Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(3), 450-466
Published Online March 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.143131

VaR 约束下 DC 养老金的最优投资问题

高淑萍

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2025年2月25日；录用日期：2025年3月18日；发布日期：2025年3月26日

摘 要

本文研究了带有 **VaR (Value-at-Risk,** 风险价值)约束的固定缴费(**defined contribution, DC**)型养老金的最优投资问题。基金管理者将基金账户财富投资于由无风险资产，指数债券以及股票所组成的金融市场中, 其目标为使得终端财富在 **VaR** 约束下的预期效用最大化。本文模型考虑随机的通货膨胀环境以及随机的薪资过程，风险资产的漂移项为随机变量，风险市场价格具有已知的概率分布。首先引入辅助过程, 将原问题转化为自融资问题。然后应用 **Lagrange** 对偶理论和鞅方法, 推导得到了 **CRRA** 效用下的最优投资策略。

关键词

DC养老金，通货膨胀，VaR约束，鞅方法，Lagrange对偶理论

Optimal Investment of DC Pension Plans under VaR Constraint

Shuping Gao

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjing

Received: Feb. 25^{th}, 2025; accepted: Mar. 18^{th}, 2025; published: Mar. 26^{th}, 2025

文章引用: 高淑萍. VaR 约束下 DC 养老金的最优投资问题[J]. 应用数学进展, 2025, 14(3): 450-466.
DOI: 10.12677/aam.2025.143131

Abstract

This paper investigates an optimal investment problem of defined contribution (DC) pension with VaR (Value-at-Risk) constraint. The fund managers invest his wealth in a financial market consisting of a risk-free asset, a stock and an index bond, with the objective of maximizing the expected utility of terminal wealth under VaR constraint. In this model, we take account into stochastic inflation and salary process. The drift terms of the risky assets are described by random variables, and the market price of risk has a known probability distribution. We first introduce an auxiliary process to transform the original problem into a self-financing optimization problem. Then using the Lagrange dual method and martingale method, we derive the optimal investment strategy under CRRA utility.

Keywords

DC Pension, Inflation, VaR Constraint, Martingale Method, Lagrange Dual Method

1. 引言

随着老龄化日益加深和社会的高速发展, 老年人更加追求高质量的生活, 养老基金是现行社会保障体系的重要组成部分, 关系到人们退休后的基本生活水平, 因此研究养老基金的管理具有重要的意义. 由于在 DC 型养老基金计划中是由基金成员来承担风险, 因此 DC 型养老基金在养老金领域内更受欢迎, 而对于退休后的 DC 型养老金成员其基金账户的收益取决于在退休前基金投资组合的表现, 故积累阶段的资产配置决策对 DC 型养老金的管理至关重要. 目前已经有大量文献在不同的金融市场风险下研究了 DC 型养老金的投资问题, 比如股票波动风险, 利率风险, 通货膨胀风险等. 例如, Gao [1]考虑了当股票价格服从 CEV 模型时 DC 型养老金的投资组合优化问题. Guan 和 Liang [2]中的股票价格服从 Heston 随机波动率模型, 在随机利率和随机波动率下研究了 DC 型养老金的最优投资问题. 另外, Boulier 等 [3]研究了 Vasicek 随机利率模型下 DC 型养老金的最优投资策略. Han 和 Hung [4]考虑利率服从 CIR 模型, 研究了具有通货膨胀风险 DC 型养老金的投资组合选

择问题.

由于 DC 型养老金的投资期限较长, 通常涉及 20 40 年的时间, 因此考虑市场中的通货膨胀风险是至关重要的. 在 Battocchio 和 Menoncin [5] 中, 首次在 DC 型养老金模型中引入了通货膨胀风险, 考虑了通货膨胀风险对 DC 型养老基金管理的影响. Zhang 等 [6]在模型中引入了通货膨胀挂钩债券, 以此来对冲通货膨胀风险, 应用鞅方法推导出了 DC 型养老基金的最优投资组合. Han 和 Hung [4] 同时考虑了利率风险和随机通货膨胀风险, 应用随机动态规划方法在 CRRA 效用准则下研究了 DC 型养老金的资产配置问题. 在投资模型中, VaR 约束在给定的置信水平下, 对预期损失施加约束, 描述了在一定概率条件下的最大预期损失. Basak和Shapiro [7]考虑 VaR 风险管理, 应用鞅方法推导出了最优投资策略. Guan 和 Liang [8] 在 VaR 约束下求解了 DC 养老金的最优投资问题. 类似地, Dong 和 Zheng [9] 研究了带有 VaR 约束的最优配置问题. Dong 等人 [10] 在 VaR 和 ES 约束下应用鞅方法求解了 DC 养老金的最优投资问题. Bäuerle和Chen [11]考虑了在部分信息和鲁棒 VaR 约束下应用鞅方法求解投资组合的优化问题. 更多关于 VaR 约束的研究参见文献 Lv 等 [12], Liu 等 [13]以及 Guan 等 [14].

本文研究了带有 VaR 约束的 DC 型养老金的最优投资组合选择问题. 基金管理者可以将财富投资于由无风险资产, 指数债券和股票所组成的金融市场中. 本文将通货膨胀风险和随机工资过程纳入模型, 引入指数债券来对冲通货膨胀风险, 目标为推导出带有 VaR 约束的 DC 养老金优化问题的最优投资策略. 在现有文献中, 风险资产的漂移项通常被假定为常数, 而在本文模型中风险资产价格过程的漂移项由随机变量表示, 并且假设已知风险市场价格的概率分布, 我们首先引入辅助过程将原问题转化为自融资问题, 然后应用 Lagrange 对偶理论和鞅方法求解出了 CRRA 效用下基金账户的最优投资组合.

文章其余部分内容如下: 第二节描述了金融市场的基本模型和财富过程, 建立了 DC 型养老金的终端财富预期效用优化模型. 第三节引入的一个辅助过程, 将原问题转化为了自融资优化问题. 第四节应用 Lagrange 对偶理论和鞅方法推导出了带有 VaR 约束的 DC 型养老金的的最优投资组合. 第五节为论文的总结.

2. 模型建立

考虑完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. 定义 $\mathbf{W}(t) = (W_P(t), W_S(t))^\top_{0\le t\le T}$ 是概率空间上的二维标准布朗运动(本文中“$\top$” 表示转置), 基金账户从零时刻开始投资, 在 T 时刻终止, 另外在此概率空间上定义相互独立的随机变量 Θ_P 和 Θ_S, 其均与 $\mathbf{W}(t)$ 相互独立. 由布朗运动 $\mathbf{W}(\cdot)$ 和 Θ_S 与 Θ_P 生成的过滤为 $\mathbb{G} \triangleq \{\mathcal{G}(t) = \sigma(\mathbf{W}(t)) \vee \sigma(\Theta_S) \vee \sigma(\Theta_P); 0 \le t \le T\}$.

