ \ \|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L^p},\ \ \|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2},$$

其中 $p\geqslant 1$.

空间 $L^2(\Omega)$ 中的内积与范数定义如下:

$$\langle u,v\rangle=\int_\Omega u(x)v(x)dx,\qquad\|u\|^2=\int_\Omega|u(x)|^2dx.$$

定义 L^2 中的自伴算子 $A: V_1 \longrightarrow V_{-1},\ \langle Au, v\rangle = \langle \nabla u, \nabla v\rangle, \forall u, v \in V_1$. 其中算子 A 的定义域 $D(A) = \{u \in L^2 | Au \in L^2\} = H^2 \cap H_0^1,\ Au = -\Delta u$ 对 $u \in D(A)$.

我们可以定义 A 的幂等算子 $A^s(s \in \mathbb{R})$, 空间 $V_s = D(A^{\frac{s}{2}})$ 是Hilbert空间, 有内积和范数

$$\langle u, v\rangle_s = \langle A^{\frac{s}{2}} u, A^{\frac{s}{2}} v\rangle, \quad \|u\|_{V_s} = \|A^{\frac{s}{2}} u\|.$$

本文相空间 $V := H \times L^2(\Omega)$.

定义 1 [11] 设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一族赋范空间, 双参数算子族 $\{U(t,\tau): X_\tau \to X_t, t \geqslant \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$ 满足如下性质:

1) 对任意的 $\tau \in \mathbb{R}, U(\tau,\tau) = Id$ 是 X_τ 上的恒等算子;

2) 对任意的 $\sigma \in \mathbb{R}$ 和任意的 $t \geqslant \tau \geqslant \sigma, U(t,\tau)U(\tau,\sigma) = U(t,\sigma)$.

则称 $U(t,\tau)$ 是一个过程.

定义 2 [11] 如果对每个 $t \in \mathbb{R}$, 均存在一个常数 $R > 0$, 使得 $C_t \subset \{z \in X_t : \|z\|_{X_t} \leqslant R\} = B_t(R), \forall t \in \mathbb{R}$. 则称有界集 $C_t \subset X_t$ 的集合族 $\mathcal{C} = \{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一致有界的.

定义 3 [11] 如果集合族 $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 一致有界, 且对任意的 $R > 0$, 存在常数 $t_0(t,R) \leqslant t$, 使得 $\tau \leqslant t_0 \Rightarrow U(t,\tau)B_\tau(R) \subset B_t$, 则称 $\mathcal{B}$ 是拉回吸收的.

定义 4 [11] 若对每个 $t \in \mathbb{R}$, 存在有界集 $B(t) \subset X$, 拉回吸引 X 中的有界子集在时刻 τ, 即对有界集 $D \subset X, \tau \leqslant t$, 有 $\lim\limits_{s\to-\infty} \operatorname{dist}(U(\tau,s)D, B(t)) = 0$, 则称过程 $U(\cdot,\cdot)$ 是有界强耗散的.

定义 5 [11] 若 $\forall t \in \mathbb{R}$,序列 $\{S_k\} \leqslant t(k \to \infty, S_k \to -\infty)$, 有界序列 $\{x_k\} \in X$, 序列 $\{U(t,s_k)x_k\}$ 有收敛子列,则称度量空间 X 中的过程 $U(\cdot,\cdot)$ 是拉回渐近紧的.

定义 6 [11] t 时刻集合 $B(\subset X)$ 的 $\omega-$ 极限集定义如下:

$\omega(B,t) := \bigcap\limits_{\sigma\leqslant t} \overline{\bigcup\limits_{s\leqslant\sigma} U(t,s)B}$, 或者, 等价地, $\omega(B,t) = \{y \in X :$ 序列 $\{s_k\} \leqslant t, s_k \to -\infty(k \to \infty), \{x_k\} \in B$, 使得 $y = \lim\limits_{k\to\infty} U(t,s_k)x_k\}$.

定理 1 [11] 若过程 $U(\cdot,\cdot)$ 是有界拉回强耗散, 拉回渐近紧的, 且 $B(\cdot)$ 是有界子集族 $(B \subset X)$, 使得 $\forall t \in \mathbb{R}$, $B(\cdot)$ 在时刻 τ 拉回吸引有界子集 $(\tau \leqslant t)$, 则 $U(\cdot,\cdot)$ 有紧拉回吸引子 $\mathcal{A}(\cdot)$, 使得 $\mathcal{A}(t) = \omega(\overline{B}(t),t)$, 且 $\forall t \in \mathbb{R}$, $\bigcup_{s\leqslant t} \mathcal{A}(s)$ 是有界的.

定义 7 [4] 设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一族 Banach 空间, $\mathcal{C} = \{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的一族一致有界子集. 我们称定义于 $X_t \times X_t$ 上的函数 $\Phi_\tau^t(\cdot,\cdot)$ 为 $C_\tau \times C_\tau$ 上的收缩函数, 如果对任意固定的 $t \in \mathbb{R}$, 对于任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset C_\tau$, 存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{l\to\infty} \phi_\tau^t(x_{n_k}, x_{n_l}) = 0, \quad \tau \leqslant t.$$

我们用 $\mathcal{C}(C_\tau)$ 表示 $C_\tau \times C_\tau$ 上的收缩函数的集合.