2.1. 金融市场

本小节考虑了类似于 Chen 等 [15]中的金融市场, 假设金融市场由三种可交易资产组成: 无风险资产, 指数债券和股票. 无风险资产在 t 时刻的价格 $S_0(t)$ 满足如下常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)} = r\mathrm{d}t,$$

其中 $r \ge 0$ 为常数, 表示名义利率.

在本文的模型中, 我们考虑通货膨胀风险对股价的影响. 在金融市场中, 价格水平常被用于反映通货膨胀或紧缩的程度, 本文定义价格水平 $P(t)$ 满足如下随机微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)} = \sigma_P\left(\Theta_P \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_P(t)\right),\ P(0) = p_0 > 0,$$

其中 $\sigma_P > 0$ 为常数, 表示价格水平的波动, Θ_P 为随机变量, $\sigma_P\Theta_P$ 表示预期通货膨胀率, 以及$\{W_P(t)\}_{0\le t\le T}$ 为标准布朗运动.

为对冲通货膨胀风险, 本文引入指数债券, 其在 t 时刻的价格 $I(t)$ 服从如下随机微分过程:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I(t)}{I(t)} &= \delta \mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)}\\ &= \delta \mathrm{d}t + \sigma_P\Theta_P \mathrm{d}t + \sigma_P \mathrm{d}W_P(t), I(0) = i_0,\end{aligned}$$

其中 δ 为常数, 表示实际利率.

股票在 t 时刻的价格 $S(t)$ 遵循如下随机微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = r\mathrm{d}t + \sigma_{SI}(\Theta_P \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_P(t)) + \sigma_S(\Theta_S \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_S(t)), S(0) = s_0,$$

其中 $\sigma_{SI} > 0$、$\sigma_S > 0$ 为任意常数, $W_S(t)$ 与 $W_P(t)$ 为相互独立的一维标准布朗运动, Θ_P 与 Θ_S 为相互独立的一维随机变量, 并且 Θ_P 与 Θ_S 独立于 $W_S(t)$ 与 $W_P(t)$.

2.2. 财富过程

假设所有 DC 型养老金成员在退休之前将工资的一部分存入养老基金账户中, 正如文献 Han 和 Hung [4], Chen 等 [15], 我们假设缴费率是基金成员的工资的固定百分比, 另外成员的工资受到通货膨胀风险的影响. 本文考虑 t 时刻的工资 $M(t)$ 服从如下随机微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}M(t)}{M(t)} = \mu_M \mathrm{d}t + \sigma_{MI}\left(\Theta_P \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_P(t)\right) + \sigma_{MS}\left(\Theta_S + \mathrm{d}W_S(t)\right),\ M(0) = m_0, \tag{2.1}$$

其中 $\mu_M > 0$, $\sigma_{MI} > 0$ 与 $\sigma_{MS} > 0$ 均为常数. 常数 $c \in (0, 1)$ 表示固定百分比, 即 t 时刻的缴费等于 $cM(t)$.

假设基金账户初始财富为 $x_0 > 0$, $\pi_0(t)$, $\pi_S(t)$ 与 $\pi_I(t)$ 分别表示投资于无风险资产, 股票和指数债券的财富金额, 记 $\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_S(t), \pi_I(t))$, $\{X(t)\}_{t\ge 0}$ 表示在投资组合为 $\boldsymbol{\pi}(t)$ 时养老基金账户在 t 时刻的财富金额, 其满足以下随机微分方程:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X(t) &= \pi_0(t)\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)} + \pi_S(t)\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} + \pi_I(t)\frac{\mathrm{d}I(t)}{I(t)} + cM(t)\mathrm{d}t\\ &= rX(t)\mathrm{d}t + \pi_I(t)\left(\delta - r\right)\mathrm{d}t + \pi_I(t)\sigma_P\left(\Theta_P \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_P(t)\right)\\ &\quad + \pi_S(t)\left[\sigma_{SI}\left(\Theta_P \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_P(t)\right) + \sigma_S\left(\Theta_S \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_S(t)\right)\right] + cM(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $X(t) = \pi_0(t) + \pi_S(t) + \pi_I(t)$.

定义过程

$$\mathrm{d}Y_1(t) \triangleq \sigma_{SI}\left(\Theta_P \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_P(t)\right) + \sigma_S\left(\Theta_S \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_S(t)\right),$$

$$\mathrm{d}Y_2(t) \triangleq (\delta - r)\,\mathrm{d}t + \sigma_P \Theta_P \mathrm{d}t + \sigma_P \mathrm{d}W_P(t).$$

将其写为矩阵形式如下

$$\mathrm{d}\mathbf{Y}(t) = \bar{\boldsymbol{\Theta}}\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}\mathbf{W}(t),$$

其中 $\mathbf{Y}(t) = (Y_1(t), Y_2(t))^\top$, $\mathbf{W}(t) = (W_P(t), W_S(t))^\top$, $\bar{\boldsymbol{\Theta}} = \begin{pmatrix} \sigma_{SI}\Theta_P + \sigma_S\Theta_S \\ \delta - r + \sigma_P\Theta_P \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{SI} & \sigma_S \\ \sigma_P & 0 \end{pmatrix}$, 显然 $\boldsymbol{\sigma}$ 是可逆的.

因为 $\boldsymbol{\sigma}$ 是可逆的, 定义 $\mathbf{Z}(t) = \boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbf{Y}(t)$, 则有

$$\mathrm{d}\mathbf{Z}(t) = \boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathrm{d}\mathbf{Y}(t) = \boldsymbol{\Theta}\mathrm{d}t + \mathrm{d}\mathbf{W}(t), \tag{2.3}$$

其中

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\sigma}^{-\mathbf{1}}\bar{\boldsymbol{\Theta}} = \left(\tfrac{\delta - r}{\sigma_P} + \Theta_P, -\tfrac{\sigma_{SI}(\delta - r)}{\sigma_S\sigma_P} + \Theta_S\right)^\top$$

为风险市场价格. $\boldsymbol{\Theta}$ 是二维随机变量, 本文假设已知 $\boldsymbol{\Theta}$ 的概率分布为

$$\mu(A) = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{\Theta} \in A\right), \ \forall A \in \mathcal{B}\left(\mathcal{R}^2\right).$$

则财富过程(2.2)可写为

$$\mathrm{d}X(t) = rX(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{\pi}(t)\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{\Theta}\mathrm{d}t + \mathrm{d}\mathbf{W}(t)\right) + cM(t). \tag{2.4}$$

下面引入可容许投资策略定义.