定理 3 [4] 设 $U(\cdot,\cdot)$ 为作用于 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的过程, 且存在时间依赖吸收集 $B = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. 进一步, 假

设对于任意的 $\epsilon_0 > 0$, 存在 $T = T(\epsilon_0) \geqslant \tau, \phi_t^\tau \in \mathcal{C}(B)$, 使得对于任意的 $\tau \geqslant 0$, 有

$$\|U(T,\tau)x - U(T,\tau)y\| \leqslant \epsilon_0 + \phi_t^\tau(x,y), \quad \forall x, y \in B.$$

则 $U(\cdot,\cdot)$ 渐近紧, 其中 $\mathcal{C}(B)$ 为定义于 $B \times B$ 上的收缩函数集合.

3. 主要结果

3.1. 解的存在唯一性

记 $I = [\tau, T], \forall\, T > \tau$. 设 $f \in L^2(\Omega)$ 且二元组 $z = (u, u_t)$, 满足 $(u, u_t) \in L^\infty(I; V) \cap C(I; V), u_t \in L^2(I; V_1)$. 称 $z(t)$ 为问题 (1) 当初值 $z(\tau) = z_\tau$ 时在区间 I 上的弱解, 如果 $\langle u_{tt}, v\rangle - \langle(1 + \delta\|\nabla u\|^2)\Delta u, v\rangle + \langle\beta(t)u_t, v\rangle = \langle f(u), v\rangle$ 对于所有的 $v \in L^2(\Omega)$ 及 $a.e.\ t \in I$ 成立.

应用文献 [9]中的 Galerkin 逼近方法, 可得问题 (1) 解的存在唯一性结果.

定理 4 (解的存在唯一性) 设 $f \in L^2(\Omega)$, 且条件 (2)-(6) 成立. 那么对于任意给定的初值 z_τ, 问题 (1) 存在唯一解 $z(t) = (u(t), u_t(t))$, 满足

$z(t) \in C(I; V) \cap C^1(I; V)$, 且 $\|\nabla u\|^2 \leqslant M$.

证明 给方程 (1) 乘以 u_t, 并且在 Ω 上积分, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{\delta}{4}\|\nabla u\|^4 - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x] + \beta(t)\|u_t\|^2 = 0. \tag{7}$$

其中 $F(u) = \int_0^u f(s)\mathrm{d}s$ 表示 f 的原函数.

在 $[s, t]$ 上积分(1)式, 可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \int_s^t \beta(\tau)\|u_t\|^2\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{\delta}{4}\|\nabla u\|^4 - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\|u_t(s)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(s)\|^2 + \frac{\delta}{4}\|\nabla u(s)\|^4 - \int_\Omega F(u_0)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{8}$$

由非线性项 f 的增长条件, 可得 $\int_\Omega |F(u_0)|\mathrm{d}x \leqslant C\|u_0\|_{L^{r+2}(\Omega)}^{r+2}$.

另一方面, 由 f 的耗散条件和Young不等式, 可得估计

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\delta}{4}\|\nabla u(t)\|^4 - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x \\ \geqslant &\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\delta}{4}\|\nabla u(t)\|^4 - \frac{1}{2}c_0\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_\Omega c_1|u|\mathrm{d}x \\ \geqslant &\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\delta}{4}\|\nabla u(t)\|^4 - \frac{1}{2}(c_0 + \epsilon)\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C_\epsilon \\ \geqslant &\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2(1 - \frac{c_0 + \epsilon}{\mu_1}) + \frac{\delta}{4}\|\nabla u(t)\|^4 - C_\epsilon \\ \geqslant &\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2(1 + \frac{\delta}{2} - \frac{c_0 + \epsilon}{\mu_1}) - C_\epsilon. \end{aligned} \tag{9}$$

DOI: 10.12677/aam.2025.143132

对 $\epsilon > 0, C_\epsilon \geqslant 0$, 这里用到了 Poincaré 不等式.

设

$$M_0 = C(\frac{1}{2}\|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u(s)\|^2 + \frac{\delta}{4}\|\nabla u(s)\|^4 + \|u(s)\|^{r+2}_{L^{r+2}(\Omega)}) + C_\epsilon \tag{10}$$

将 (9) 式代入到等式 (8) 中, 可得

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant M_0 + \int_s^t \gamma(\tau)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

由Gronwall引理以及假设 (3) 式可得:

$$\begin{aligned}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant 2M_0\exp\{2\int_s^t \gamma(\tau)\mathrm{d}\tau\} \\ &\leqslant 2M_0 \cdot \mathrm{e}^{2r_0}.\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $r_0 := \int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}s$.

结合 (9) 式和 (12) 式, 可得下述不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2(1 + \frac{\delta}{2} - \frac{c_0+\epsilon}{\mu_1}) &\leqslant M_0 + \int_s^t \gamma(\tau)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant M_0 + 2r_0M_0\mathrm{e}^{2r_0} \triangleq M\end{aligned} \tag{13}$$

由上述估计可得在空间 $V = H \times L^2(\Omega)$ 中, 解 u 关于时间 $t \in [s,T)$ 是一致有界的.

定理 5 设 $z(t) = U(t,\tau)z_\tau$ 是问题 (1) 关于初值的解, 如果对于任意初值 $z_\tau = (u_0,u_1) \in B_\tau(R) \subset X_\tau$, 条件 (2)-(6) 成立, 则存在 $T_0 > 0$, 使得对 $t-s > T_0$, 以下估计成立 $\|\partial_t u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant R_0$, 其中 R_0 与初值的范数无关.

证明 设 $B \subset V$ 是有界域, $(u_0,v_0) = (u(s),v(s)) \in B$. 注意到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\partial_t u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_s^t \beta(\tau)\|\partial_t u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}\tau \\ \leqslant&\|\partial_t u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u(s)\|^2_H + \frac{\delta}{4}\|u(s)\|^4_H - \int_\Omega F(u_0)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{14}$$

取 $g(\cdot) = \frac{1}{t-s}(\frac{1}{2}\|u(s)\|^2_H + \frac{\delta}{4}\|u(s)\|^4_H - \int_\Omega F(u_0)\mathrm{d}x)$, 由 Gronwall 引理可得

$$\begin{aligned}\|\partial_t u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant&\|\partial_t u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\exp\{-\int_s^t \beta(\sigma)\mathrm{d}\sigma\} \\ &+ \frac{1}{t-s}(\|u(s)\|^2_H + \frac{\delta}{2}\|u(s)\|^4_H - 2\int_\Omega F(u_0)\mathrm{d}x)\int_s^t \exp\{-\int_s^t \beta(\sigma)\mathrm{d}\sigma\}\mathrm{d}\tau \\ \leqslant&\|\partial_t u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}e^{-(t-s)} + \frac{1}{t-s}(\|u(s)\|^2_H + \frac{\delta}{2}\|u(s)\|^4_H - 2\int_\Omega F(u_0)\mathrm{d}x) \cdot \int_s^t e^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau \\ \leqslant&\|\partial_t u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}e^{-(t-s)} + \frac{1}{t-s}(\|u(s)\|^2_H + \frac{\delta}{2}\|u(s)\|^4_H - 2\int_\Omega F(u_0)\mathrm{d}x) \cdot (1 - e^{-(t-s)}) \\ \leqslant&c_0e^{-(t-s)} + \frac{c_0}{t-s}(1 - e^{-(t-s)}).\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $c_0 := \max(\|\partial_t u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}, \|u(s)\|^2_H + \frac{\delta}{2}\|u(s)\|^4_H - 2\int_\Omega F(u_0)$.

注意到 $\lim\limits_{t-s\to\infty}\{c_0 e^{-(t-s)} + \frac{c_0}{t-s}(1-e^{-(t-s)})\} = 0$, 则对 $R_0 > 0$ 足够小, 存在 $T_0 > 0$, 使得对任意 $t - s > T_0$, $\|\partial_t u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant R_0$ 成立。

定理 6 (拉回吸收集)　设 Ω 是 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 中具有光滑边界的有界域. 则在假设 (2)-(6) 下, 过程 $\{U(t,s) : t \geqslant s\}$ 是有界强耗散的.

证明 设 $B \subset V$ 是有界集. 对每个 $\omega_0 = (u_0, v_0) \in B$, 设 $\omega(t) = (u(t), u_t(t))$ 是问题 (1) 的解. 考虑连续函数 $\Phi_\theta : X \to R$ 定义如下:

$$\Phi_\theta(\omega) = \frac{1}{2}\|\partial_t u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_H + \frac{\delta}{4}\|u\|^4_H + \theta\langle u, u_t\rangle - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x \tag{16}$$

其中常数 $\theta > 0$.

由 (6) 式可得, $\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+, C_\epsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\partial_t u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_H + \frac{\delta}{4}\|u\|^4_H \\
&= \Phi_\theta(\omega) - \theta\langle u, u_t\rangle + \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \Phi_\theta(\omega) + \frac{\theta}{\sqrt{\mu_1}}\|u\|_H\|\partial_t u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}c_0\|u(t)\|^2_{L^2} + c_1\int_\Omega |u(x,t)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \Phi_\theta(\omega) + \frac{\theta}{2\mu_1}\|u\|^2_H + \frac{\theta}{2}\|\partial_t u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c_0+\epsilon}{2\mu_1}\|u\|^2_H + C_\epsilon,
\end{aligned} \tag{17}$$

这里用到了 Young 不等式以及 Poincaré 不等式, 因此

$$(\frac{1}{2} - \frac{\theta}{2\mu_1} - \frac{c_0+\epsilon}{2\mu_1})\|u\|^2_H + \frac{\delta}{4}\|u\|^4_H + (\frac{1}{2} - \frac{\theta}{2})\|\partial_t u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \Phi_\theta(\omega) + C_\epsilon.$$

选择 $\theta < min(1, \mu_1), \epsilon$ 足够小, 可得常数 $\overline{C_0} > 0, \overline{C_1} > 0$ 与初值(或时间)无关, 有

$$\|u\|^2_H + \|\partial_t u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \overline{C_0}\Phi_\theta(\omega) + \overline{C_1} \tag{18}$$

由于 $\gamma(t)$ 是连续可积函数, 则存在 $0 < M_\gamma < \infty$ 使得对几乎处处的 $\tau \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$0 \leqslant \gamma(\tau) \leqslant M_\gamma \tag{19}$$

选择正常数 $C_\gamma + C_\beta < M_\alpha < \infty$, 定义 $A := \{t \in \mathbb{R} | -M_\gamma \leqslant \beta(t) \leqslant M_\alpha\}, B := \{t \in \mathbb{R} | \beta(s) > M_\alpha\}$.

根据假设 (2) 可得 $m(A) = \infty$.