定义2.1. *投资策略 $\boldsymbol{\pi}\left\{\boldsymbol{\pi}(t) : t \in [0, T]\right\}$ 是可容许投资策略, 如果对 $\forall t \in [0, T]$, $\boldsymbol{\pi}$ 满足如下条件:*
(i) $\boldsymbol{\pi}(t) \in \mathcal{G}(t)$;
(ii) $\int_0^T \|\boldsymbol{\pi}(t)\|^2 \mathrm{d}t < +\infty$, *a.s.;*
(iii) *方程(2.4)存在唯一解.*

定义可容许投资策略集为 $\mathcal{A}$.

基金管理者的目标为找到能够使基金账户的终端财富预期效用最大化的投资策略, 因此可以得到投资优化问题

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{A}} \ & \mathbb{E}\left[U(X(T))\right], \\ & \text{扩散方程为(2.4)}, \\ \text{s.t.}\ & X(0) = x_0, \\ & \mathbb{P}\left(X(T) \geq L\right) \geq 1 - \gamma. \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $\gamma \in [0, 1]$, 效用函数 $U : [0, \infty) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 为严格递增并且在定义域上严格凹的连续函数,

在 $(0,\infty)$ 上连续可微, 其导函数 $U'(\cdot)$ 满足以下条件:

$$\lim_{x\to\infty} U'(x)=0,\quad \lim_{x\to 0} U'(x)=\infty.$$

3. 问题转化

在本文的模型中, 基金成员不断地向养老基金账户缴费, 因此财富过程 (2.4) 不是自融资的. 为应用鞅方法求解问题, 参考文献 Chen 等 [15], 在本节中引入一个辅助过程, 得到了原问题的等价自融资问题.

引理3.1. $\{\mathbf{W}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 为 $(\mathbb{G},\mathbb{P})$-标准布朗运动, 定义

$$\Lambda(t)\triangleq \exp\left\{-\mathbf{\Theta}^\top \mathbf{W}(t)-\frac{1}{2}\left\|\Theta\right\|^2 t\right\},$$

则 $\{\Lambda(t)\}_{t\geq 0}$ 为 $(\mathbb{G},\mathbb{P})$- 鞅.

证明. 对于 $\forall 0\leq s\leq t<\infty$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbf{W}(t)|\mathcal{G}(s)\right]&=\mathbb{E}\left[\mathbf{W}(t)-\mathbf{W}(s)+\mathbf{W}(s)|\mathcal{F}^{W_S}(s)\vee\mathcal{F}^{W_P}(s)\vee\sigma(\Theta_P)\vee\sigma(\Theta_S)\right]\\&=\mathbb{E}\left[\mathbf{W}(s)|\mathcal{F}^{W_S}(s)\vee\mathcal{F}^{W_P}(s)\vee\sigma(\Theta_P)\vee\sigma(\Theta_S)\right]\\&=\mathbf{W}(s),\end{aligned}$$

因此, $\{\mathbf{W}(t)\}_{t\geq 0}$ 是 $(\mathbb{G},\mathbb{P})$-鞅. 另外,

$$\mathbb{E}\left[(\mathbf{W}(t)-\mathbf{W}(s))^2|\mathcal{G}(s)\right]=\mathbb{E}\left[(\mathbf{W}(t)-\mathbf{W}(s))^2\right]=t-s.$$

根据 *Lévy* 定理可知, $\{\mathbf{W}(t)\}_{t\geq 0}$ 为标准的 $(\mathbb{G},\mathbb{P})$-布朗运动. 由 *Itô* 公式, 可以得到

$$\mathrm{d}\Lambda(t)=-\Lambda(t)\mathbf{\Theta}^\top \mathrm{d}\mathbf{W}(t),$$

从而 $\{\Lambda(t)\}_{t\geq 0}$ 为 $(\mathbb{G},\mathbb{P})$-鞅. □

对 $\forall T\in(0,\infty)$, 定义

$$\mathbb{Q}(A)\triangleq\mathbb{E}\left[\Lambda(T)\cdot\mathbf{1}_A\right],\ A\in\mathcal{G}(T),$$

$\mathbb{Q}$ 为 $\mathcal{G}(T)$ 上 $\mathbb{P}$ 的等价概率测度, 并且 $\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{G}(T)}=\Lambda(T)$. 根据引理3.1以及 $\mathbf{Z}(t)$ 与 $\mathbf{W}(t)$ 之间的关系(2.3)可得到如下引理.

引理3.2. $\{\mathbf{Z}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 $(\mathbb{G},\mathbb{Q})$-标准布朗运动, $\mathbf{Z}(t)$ 与随机变量 $\mathbf{\Theta}$ 相互独立, 定义

$$K(t)\triangleq\frac{1}{\Lambda(t)}=\exp\left\{\mathbf{\Theta}^\top\mathbf{Z}(t)-\frac{1}{2}\left\|\mathbf{\Theta}\right\|^2 t\right\},\tag{3.1}$$

$\{K(t)\}_{t\in[0,T]}$是 $(\mathbb{G},\mathbb{Q})$- 鞅.

证明. 已知 $\mathrm{d}\mathbf{Z}(t)=\mathbf{\Theta}\mathrm{d}t+\mathrm{d}\mathbf{W}(t)$, 因此根据 *Girsanov* 定理, $\{\mathbf{Z}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 显然是 $(\mathbb{G},\mathbb{Q})$-标准布朗

运动.

由布朗运动的独立增量性可知, $\mathbf{Z}(t)-\mathbf{Z}(0)$ 与 $\mathcal{G}(0)$ 相互独立, 其中 $\mathbf{Z}(t)-\mathbf{Z}(0)=\mathbf{Z}(t)$, $\mathcal{G}(0)=\sigma(\Theta_P)\vee\sigma(\Theta_S)$, 所以对于 $\forall t\in[0,T]$, $\mathbf{Z}(t)$ 与 $\mathbf{\Theta}$ 相互独立.

对于 $\forall 0\leq s\leq t\leq T$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[K(t)|\mathcal{G}(s)\right]&=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\Lambda(t)}|\mathcal{G}(s)\right]\\&=\frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{1}{\Lambda(t)}\Lambda(T)|\mathcal{G}(t)\right]|\mathcal{G}(s)\right]}{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\Lambda(T)|\mathcal{G}(t)\right]|\mathcal{G}(s)\right]}\\&=\frac{1}{\Lambda(s)}\end{aligned}$$

故 $\{K(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 $(\mathbb{G},\mathbb{Q})$- 鞅. □

令 $D(t)$ 表示从 t 时刻到 T 时刻的预期总缴费的折现值, 定义其表达式为

$$D(t)=cE\left[\int_t^T M(s)\frac{H(s)}{H(t)}\mathrm{d}s\Big|\mathcal{G}(t)\right],\ t\in[0,T],$$

其中

$$H(t)=\exp\left\{-rt-\mathbf{\Theta}^{\top}\mathbf{W}(t)-\frac{1}{2}\left\|\mathbf{\Theta}\right\|^2t\right\}.\tag{3.2}$$

引入辅助过程

$$J(t)=X(t)+D(t),\tag{3.3}$$

由于 $D(T)=0$, 显然有 $J(T)=X(T)$. 并且定义2.1中的条件(iii) 可写为 $J(t)\geq 0$, $\forall t\in[0,T]$. 接下来给出过程 $D(t)$ 和 $J(t)$ 的一些性质.