显然, 由方程 (1) 可得:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_\theta(\omega) &= \langle \partial_t u, \partial_{tt} u\rangle + \langle \nabla u, \nabla u_t\rangle + \langle \delta\|\nabla u\|^2\nabla u, \nabla u_t\rangle + \theta\|\partial_t u\|^2 + \theta\langle u, \partial_{tt}u\rangle - \langle f(u), \partial_t u\rangle \\
&= \langle \partial_t u, -\beta(t)u_t + (1+\delta\|\nabla u\|^2)\Delta u + f(u)\rangle + \langle \nabla u, \nabla u_t\rangle + \langle \delta\|\nabla u\|^2\nabla u, \nabla u_t\rangle \\
&\quad + \theta\|\partial_t u\|^2 + \theta\langle u, -\beta(t)u_t + (1+\delta\|\nabla u\|^2)\Delta u + f(u)\rangle - \langle f(u), \partial_t u\rangle \\
&= -(\beta(t)-\theta)\|\partial_t u\|^2 - \theta\beta(t)\langle u, \partial_t u\rangle - \theta(1+\delta\|\nabla u\|^2)\|\nabla u\|^2 + \theta\int_\Omega uf(u)\mathrm{d}x \\
&\leqslant -(\beta(t)-\theta)\|\partial_t u\|^2 - (\theta + \frac{\theta\delta}{2} - \frac{\theta(c_0+\epsilon)}{\mu_1})\|\nabla u\|^2 + \theta\beta(t)\langle u, \partial_t u\rangle + C_\epsilon. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

这里用到了 Poincaré 不等式, Cauchy − Schwarz 不等式以及 Young 不等式对任意的 $0 < \epsilon < \frac{\mu_1}{2}$, 由 (6) 式可得 $c_0 < \frac{\mu_1}{2}$, 只要 $0 < \epsilon < \frac{\mu_1}{2}$, 上述不等式中就可以保证 $\theta + \frac{\theta\delta}{2} - \frac{\theta(c_0+\epsilon)}{\mu_1} > 0$.

在 $[s,t]$ 上积分上述式子可得

$$
\begin{aligned}
\Phi_\theta(\omega(t)) &\leqslant \int_s^t (-(\beta(\tau)-\theta)\|\partial_t u\|^2 - (\theta + \frac{\theta\delta}{2} - \frac{\theta(c_0+\epsilon)}{\mu_1})\|\nabla u\|^2 + \theta\beta(\tau)\langle u, \partial_t u\rangle + C_\epsilon)\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \Phi_\theta(\omega_0) \\
&\leqslant \int_s^t (\gamma(\tau)+\theta)\|\partial_t u\|^2 - (\theta + \frac{\theta\delta}{2} - \frac{\theta(c_0+\epsilon)}{\mu_1})\|\nabla u\|^2 + \theta\beta(\tau)\langle u, \partial_t u\rangle + C_\epsilon)\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \Phi_\theta(\omega_0) \qquad (21)
\end{aligned}
$$

给上述不等式两边同乘 χ_A

$$
\begin{aligned}
\chi_A\Phi_\theta(\omega(t)) &\leqslant \int_{A\cap[s,t]} (\gamma(\tau)+\theta)\|\partial_t u\|^2 - (\theta + \frac{\theta\delta}{2} - \frac{\theta(c_0+\epsilon)}{\mu_1})\|\nabla u\|^2 + \theta\beta(\tau)\langle u, \partial_t u\rangle \\
&\quad + C_\epsilon)\mathrm{d}\tau + \Phi_\theta(\omega_0) \\
&\leqslant \int_{A\cap[s,t]} (\gamma(\tau)+\theta)\|\partial_t u\|^2 - (\theta + \frac{\theta\delta}{2} - \frac{\theta(c_0+\epsilon)}{\mu_1})\|\nabla u\|^2 + \theta(M_\gamma + M_\alpha)\langle u, \partial_t u\rangle \\
&\quad + C_\epsilon)\mathrm{d}\tau + \Phi_\theta(\omega_0) \\
&\leqslant \int_{A\cap[s,t]} (\gamma(\tau)+\theta+\theta C_{\epsilon_1}(M_\gamma + M_\alpha))\|\partial_t u\|^2 - (\theta + \frac{\theta\delta}{2} - \frac{\theta(c_0+\epsilon)}{\mu_1} \\
&\quad - \frac{\theta\epsilon_1(M_\gamma + M_\alpha)}{\mu_1})\|\nabla u\|^2 + C_\epsilon)\mathrm{d}\tau + \Phi_\theta(\omega_0) \qquad (22)
\end{aligned}
$$

这里用到了 Poincaré 不等式和 Cauchy − Schwarz 不等式对 $\epsilon > 0$. 选择 $0 < \epsilon_1 < \frac{\mu_1}{2(M_\gamma + M_\alpha)}$ 使得 $\theta + \frac{\theta\delta}{2} - \frac{\theta(c_0+\epsilon)}{\mu_1} - \frac{\theta\epsilon_1(M_\gamma+M_\alpha)}{\mu_1}) > 0$.

由定理 7, $\forall t-s>T_0$, 有

$$
\begin{aligned}
\chi_A\Phi_\theta(\omega(t)) \leqslant & \int_{A\cap[s,t]}(\gamma(\tau)+\theta+\theta C_{\epsilon_1}(M_\gamma+M_\alpha))R_0-(\theta+\frac{\theta\delta}{2}-\frac{\theta(c_0+\epsilon)}{\mu_1} \\
& -\frac{\theta\epsilon_1(M_\gamma+M_\alpha)}{\mu_1})\|\nabla u\|^2+C_\epsilon)\mathrm{d}\tau+\Phi_\theta(\omega_0) \\
\leqslant & \gamma_0R_0+\int_{A\cap[s,t]}(\theta+\theta C_{\epsilon_1}(M_\gamma+M_\alpha))R_0-(\theta+\frac{\theta\delta}{2}-\frac{\theta(c_0+\epsilon)}{\mu_1} \\
& -\frac{\theta\epsilon_1(M_\gamma+M_\alpha)}{\mu_1})\|\nabla u\|^2+C_\epsilon)\mathrm{d}\tau+\Phi_\theta(\omega_0),
\end{aligned}
\tag{23}
$$

其中 $\gamma_0:=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(s)\mathrm{d}s$.

结合不等式 (18) 可得: $\|\nabla u\|^2\geqslant R_1>\frac{2\mu_1\theta r_0+2\mu_1\theta C_{\epsilon_1}(M_\gamma+M_\alpha)R_0+2\mu_1C_\epsilon}{2\theta\mu_1+\theta\delta\mu_1-2\theta(C_0+\epsilon)-2\theta\epsilon_1(M_\gamma+M_\alpha)}$, 有

$$
\chi_A(\|\partial_tu\|^2+\|\nabla u\|^2)\leqslant\overline{C_0}(-C_\delta m(A\cap[s,t])+\gamma_0R_0+\Phi_\delta(\omega_0))+\overline{C_1}, \tag{24}
$$

其中 $C_\delta>0$. 在另一方面, 对 $\theta=0$ 我们有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_0(\omega(t))=-\beta(t)\|\partial_tu\|^2$,

在 $[s,t]$ 上积分上述等式, 得

$$
\Phi_0(\omega(t))=-\int_s^t\beta(\tau)\|\partial_tu\|^2\mathrm{d}\tau+\Phi_0(\omega_0) \tag{25}
$$

给 (25) 式两边同乘 χ_B, 得

$$
\begin{aligned}
\chi_B\Phi_0(\omega(t)) &= -\int_{B\cap[s,t]}\beta(\tau)\|\partial_tu\|^2\mathrm{d}\tau+\Phi_0(\omega_0) \\
&\leqslant -\int_{B\cap[s,t]}M_\alpha\|\partial_tu\|^2\mathrm{d}\tau+\Phi_0(\omega_0)
\end{aligned}
$$

若 $\|\partial_tu\|^2\geqslant\frac{1}{2}R_0$, 则

$$
\chi_B\Phi_0(\omega(t))\leqslant-M_\alpha R_0m(B\cap[s,t])+2\Phi_0(\omega_0) \tag{26}
$$

对 (18) 式使用同样的方法, 可得

$$
\|u\|^2_{X^{\frac{1}{2}}}+\|\partial_tu\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant\widetilde{C_0}\Phi_0(\omega)+\widetilde{C_1} \tag{27}
$$

结合 (24), (26) 和 (27) 式可得:

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{X^{\frac{1}{2}}}+\|\partial_tu\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \overline{C_0}(-C_\delta m(A\cap[s,t])+\gamma_0R_0+\Phi_\delta(\omega_0))+\overline{C_1} \\
&\leqslant \widetilde{C_0}(-M_\alpha R_0m(B\cap[s,t])+2\Phi_0(\omega_0))+\widetilde{C_1}
\end{aligned}
$$

因此, 由于 $m(A)=\infty$, 存在 $T_A>0$, 使得对任意的 $t-s>\max(T_0,T_A)$ 有

$$\|u\|^2_{X^{\frac{1}{2}}}+\|\partial_t u\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant R_0+\min(R_1,\overline{C_1}+\widetilde{C_1}) \tag{28}$$

这就证明了过程 $U(t,s):t\geqslant s$ 是强耗散的, 即对任意的有界集 $B\subset V$, 存在 $R>0$, 使得对任意时刻 $t\geqslant T(B)$, 有 $\quad U(t+s,s)B\subset B_r(0,r), \quad \forall s\in\mathbb{R} \quad$ (29) 成立.

4. 拉回吸引子的存在性

4.1. 先验估计

为了得到过程的拉回渐近紧性, 我们先进行以下先验估计.

设 $(u_i,u_{i_t}(t))(i=1,2)$ 为问题 (1) 相应初值 $(u_{i_0},u_{i_1})\in\{B_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ 的解,

记 $\omega(t)=u_1(t)-u_2(t)$, 则 $\omega(t)$ 满足以下方程

$$\begin{cases} \omega_{tt}-\dfrac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)\Delta\omega-\dfrac{\delta}{2}\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle\Delta(u_1+u_2) & \\ \quad -\Delta\omega+\beta(t)\omega_t=f(u_1)-f(u_2), & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \omega(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,t\in\mathbb{R}, \\ \omega(x,0)=u_{1_0}(x)-u_{2_0}(x),\omega_t(x,0)=u_{1_1}(x)-u_{2_1}(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{30}$$

给 (30) 式乘以 $\omega(t)$, 并且在 $[\tau,T]\times\Omega$ 上积分, 有

$$\begin{aligned} &\int_\Omega\partial_t\omega(T)\omega(T)\mathrm{d}x+\int_\tau^T\int_\Omega|\nabla\omega(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{\delta}{2}\int_\tau^T\int_\Omega(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)|\nabla\omega(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\quad+\frac{\delta}{2}\int_\tau^T|\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle|^2\mathrm{d}t+\int_\tau^T\int_\Omega\beta(t)\partial_t\omega\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\quad=\int_\Omega\partial_t\omega(\tau)\omega(\tau)\mathrm{d}x+\int_\tau^T\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\omega(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\tau^T\|\partial_t\omega\|^2\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{31}$$

因此, 可得;

$$\begin{aligned} &\int_\tau^T\|\nabla\omega(t)\|^2\mathrm{d}t+\frac{\delta}{2}\int_\tau^T\int_\Omega(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)|\nabla\omega(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{\delta}{2}\int_\tau^T|\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle|^2\mathrm{d}t \\ &=-\int_\tau^T\int_\Omega\beta(t)\partial_t\omega\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\Omega\partial_t\omega(\tau)\omega(\tau)\mathrm{d}x+\int_\tau^T\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\omega(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &+\int_\tau^T\|\partial_t\omega\|^2\mathrm{d}t-\int_\Omega\partial_t\omega(T)\omega(T)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{32}$$