命题3.3. (i) 从 t 时刻到 T 时刻的预期总缴费的折现值为

$$D(t)=cM(t)\frac{1}{\mu_M-\varrho_M-r}\left[e^{(\mu_M-\varrho_M-r)(T-t)}-1\right].$$

(ii) $J(t)$ 为自融资过程, 满足如下随机微分方程

$$\mathrm{d}J(t)=rJ(t)\mathrm{d}t+\Big(\boldsymbol{\pi}(t)\boldsymbol{\sigma}+D(t)\boldsymbol{\sigma}_M\Big)\left(\mathrm{d}\mathbf{W}(t)+\mathbf{\Theta}(t)\mathrm{d}t\right).\tag{3.4}$$

(iv) 对可容许策略 $\boldsymbol{\pi}$, 预算约束

$$\frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[H(T)J(T)|\mathcal{G}(t)\right]\leq J(t)\tag{3.5}$$

成立, 当且仅当 $\boldsymbol{\pi}$ 为最优投资策略时取等号.

证明. (i) 由*(2.3)*可将*(2.1)*改写为如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}M(t)}{M(t)}=(\mu_M-\varrho_M)\mathrm{d}t+\boldsymbol{\sigma}_M\mathrm{d}\mathbf{Z}(t),$$

其中 $\varrho = \sigma_{MI}\frac{\delta-r}{\sigma_P} - \sigma_{MS}\frac{\sigma_{SI}(\delta-r)}{\sigma_S\sigma_P}$, $\boldsymbol{\sigma}_M = (\sigma_{MI}, \sigma_{MS})$. 则对任意 $s > t$ 有

$$\frac{M(s)}{M(t)} = \exp\left\{(\mu_M - \varrho_M)(s-t) + \boldsymbol{\sigma}_M[\mathbf{Z}(s) - \mathbf{Z}(t)] - \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\sigma}_M\right\|^2(s-t)\right\}$$

另外根据*(2.3)*与*(3.2)*有由 $K(t)$ 的定义*(3.1)*可得

$$\begin{aligned}
K(s)\frac{M(s)}{M(t)}\frac{H(s)}{H(t)} = \exp&\left\{\boldsymbol{\Theta}^\top\mathbf{Z}(s) - \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Theta}\right\|^2 s\right\} \\
&\cdot\exp\left\{(\mu_M - \varrho_M)(s-t) + \boldsymbol{\sigma}_M[\mathbf{Z}(s) - \mathbf{Z}(t)] - \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\sigma}_M\right\|^2(s-t)\right\} \\
&\cdot\exp\left\{-r(s-t) - \boldsymbol{\Theta}^\top[\mathbf{Z}(s) - \mathbf{Z}(t)] + \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\Theta}\right\|^2(s-t)\right\} \\
= \exp&\left\{(\mu_M - \varrho_M - r)(s-t)\right\}\cdot K(t) \\
&\cdot\exp\left\{\boldsymbol{\sigma}_M[\mathbf{Z}(s) - \mathbf{Z}(t)] - \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\sigma}_M\right\|^2(s-t)\right\}.
\end{aligned}$$

因此, 对任意 $s > t$ 有

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[K(s)\frac{H(s)}{H(t)}\frac{M(s)}{M(t)}\Big|\mathcal{G}(t)\right] = \exp\left\{(\mu_M - \varrho_M - r)(s-t)\right\}\cdot K(t).$$

根据 $D(t)$ 的定义有

$$\begin{aligned}
D(t) &= cE\left[\int_t^T M(s)\frac{H(s)}{H(t)}\mathrm{d}s\Big|\mathcal{G}(t)\right] \\
&= cM(t)E\left[\int_t^T \frac{H(s)}{H(t)}\frac{M(s)}{M(t)}\mathrm{d}s\Big|\mathcal{G}(t)\right] \\
&= cM(t)\int_t^T E\left[\frac{H(s)}{H(t)}\frac{M(s)}{M(t)}\Big|\mathcal{G}(t)\right]\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{H(s)}{H(t)}\frac{M(s)}{M(t)}\Big|\mathcal{G}(t)\right] &= \frac{1}{K(t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[K(s)\frac{H(s)}{H(t)}\frac{M(s)}{M(t)}\Big|\mathcal{G}(t)\right] \\
&= \exp\left\{(\mu_M - \varrho_M - r)(s-t)\right\}.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
D(t) &= cM(t)\int_t^T \mathrm{e}^{(\mu_M - \varrho_M - r)(s-t)}\mathrm{d}s \\
&= \frac{cM(t)}{\mu_M - \varrho_M - r}\left[\mathrm{e}^{(\mu_M - \varrho_M - r)(T-t)} - 1\right].
\end{aligned}$$

(iii) 分别对 $D(t)$ 微分得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}D(t) = & \frac{1}{\mu_M - \varrho_M - r}\left[\mathrm{e}^{(\mu_M-\varrho_M-r)(T-t)} - 1\right] c\,\mathrm{d}M(t) \\
& - \frac{cM(t)}{\mu_M - \varrho_M - r}(\mu_M - \varrho_M - r)\mathrm{e}^{(\mu_M-\varrho_M-r)(T-t)}\mathrm{d}t \\
= & \frac{1}{\mu_M - \varrho_M - r}\left[\mathrm{e}^{(\mu_M-\varrho_M-r)(T-t)} - 1\right]\cdot cM(t)\Big[(\mu_M - \varrho_M)\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}_M \\
& \cdot(\mathrm{d}\mathbf{W}(t) + \mathbf{\Theta}(t)\mathrm{d}t)\Big] - \frac{cM(t)}{\mu_M - \varrho_M - r}(\mu_M - \varrho_M - r)\mathrm{e}^{(\mu_M-\varrho_M-r)(T-t)}\mathrm{d}t \\
= & D(t)\left[(\mu_M - \varrho_M)\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}_M(\mathrm{d}\mathbf{W}(t) + \mathbf{\Theta}(t)\mathrm{d}t)\right] - D(t)(\mu_M - \varrho_M - r) - cM(t)\mathrm{d}t \\
= & D(t)\left[r\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}_M\left(\mathrm{d}\mathbf{W}(t) + \mathbf{\Theta}(t)\mathrm{d}t\right)\right] - cM(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

接下来由以上结果推导得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}J(t) &= \mathrm{d}X(t) + \mathrm{d}D(t) \\
&= rJ(t)\mathrm{d}t + \left(\boldsymbol{\pi}(t)\boldsymbol{\sigma} + D(t)\boldsymbol{\sigma}_M\right)\left(\mathrm{d}\mathbf{W}(t) + \mathbf{\Theta}(t)\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}
$$

(iv) 根据定义（*2.1*）的条件 (iii) 有, 对任意$t \in [0, T]$, 自融资过程 $J(t)$ 非负. 因此, $\{H(t)J(t)\}_{t\in[0,T]}$ 为 $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$- 上鞅. 因此*(3.5)* 成立. 最终结论为 *Karatzas*和*Shreve [16]*中讨论的静态鞅方法的典型结果. □

根据命题 3.1 的 (iv) 得到预算约束不等式

$$
E\left[H(T)J(T)\right] \le j_0,\ \ \forall \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{A},
$$

其中 $j_0 = x_0 + d_0$, 其中 $D(0) \equiv d_0$.

则原问题(2.5)等价于如下优化问题

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\pi}\in\mathcal{A}} \ & \mathbb{E}\left[U(J(T))\right], \\
& \text{扩散方程为(3.4)}, \\
\text{s.t.} \ & J(0) = j_0, \\
& \mathbb{P}\left(J(T) \ge L\right) \ge 1 - \gamma.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

4. 最优策略求解

接下来将应用鞅方法对以上优化问题求解, 然后根据关系(3.3)即可求得原目标问题(2.5)的最优解.

命题4.1. 在 VaR 约束下最优终端财富为

$$
X^*(T) = J^*(T) = \begin{cases} \zeta(kH(T)), & H(T) < \underline{H} \\ L, & \underline{H} \le H(T) < \bar{H} \\ \zeta(kH(T)), & H(T) \ge \bar{H} \end{cases}.
$$

其中 $\zeta(\cdot)$ 为 $U'(\cdot)$ 的反函数, $\underline{H} \equiv U'(L)/k$, $\bar{H}$ 由 $\mathbb{P}\left(H(T) > \bar{H}\right) \equiv \gamma$ 得到, 拉格朗日乘子 k 由

$\mathbb{E}\left[H(T)J(T)\right] = j_0$ 得到, 在 $\underline{H} \geq \bar{H}$ 的情况下, VaR 约束是无效的.

证明. *在不考虑 VaR 约束的情况下, 问题(3.6)的最优终端财富为 $\zeta(kH(T))$, 其中 k 为预算约束所对应的拉格朗日乘子.*

若考虑 VaR 约束 $\mathbb{P}\left(J(T) \geq L\right) \geq 1-\gamma$, 我们验证 $\zeta(kH(T))$ 是否满足此约束.

当 $\bar{H} \leq \underline{H}$ 时, 已知 $\mathbb{P}(H(T) > \bar{H}) \equiv \gamma$, 从而有 $\mathbb{P}(H(T) \leq \bar{H}) = 1-\gamma$, 进而 $\mathbb{P}(H(T) \leq \underline{H}) \geq 1-\gamma$. 因此

$$\mathbb{P}(\zeta(kH(T)) \geq L) = \mathbb{P}\left(H(T) \leq \frac{U'(L)}{k}\right) = \mathbb{P}(H(T) \leq \underline{H}) \geq 1-\gamma.$$

故得到 $J^*(T) = \zeta(kH(T))$.

当 $\bar{H} > \underline{H}$ 时, 问题(3.6)的拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(J(T), k, k_2\right) = \mathbb{E}\left[U(J(T))\right] - k\mathbb{E}\left[H(T)J(T)\right] + kj_0 \\ + k_2\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{J(T)\geq L\}} + (\gamma - 1)\right].\end{aligned}$$

首先对于固定的拉格朗日乘子 k, k_2, 求解问题

$$\max_{J(T)\geq 0} \ \mathcal{L}\left(J(T), k, k_2\right),$$

等价于求解问题

$$\max_{J(T)} \ \mathbb{E}\left[U(J(T)) - kH(T)J(T) + k_2\mathbf{1}_{\{J(T)\geq L\}}\right] \tag{4.1}$$

问题(4.1)的两个局部极大值为 $\zeta(kH(T))$ 或 L. 下面比较 $J^*(T) = \zeta(kH(T))$ 与 $J^*(T) = L$ 两种情况下的目标函数值, 进而求解全局极大值.

(i)若 $H(T) \leq \underline{H}$ 时, 即 $kH(T) \leq U'(L)$, 由于函数 $\zeta(\cdot)$ 单调递减, 所以有 $\zeta(kH(T)) \geq L$.

考虑导函数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{U(x) - kH(T)x\right\} = U'(x) - kH(T),$$

其为单调递减函数, 并且 $U'(\zeta(kH(T))) - kH(T) = 0$, 而 $U'(L) - kH(T) \geq 0$. 因此上述导函数在区间 $[L, \zeta(kH(T))]$ 上大于等于零. 从而函数 $\{U(x) - kH(T)x\}$ 在区间 $[L, \zeta(kH(T))]$ 上单调递增, 进而有

$$U(\zeta(kH(T))) - kH(T)\zeta(kH(T)) + k_2 \geq U(L) - kH(T)L + k_2.$$

故 $J^*(T) = \zeta(kH(T))$.

(ii)若 $\underline{H} < H(T) \leq \bar{H}$, 由 $H(T) > \underline{H}$ 有 $kH(T) > U'(L)$, 则 $\zeta(kH(T)) < L$. 考虑

$$\begin{aligned}&U(L) - kH(T)L + k_2 \\ &= U(L) - kH(T)L + U(\zeta(k\bar{H})) - k\bar{H}\zeta(k\bar{H}) + k\bar{H}L - U(L) \\ &= U(\zeta(k\bar{H})) - k\bar{H}\zeta(k\bar{H}) + kL(\bar{H} - \hat{H}(T)),\end{aligned}$$

对 $x > \underline{H}$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\Big\{U(\zeta(kx)) - kx\zeta(kx) + kLx\Big\}\\
&= U'(\zeta(kx))\cdot\zeta'(kx)\cdot k - k\zeta(kx) - kx\zeta'(kx)\cdot k + kL\\
&= kx\zeta'(kx)\cdot k - k\zeta(kx) - kx\zeta'(kx)\cdot k + kL\\
&= k[L - \zeta(kx)] > 0,
\end{aligned}
$$

则当 $x > \underline{H}$ 时, 函数 $\{U(\zeta(kx)) - kx\zeta(kx) + kLx\}$ 单调递增. 从而对于 $\bar{H} \geq H(T) > \underline{H}$ 有

$$
\begin{aligned}
&U(\zeta(k\bar{H})) - k\bar{H}\zeta(k\bar{H}) + kL\bar{H} - kLH(T)\\
&\geq U(\zeta(kH(T))) - kH(T)\zeta(kH(T)) + kLH(T) - kLH(T)\\
&= U(\zeta(kH(T))) - kH(T)\zeta(kH(T)),
\end{aligned}
$$

即 $U(L) - kH(T)L + k_2 \geq U(\zeta(kH(T))) - kH(T)\zeta(kH(T))$.