然后, 给 (30) 式乘以 $\omega_t(t)$, 并且在 $[s,T]\times\Omega$ 上积分, 有

$$\begin{aligned} &\|\partial_t\omega(T)\|^2+2\int_s^T\beta(t)\|\partial_t\omega\|^2\mathrm{d}t+\|\nabla\omega\|^2+\frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(T)\|^2 \\ &+\delta\int_s^T\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t\rangle\mathrm{d}t \\ &=2\int_s^T\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega\rangle\mathrm{d}t+\|\partial_t\omega(s)\|^2+\|\nabla\omega(s)\|^2+\frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(s)\|^2 \end{aligned} \tag{33}$$

对 $g(t) = 2\langle f(u_1) - f(u_2), \partial_t\omega\rangle + \frac{1}{t-s}[\|\nabla\omega(s)\|^2 + \frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2 + \|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(s)\|^2]$ 应用拓展型的Gronwall引理, 可得

$$\begin{aligned}&\|\partial_t\omega(T)\|^2\\ &\leqslant \|\partial_t\omega(s)\|^2\exp\{-2\int_s^t\beta(\sigma)\mathrm{d}\sigma\} + 2\int_s^t\langle f(u_1) - f(u_2), \partial_t\omega\rangle\exp\{-2\int_\tau^T\beta(\sigma)\mathrm{d}\sigma\}\mathrm{d}\tau\\ &+\int_s^t\frac{1}{t-s}[\|\nabla\omega(s)\|^2 + \frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2 + \|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(s)\|^2]\exp\{-2\int_\tau^T\beta(\sigma)\mathrm{d}\sigma\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{34}$$

结合 $\beta(\cdot)$ 的条件, 得

$$\begin{aligned}&\|\partial_t\omega(T)\|^2\\ &\leqslant \|\partial_t\omega(s)\|^2\mathrm{e}^{-2(T-s)} + 2\int_s^t\langle f(u_1) - f(u_2), \partial_t\omega\rangle\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\\ &+\frac{1}{t-s}[\|\nabla\omega(s)\|^2 + \frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2 + \|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(s)\|^2]\int_s^t\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{35}$$

接下来构造收缩函数. 定义能量泛函

$$E_\omega(t) = \frac{1}{2}\|\partial_t\omega\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\omega\|^2 + \frac{\delta}{4}(\|\nabla u_1\|^2 + \|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega\|^2\tag{36}$$

给 (30) 式乘以 $\omega_t(t)$, 并且在 $[t, T]\times\Omega$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}&E_\omega(T) + \int_t^T\beta(\tau)\|\partial_t\omega\|^2\mathrm{d}\tau + \frac{\delta}{2}\int_t^T\langle\nabla(u_1+u_2), \nabla\omega\rangle\langle\nabla(u_1+u_2), \nabla\omega_t\rangle\mathrm{d}\tau\\ &= \int_t^T\langle f(u_1) - f(u_2), \partial_t\omega\rangle\mathrm{d}\tau + E_\omega(t)\end{aligned}\tag{37}$$

在 $[s, T]$ 上积分(37)式关于 t , 可得

$$\begin{aligned}&(T-S)E_\omega(T) + \frac{\delta}{2}\int_s^T\int_t^T\langle\nabla(u_1+u_2), \nabla\omega\rangle\langle\nabla(u_1+u_2), \nabla\omega_t\rangle\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\ &+\int_s^T\int_t^T\beta(\tau)\|\partial_t\omega\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \leqslant \int_s^T\int_t^T\langle f(u_1) - f(u_2), \partial_t\omega\rangle\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t + \int_s^T E_\omega(t)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{38}$$

结合(32)式和(38)式可得

$$\begin{aligned}&(T-S)E_\omega(T) + \frac{\delta}{2}\int_s^T\int_t^T\langle\nabla(u_1+u_2), \nabla\omega\rangle\langle\nabla(u_1+u_2), \nabla\omega_t\rangle\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\ &+\int_s^T\int_t^T\beta(\tau)\|\partial_t\omega\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_s^T\int_t^T\langle f(u_1) - f(u_2), \partial_t\omega\rangle\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t + \int_s^T\|\partial_t\omega\|^2\mathrm{d}t - \frac{\delta}{4}\int_s^T|\langle\nabla(u_1+u_2), \nabla\omega\rangle|^2\mathrm{d}t\\ &+\frac{1}{2}\langle\partial_t\omega(s), \omega(s)\rangle + \frac{1}{2}\int_s^T\langle f(u_1) - f(u_2), \omega\rangle\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\langle\partial_t\omega(T), \omega(T)\rangle - \frac{1}{2}\int_s^T\beta(t)\langle\partial_t\omega, \omega\rangle\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{39}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&(T-S)E_\omega(T)\\
\leqslant&\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\|\partial_t\omega\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+\int_s^T\int_t^T\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega\rangle\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+\int_s^T\|\partial_t\omega\|^2\mathrm{d}t\\
&+\frac{1}{2}\langle\partial_t\omega(s),\omega(s)\rangle+\frac{1}{2}\int_s^T\langle f(u_1)-f(u_2),\omega\rangle\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\langle\partial_t\omega(T),\omega(T)\rangle-\frac{1}{2}\int_s^T\beta(t)\langle\partial_t\omega,\omega\rangle\mathrm{d}t\\
&-\frac{\delta}{4}\int_s^T|\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle|^2\mathrm{d}t-\frac{\delta}{2}\int_s^T\int_t^T\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t\rangle\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t
\end{aligned}\tag{40}
$$

由(35)式可得

$$
\begin{aligned}
&\int_s^T\|\partial_t\omega\|^2\mathrm{d}t\\
\leqslant&\|\partial_t\omega(s)\|^2\int_s^T\mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}t+2\int_s^T\int_s^t\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega(\tau)\rangle\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
&+[\|\nabla\omega(s)\|^2+\frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(s)\|^2]\int_s^T\int_s^t\frac{1}{t-s}\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t
\end{aligned}\tag{41}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\|\partial_t\omega\|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
\leqslant&\|\partial_t\omega(s)\|^2\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\mathrm{e}^{-2(\tau-s)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
&+\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\int_s^\tau\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega(\sigma)\rangle\mathrm{e}^{-2(\tau-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
&+[\|\nabla\omega(s)\|^2+\frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(s)\|^2]\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\frac{1}{\tau-s}\int_s^\tau\mathrm{e}^{-2(\tau-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
\leqslant&\|\partial_t\omega(s)\|^2\int_s^T\mathrm{e}^{-2(t-s)}\int_t^T\gamma(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
&+\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\int_s^\tau\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega(\sigma)\rangle\mathrm{e}^{-2(\tau-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
&+[\|\nabla\omega(s)\|^2+\frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(s)\|^2]\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\frac{1}{\tau-s}\int_s^\tau\mathrm{e}^{-2(\tau-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
\leqslant&C_{\gamma,B}\int_s^T\mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}t+\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\int_s^\tau\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega(\sigma)\rangle\mathrm{e}^{-2(\tau-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
&+[\|\nabla\omega(s)\|^2+\frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(s)\|^2]\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\frac{1}{\tau-s}\int_s^\tau\mathrm{e}^{-2(\tau-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t
\end{aligned}\tag{42}
$$

其中常数 $C_{\gamma,B}$ 依赖于 $\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(s)\mathrm{d}s$ 和有界域 B 的半径.

因此, 由(40),(41)和(42)式可得

$$
\begin{aligned}
&(T-S)E_\omega(T)\\
\leqslant{}& \|\partial_t\omega(s)\|^2\int_s^T \mathrm{e}^{-2(t-s)}\int_t^T\gamma(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+2\int_s^T\int_s^t\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega(\tau)\rangle \mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
&+[\|\nabla\omega(s)\|^2+\frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(s)\|^2]\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\frac{1}{\tau-s}\int_s^\tau \mathrm{e}^{-2(\tau-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
&+\int_s^T\int_t^T\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega\rangle\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+\|\partial_t\omega(s)\|^2\int_s^T \mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}t\\
&+\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\int_s^\tau\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega(\sigma)\rangle \mathrm{e}^{-2(\tau-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
&+[\|\nabla\omega(s)\|^2+\frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(s)\|^2]\int_s^T\int_s^t\frac{1}{t-s}\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
&+\frac{1}{2}\langle\partial_t\omega(s),\omega(s)\rangle+\frac{1}{2}\int_s^T\langle f(u_1)-f(u_2),\omega\rangle\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\langle\partial_t\omega(T),\omega(T)\rangle-\frac{1}{2}\int_s^T\beta(t)\langle\partial_t\omega,\omega\rangle\mathrm{d}t\\
&-\frac{\delta}{4}\int_s^T|\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle|^2\mathrm{d}t-\frac{\delta}{2}\int_s^T\int_t^T\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t\rangle\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t
\end{aligned}\tag{43}
$$

定义

$$
\begin{aligned}
\Psi_{T,s}(u_1,u_2)={}&\frac{1}{T-s}[\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\int_s^\tau\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega(\sigma)\rangle \mathrm{e}^{-2(\tau-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
&+\int_s^T\int_t^T\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega\rangle\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_s^T\langle f(u_1)-f(u_2),\omega\rangle\mathrm{d}t\\
&+2\int_s^T\int_s^t\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega(\tau)\rangle \mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_s^T\beta(t)\langle\partial_t\omega,\omega\rangle\mathrm{d}t]
\end{aligned}\tag{44}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
E_\omega(T)\leqslant{}&\frac{1}{T-s}\{C_{\gamma,B}\int_s^T \mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}t+[\|\nabla\omega(s)\|^2+\frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(s)\|^2]\cdot\\
&\int_s^T\int_t^T\gamma(\tau)\frac{1}{\tau-s}\int_s^\tau \mathrm{e}^{-2(\tau-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+\|\partial_t\omega(s)\|^2\int_s^T \mathrm{e}^{-2(t-s)}\mathrm{d}t\\
&+[\|\nabla\omega(s)\|^2+\frac{\delta}{2}(\|\nabla u_1\|^2+\|\nabla u_2\|^2)\|\nabla\omega(s)\|^2]\int_s^T\int_s^t\frac{1}{t-s}\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\\
&+\frac{1}{2}\langle\partial_t\omega(s),\omega(s)\rangle-\frac{1}{2}\langle\partial_t\omega(T),\omega(T)\rangle-\frac{\delta}{4}\int_s^T|\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle|^2\mathrm{d}t\\
&-\frac{\delta}{2}\int_s^T\int_t^T\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega\rangle\langle\nabla(u_1+u_2),\nabla\omega_t\rangle\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t\}+\Psi_{T,s}(u_1,u_2)
\end{aligned}\tag{45}
$$

4.2. 拉回渐近紧性

在这部分我们通过收缩函数的方法来证明问题 (1) 对应的过程是拉回渐近紧的.