故 $J^*(T) = L$.

*(iii)*若 $H(T) > \bar{H} > \underline{H}$, 首先由 $H(T) > \underline{H}$, 有 $\zeta(kH(T)) < L$. 类似于*(ii)*中的证明, 有

$$
\begin{aligned}
&U(\zeta(k\bar{H})) - k\bar{H}\zeta(k\bar{H}) + kL\bar{H} - kLH(T)\\
&\leq U(\zeta(kH(T))) - kH(T)\zeta(kH(T)) + kLH(T) - kLH(T)\\
&= U(\zeta(kH(T))) - kH(T)\zeta(kH(T)),
\end{aligned}
$$

故 $J^*(T) = \zeta(kH(T))$.

下一步证明 $J^*(T)$ 是原问题*(3.6)*的最优解. 对任意满足原问题约束的终端财富 $J(T)$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[U(J^*(T))\right] - \mathbb{E}\left[U(J(T))\right]\\
&= \mathbb{E}\left[U(J^*(T))\right] - \mathbb{E}\left[U(J(T))\right] - kj_0 + k_2(1-\gamma) + kj_0 - k_2(1-\gamma)\\
&\geq \mathbb{E}\left[U(J^*(T))\right] - k\mathbb{E}\left[H(T)J^*(T)\right] + k_2\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{J^*(T)\geq L\}}\right]\\
&\quad - \mathbb{E}\left[U(J(T))\right] + k\mathbb{E}\left[H(T)J(T)\right] - k_2\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{J(T)\geq L\}}\right]\\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

因此, $J^*(T)$ 是问题*(3.6)*的最优解. □

命题4.2. 在 *CRRA* 效用下基金账户在 t 时刻的最优财富过程为

$$
\begin{aligned}
X^*(t) = k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2} (H(t))^{-\beta}\exp\left\{(\beta-1)\left(r + \frac{1}{2}\beta\|\boldsymbol{\theta}\|^2\right)(T-t)\right\}&\\
\cdot\left[1 - \Phi(d_1(\bar{H})) + \Phi(d_1(\underline{H}))\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})&\\
+ L\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[\Phi(d_2(\bar{H})) - \Phi(d_2(\underline{H}))\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}) - D^f(t),&
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数, 以及

$$d_1(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{H(t)}\right) - \mathbb{E}[N_t^T] - (1-\beta)\mathrm{Var}[N_t^T]}{\sqrt{\mathrm{Var}[N_t^T]}}, \tag{4.3}$$

$$d_2(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{H(t)}\right) - \mathbb{E}[N_t^T] - \mathrm{Var}[N_t^T]}{\sqrt{\mathrm{Var}[N_t^T]}}. \tag{4.4}$$

$\mathbb{E}\left[N_t^T\right] = -(r + \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{\theta}\right\|^2)(T-t), \mathrm{Var}\left[N_t^T\right] = \left\|\boldsymbol{\theta}\right\|^2(T-t)$.

在 t 时刻的最优投资策略为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}^*(t) = \Bigg[\Bigg(&k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2} P(t,\mathbf{W}(t))\left[1-\Phi(d_1(\bar{H}))+\Phi(d_1(\underline{H}))\right]\beta\boldsymbol{\theta}^\top\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})\\ &+k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{P(t,\mathbf{W}(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}[N_t]}}\left[-\phi(d_1(\bar{H}))+\phi(d_1(\underline{H}))\right]\boldsymbol{\theta}^\top\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})\\ &+L\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sqrt{\mathrm{Var}[N_t]}}\left[\phi(d_2(\bar{H}))-\phi(d_2(\underline{H}))\right]\boldsymbol{\theta}^\top\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})\Bigg)\\ &-D^f(t)\boldsymbol{\sigma}_M\Bigg]\boldsymbol{\sigma}^{-1},\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中 $\phi(\cdot)$ 为标准正态分布密度函数, 以及

$$P(t,\mathbf{W}(t)) = \exp\left\{(\beta-1)\left(r+\frac{1}{2}\beta\left\|\boldsymbol{\theta}\right\|^2\right)(T-t)\right\}\cdot\exp\left\{\beta(rt+\boldsymbol{\theta}^\top\mathbf{W}(t)+\frac{\left\|\boldsymbol{\theta}\right\|^2}{2}t)\right\}.$$

拉格朗日乘子 k 满足

$$\begin{aligned}j_0 =&k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2}\exp\left\{(\beta-1)\left(r+\frac{1}{2}\beta\left\|\boldsymbol{\theta}\right\|^2\right)T\right\}\\ &\cdot\left[1-\Phi(b_1(\bar{H}))+\Phi(b_1(\underline{H}))\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})+L\mathrm{e}^{-rT}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\Phi(b_2(\bar{H}))-\Phi(b_2(\underline{H}))\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}),\end{aligned} \tag{4.6}$$

其中

$$b_1(x) = \frac{\ln x - \mathbb{E}[N_0^T] - (1-\beta)\mathrm{Var}[N_0^T]}{\sqrt{\mathrm{Var}[N_0^T]}},\ b_2(x) = \frac{\ln x - \mathbb{E}[N_0^T] - \mathrm{Var}[N_0^T]}{\sqrt{\mathrm{Var}[N_0^T]}}.$$

证明. 应用鞅方法, 在最优投资策略 π^* 下, 可求得最优过程 $J^*(t)$ 为

$$
\begin{aligned}
J^*(t) &= \frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[H(T)J^{f,*}(T)|\mathcal{G}(t)\right] \\
&= \frac{1}{H(t)}\left\{\mathbb{E}\left[H(T)\zeta(kH(T))\mathbf{1}_{\{H(T)<\underline{H}\}}\middle|\mathcal{G}(t)\right] + \mathbb{E}\left[H(T)L\mathbf{1}_{\{\underline{H}\le H(T)<\bar{H}\}}\middle|\mathcal{G}(t)\right]\right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E}\left[H(T)\zeta(kH(T))\mathbf{1}_{\{H(T)\ge\bar{H}\}}\middle|\mathcal{G}(t)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

*(i)*首先计算*(4.7)*第一部分,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[H(T)\zeta(kH(T))\mathbf{1}_{\{H(T)<\underline{H}\}}\middle|\mathcal{G}(t)\right] \\
&= k^{-\beta}\frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[(H(T))^{1-\beta}\mathbf{1}_{\{H(T)<\underline{H}\}}\middle|\mathcal{G}(t)\right] \\
&= k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2}(H(t))^{-\beta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{H(T)}{H(t)}\right)^{1-\beta}\mathbf{1}_{\left\{\frac{H(T)}{H(t)}<\frac{\underline{H}}{H(t)}\right\}}\middle|\mathcal{G}(t),\mathbf{\Theta}=\boldsymbol{\theta}\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}),
\end{aligned}
$$

假设

$$
\frac{H(T)}{H(t)}\Big|_{\mathbf{\Theta}=\boldsymbol{\theta}} = \exp\{N_t^T\},
$$

其中 $N_t^T = -r(T-t) - \boldsymbol{\theta}^\top\left[\mathbf{W}(T)-\mathbf{W}(t)\right] - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2(T-t)$. 从而 N_t^T 服从正态分布, 即

$$
\ln\left(\frac{H(T)}{H(t)}\right)\Big|_{\mathbf{\Theta}=\boldsymbol{\theta}} = N_t^T \sim N\left(-(r+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2)(T-t), \|\boldsymbol{\theta}\|^2(T-t)\right).
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\frac{H(T)}{H(t)}\right)^{1-\beta}\mathbf{1}_{\left\{\frac{H(T)}{H(t)}<\frac{\underline{H}}{H(t)}\right\}}\middle|\mathcal{G}(t),\mathbf{\Theta}=\boldsymbol{\theta}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\{(1-\beta)N_t^T\}\mathbf{1}_{\left\{N_t^T<\ln\left(\frac{\underline{H}}{H(t)}\right)\right\}}\middle|\mathcal{G}(t),\mathbf{\Theta}=\boldsymbol{\theta}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{\underline{H}}{H(t)}\right)}\frac{\mathrm{e}^{(1-\beta)x}}{\sqrt{2\pi\mathrm{Var}[N_t^T]}}\exp\left\{-\frac{(x-\mathbb{E}[N_t^T])^2}{2\mathrm{Var}[N_t^T]}\right\}\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

令

$$
y = \frac{x-\mathbb{E}[N_t^T]-(1-\beta)\mathrm{Var}[N_t^T]}{\sqrt{\mathrm{Var}[N_t^T]}},
$$

代入*(4.8)*可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\frac{H(T)}{H(t)}\right)^{1-\beta}\mathbf{1}_{\left\{\frac{H(T)}{H(t)}<\frac{\underline{H}}{H(t)}\right\}}\middle|\mathcal{G}(t),\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\theta}\right]\\
&=\int_{-\infty}^{d_1(\underline{H})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{(1-\beta)y\sqrt{\mathrm{Var}[N_t^T]}+(1-\beta)\mathbb{E}[N_t^T]+(1-\beta)^2\mathrm{Var}[N_t^T]\right\}\\
&\qquad\cdot\exp\left\{-\frac{\left(y\sqrt{\mathrm{Var}[N_t^T]}+(1-\beta)\mathrm{Var}[N_t^T]\right)^2}{2\mathrm{Var}[N_t^T]}\right\}\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\infty}^{d_1(\underline{H})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\}\cdot\exp\left\{(1-\beta)\mathbb{E}[N_t^T]+\frac{1}{2}(1-\beta)^2\mathrm{Var}[N_t^T]\right\}\mathrm{d}y\\
&=\exp\left\{(1-\beta)\mathbb{E}[N_t^T]+\frac{1}{2}(1-\beta)^2\mathrm{Var}[N_t^T]\right\}\Phi(d_1(\underline{H}))\\
&=\exp\left\{(\beta-1)\left(r+\frac{1}{2}\beta\left\|\right\|^2\right)(T-t)\right\}\Phi(d_1(\underline{H})),
\end{aligned}
$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数, 另外 $d_1(x)$ 表达式为*(4.3)*.

因此*(4.7)*的第一部分为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[H(T)\zeta(kH(T))\mathbf{1}_{\{H(T)<\underline{H}\}}\middle|\mathcal{G}(t)\right]\\
&=k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2}(H(t))^{-\beta}\exp\left\{(\beta-1)\left(r+\frac{1}{2}\beta\left\|\boldsymbol{\theta}\right\|^2\right)(T-t)\right\}\Phi(d_1(\underline{H}))\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}).
\end{aligned}\tag{4.9}
$$

*(ii)*类似于*(i)*中方法, 计算*(4.7)*的第二部分得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[H(T)L\mathbf{1}_{\{\underline{H}\le H(T)<\bar{H}\}}\middle|\mathcal{G}(t)\right]\\
&=L\cdot\mathbb{E}\left[\frac{H(T)}{H(t)}\mathbf{1}_{\left\{\frac{\underline{H}}{H(t)}\le\frac{H(T)}{H(t)}<\frac{\bar{H}}{H(t)}\right\}}\middle|\mathcal{G}(t)\right]\\
&=L\int_{\mathbb{R}^2}\exp\left(\mathbb{E}[N_t^T]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}[N_t^T]\right)\left[\Phi(d_2(\bar{H}))-\Phi(d_2(\underline{H}))\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})\\
&=L\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[\Phi(d_2(\bar{H}))-\Phi(d_2(\underline{H}))\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})
\end{aligned}\tag{4.10}
$$

其中 $d_2(x)$ 表达式为*(4.4)*.

*(iii)*类似于*(i)*中方法, 计算*(4.7)*的第三部分得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{H(t)}\mathbb{E}\left[H(T)\zeta(kH(T))\mathbf{1}_{\{H(T)\ge\bar{H}\}}\middle|\mathcal{G}(t)\right]\\
&=k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2}(H(t))^{-\beta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{H(T)}{H(t)}\right)^{1-\beta}\mathbf{1}_{\left\{\frac{H(T)}{H(t)}\ge\frac{\bar{H}}{H(t)}\right\}}\middle|\mathcal{G}(t),\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\theta}\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})\\
&=k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2}(H(t))^{-\beta}\exp\left\{(\beta-1)\left(r+\frac{1}{2}\beta\left\|\boldsymbol{\theta}\right\|^2\right)(T-t)\right\}\left[1-\Phi(d_1(\bar{H}))\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}).
\end{aligned}\tag{4.11}
$$

将*(4.9)*, *(4.10)*以及*(4.11)*代入*(4.7)*可得

$$J^*(t) = k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2}(H(t))^{-\beta}\exp\left\{(\beta-1)\left(r+\frac{1}{2}\beta\left\|\boldsymbol{\theta}\right\|^2\right)(T-t)\right\} \cdot \left[1-\Phi(d_1(\bar{H}))+\Phi(d_1(\underline{H}))\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}) + L\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[\Phi(d_2(\bar{H}))-\Phi(d_2(\underline{H}))\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}), \tag{4.12}$$

根据*(3.3)*, 可求得基金账户的最优财富过程为*(4.2)*. 从而, 对*(4.12)* 中 $J^*(t)$ 求微分与 (3.4) 比较, 即可求得最优投资策略为*(4.5)*.