定理 7 如果条件 (2)-(6) 成立, 对于任意固定的 $s\in\mathbb{R}$, 任意有界序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset V$ 以及任意序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[s,\infty)$, 当 $n\to\infty$ 时, 有 $t_n\to\infty$, 则序列 $\{U(s,t_n)x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列.

证明 对任意固定的 $\epsilon_0>0$, 对固定的 s, 取 $T>s$, 使得 $T-s$ 足够大, 结合(45) 式和控制收敛定理, 可得 $E_\omega(T)\leqslant\epsilon_0+\Psi_{T,s}(u_1,u_2)$. 因此, 根据定理 3, 只需验证对任意固定的 s, 有 $\Psi_{T,s}(u_1,u_2)\in\mathcal{C}(B)$.

设 (u_n,u_{n_t}) 为问题 (1) 关于初值 $(u_0,u_1)\in V$ 的解. 接下来, 我们证明

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Psi_{T,s}(u_n,u_m)=0.$$

根据定理 4, 不失一般性, 我们假设

$$u_n\to u\text{ 在 }L^\infty(\tau,T;H_0^1(\Omega))\text{ 中弱 }*\text{ 收敛,}\tag{46}$$

$$u_{n_t}\to u_t\text{ 在 }L^\infty(\tau,T;L^2(\Omega))\text{ 中弱 }*\text{ 收敛,}\tag{47}$$

$$u_n\to u\text{ 在 }L^{p+1}(\tau,T;L^{p+1}(\Omega))\text{ 中强收敛,}\tag{48}$$

$$u_n\to u\text{ 在 }L^2(\tau,T;L^2(\Omega))\text{ 中强收敛.}\tag{49}$$

这里我们用到了紧嵌入 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$.

下面估计 (44) 式中的每一项. 由定理 6 及 (46)-(49) 式, 有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\int_s^T\int_\Omega(f(u_m)-f(u_n))(u_{n_t}-u_{m_t})\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s=0,\tag{50}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega(f(u_m)-f(u_n))(u_m-u_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,\tag{51}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_t^T\int_\Omega\beta(\tau)(u_{n_t}-u_{m_t})(u_m-u_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau=0,\tag{52}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_t^T\int_s^T\gamma(\tau)\langle f(u_n)-f(u_m),\partial_t\omega(\sigma)\rangle\mathrm{e}^{-2(\tau-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau=0\tag{53}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_s^t\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\omega(\tau)\rangle\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=0\tag{54}$$

事实上, 有

$$\begin{aligned}&\int_\tau^T\int_\Omega(f(u_m)-f(u_n))(u_m-u_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad\leqslant C\int_\tau^T\int_\Omega(1+|u_m|^{p-1}+|u_n|^{p-1})|u_m-u_n|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{55}$$

DOI: 10.12677/aam.2025.143132

由于序列 $\{(u_n, u_{n_t})\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 结合 (49) 式, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega (f(u_m)-f(u_n))(u_m-u_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

同理可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\tau^T\int_\Omega (f(u_m)-f(u_n))(u_{n_t}-u_{m_t})\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

因此, 我们验证了 $\Psi_{T,s}(\cdot,\cdot)$ 是收缩函数.

4.3. 拉回吸引子的存在性

定理 8 假设条件 (2)-(6) 成立, 则由问题 (1) 生成的过程 $U(t,\tau): X_\tau \to X_t$ 拥有拉回吸引子 $\mathcal{A}(\cdot)$.

证明 由定理 6, 定理 7, 定理 1 知, 存在拉回吸引子 $\mathcal{A}(\cdot)$.

参考文献

[1] Conti, M. and Pata, V. (2014) Asymptotic Structure of the Attractor for Processes on Time-Dependent Spaces. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **19**, 1-10. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.02.002

[2] Chueshov, I. (2012) Long-Time Dynamics of Kirchhoff Wave Models with Strong Nonlinear Damping. *Journal of Differential Equations*, **252**, 1229-1262. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.08.022

[3] Yang, Z. and Da, F. (2019) Stability of Attractors for the Kirchhoff Wave Equation with Strong Damping and Critical Nonlinearities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **469**, 298-320. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.09.012

[4] Meng, F., Yang, M. and Zhong, C. (2015) Attractors for Wave Equations with Nonlinear Damping on Time-Dependent Space. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, **21**, 205-225. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.205

[5] 刘亭亭, 马巧珍. Plate方程时间全局依赖吸引子的存在性[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2016(2): 35-44.

[6] 汪璇, 胡弟弟. 记忆型无阻尼抽象发展方程的时间依赖全局吸引子[J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, 55(4): 828-838.

[7] 胡弟弟, 汪璇. 记忆型抽象发展方程的时间依赖吸引子的存在性[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2018(1): 35-49.

[8] 汪璇, 韩英, 胡弟弟. 记忆型抽象发展方程的时间依赖全局吸引子[J]. 吉林大学学报(理学版), 2018, 56(4): 769-778.

[9] 汪璇, 苏洁. Kirchhoff型波方程的时间依赖全局吸引子[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2021, 43(4): 635-645.

[10] 苏洁, 汪璇. 带有非局部强阻尼的Kirchhoff型波方程的时间依赖全局吸引子[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2023, 62(4): 165-177.

[11] Conti, M., Pata, V. and Temam, R. (2013) Attractors for Processes on Time-Dependent Spaces. Applications to Wave Equations. *Journal of Differential Equations*, **255**, 1254-1277. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.05.013