其中拉格朗日乘子 k 满足等式 $\mathbb{E}\left[H(T)J^{f,*}(T)\right]=j_0$, 即

$$\mathbb{E}\left[H(T)(kH(T))^{-\beta}\mathbf{1}_{\{H(T)<\underline{H}\}}\right]+\mathbb{E}\left[LH(T)\mathbf{1}_{\left\{\underline{H}\le H(T)<\bar{H}\right\}}\right] + \mathbb{E}\left[H(T)(kH(T))^{-\beta}\mathbf{1}_{\left\{H(T)\ge\bar{H}\right\}}\right]=j_0, \tag{4.13}$$

首先*(4.13)*中第一部分

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[H(T)(kH(T))^{-\beta}\mathbf{1}_{\{H(T)<\underline{H}\}}\right] \\
&= k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{E}\left[(H(T))^{1-\beta}\mathbf{1}_{\{H(T)<\underline{H}\}}\middle|\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\theta}\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}) \\
&= k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{E}\left[\exp\left\{(1-\beta)N_0^T\right\}\mathbf{1}_{\left\{N_0^T<\ln\underline{H}\right\}}\middle|\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\theta}\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}) \\
&= k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2}\exp\left\{(1-\beta)\mathbb{E}[N_0^T]+\frac{1}{2}(1-\beta)^2\mathrm{Var}[N_0^T]\right\}\Phi(b_1(\underline{H}))\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}) \\
&= k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2}\exp\left\{(\beta-1)\left(r+\frac{1}{2}\beta\left\|\right\|^2\right)T\right\}\Phi(b_1(\underline{H}))\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta})
\end{aligned} \tag{4.14}$$

同理*(4.13)*中第二部分

$$\mathbb{E}\left[LH(T)\mathbf{1}_{\left\{\underline{H}\le H(T)<\bar{H}\right\}}\right]=L\mathrm{e}^{-rT}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\Phi(b_2(\bar{H}))-\Phi(b_2(\underline{H}))\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}), \tag{4.15}$$

以及*(4.13)*中第三部分

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[H(T)(kH(T))^{-\beta}\mathbf{1}_{\left\{H(T)\ge\bar{H}\right\}}\right] \\
&= k^{-\beta}\int_{\mathbb{R}^2}\exp\left\{(\beta-1)\left(r+\frac{1}{2}\beta\left\|\boldsymbol{\theta}\right\|^2\right)T\right\}\left[1-\Phi(b_1(\bar{H}))\right]\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

因此, 将*(4.14)*, *(4.15)*以及*(4.16)*代入*(4.13)*即可得拉格朗日乘子满足等式*(4.6)*. □

5. 结论

本文研究了带有 VaR 约束的 DC 养老金最优投资问题. 考虑到养老金投资期限较长, 本文模型引入了通货膨胀风险以及随机的薪资过程. 基金管理者可以将账户财富投资于无风险资产, 指数债

券和股票所组成的金融市场中, 其中风险资产的漂移项为随机变量, 另外已知风险市场价格的概率分布, 本文应用 Lagrange 对偶理论和鞅方法求解得到了 CRRA 效用下投资策略的最优解.

基金项目

河北省省级研究生示范课程建设项目(KCJSX2022013)。

参考文献

[1] Gao, J. (2009) Optimal Portfolios for DC Pension Plans under a CEV Model. *Insurance: Mathematics and Economics*, **44**, 479-490. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.01.005

[2] Guan, G. and Liang, Z. (2014) Optimal Management of DC Pension Plan in a Stochastic Interest Rate and Stochastic Volatility Framework. *Insurance: Mathematics and Economics*, **57**, 58-66. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2014.05.004

[3] Boulier, J., Huang, S. and Taillard, G. (2001) Optimal Management under Stochastic Interest Rates: The Case of a Protected Defined Contribution Pension Fund. *Insurance: Mathematics and Economics*, **28**, 173-189. https://doi.org/10.1016/s0167-6687(00)00073-1

[4] Han, N. and Hung, M. (2012) Optimal Asset Allocation for DC Pension Plans under Inflation. *Insurance: Mathematics and Economics*, **51**, 172-181. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2012.03.003

[5] Battocchio, P. and Menoncin, F. (2004) Optimal Pension Management in a Stochastic Framework. *Insurance: Mathematics and Economics*, **34**, 79-95. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2003.11.001

[6] Zhang, A., Korn, R. and Ewald, C. (2007) Optimal Management and Inflation Protection for Defined Contribution Pension Plans. *Blätter der DGVFM*, **28**, 239-258. https://doi.org/10.1007/s11857-007-0019-x

[7] Basak, S. and Shapiro, A. (2001) Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices. *Review of Financial Studies*, **14**, 371-405. https://doi.org/10.1093/rfs/14.2.371

[8] Guan, G. and Liang, Z. (2016) Optimal Management of DC Pension Plan under Loss Aversion and Value-at-Risk Constraints. *Insurance: Mathematics and Economics*, **69**, 224-237. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2016.05.014

[9] Dong, Y. and Zheng, H. (2020) Optimal Investment with S-Shaped Utility and Trading and Value at Risk Constraints: An Application to Defined Contribution Pension Plan. *European Journal of Operational Research*, **281**, 341-356. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.08.034

[10] Dong, Y., Tang, C. and Hua, C. (2023) Optimal Investment of DC Pension Plan under a Joint VaR-ES Constraint. *AIMS Mathematics*, **9**, 2084-2104. https://doi.org/10.3934/math.2024104

[11] Bäuerle, N. and Chen, A. (2023) Optimal Investment under Partial Information and Robust VaR-Type Constraint. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **26**, Article 2350017. https://doi.org/10.1142/s0219024923500176

[12] Lv, W., Dong, Y. and Wei, S. (2022) Optimal Investment of DC Pension Plan under Incentive Schemes and VaR Constraint. *Operations Research and Management Science*, **31**, 157-162.

[13] Liu, Z., Zhang, H., Wang, Y. and Huang, Y. (2024) Optimal Investment Strategy for DC Pension Plan with Stochastic Salary and Value at Risk Constraint in Stochastic Volatility Model. *Axioms*, **13**, Article 543. https://doi.org/10.3390/axioms13080543

[14] Guan, G., Liang, Z. and Xia, Y. (2023) Optimal Management of DC Pension Fund under the Relative Performance Ratio and VaR Constraint. *European Journal of Operational Research*, **305**, 868-886. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.06.012

[15] Chen, Z., Li, Z., Zeng, Y. and Sun, J. (2017) Asset Allocation under Loss Aversion and Minimum Performance Constraint in a DC Pension Plan with Inflation Risk. *Insurance: Mathematics and Economics*, **75**, 137-150. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.05.009

[16] Karatzas, I. and Shreve, S.E. (1998) Methods of Mathematical Finance. Springer.