Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(4), 944-953**
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.144218

Hans汉斯

整数群上增长函数的次可乘性与增长率

卢斯悦

南京航空航天大学数学学院，江苏　南京

收稿日期：2025 年 3 月 28 日；录用日期：2025 年 4 月 23 日；发布日期：2025 年 4 月 29 日

摘　要

本文给出了整数群 $\mathbb{Z}$ 上一个真的长度函数，并证明了这个长度函数诱导的增长函数不是次可乘的，但却满足一个一般的次可乘不等式。同时计算出了该增长函数的增长率是欧拉数 e。

关键词

整数群，增长函数，次可乘，增长率

Submultiplication and Growth Rate of Growth Functions on the Integer Group

Siyue Lu

School of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu

Received: Mar. 28^{th}, 2025; accepted: Apr. 23^{rd}, 2025; published: Apr. 29^{th}, 2025

Abstract

We give a proper length function on the integer group $\mathbb{Z}$, and demonstrate that its induced growth function is not submultiplicative, but satisfies a general submultiplicative inequality. We also show that the growth rate of this growth function is Euler's number e.

文章引用: 卢斯悦. 整数群上增长函数的次可乘性与增长率 [J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 944-953.
DOI: 10.12677/aam.2025.144218

Keywords

Integer Group, Growth Function, Submultiplication, Growth Rate

1. 引言

Milnor 在 1968 年利用有限生成离散群诱导的增长函数的渐近形态对黎曼流形的基本群给出了细致的刻画 [1]. 同年 Wolf 利用增长函数证明了有限生成的幂零群一定是多项式增长的 [2]. 而 Gromov 证明了若一个有限生成离散群的增长函数是多项式增长的, 那么这个群一定是幂零群通过一个有限群的扩张得到的 [3]. Nica 则证明了如果一个有限生成的离散群具有速降性质, 那么该群的速降度一定是大于或等于 $\frac{1}{2}$ 的 [4].

在这些论断中, 有限生成群诱导的增长函数的次可乘性质起到了非常重要的作用 [1–4]. 设 Γ 是一个有限生成的离散群, S 是 Γ 的一个有限对称生成子集, S 诱导的词长函数为 ℓ_S. 对任意的正整数 $m \geq 1$, Γ 的增长函数定义为

$$G^{\Gamma}_{\ell_S}(m) = \sharp\{\gamma \in \Gamma : \ell(\gamma) \leq m\},$$

即词长函数 $\ell_S(\gamma)$ 小于或等于 m 的那些群元素 γ 的基数 (个数). 于是对任意的正整数 $m, n \geq 1$, 有

$$G^{\Gamma}_{\ell_S}(m+n) \leq G^{\Gamma}_{\ell_S}(m) G^{\Gamma}_{\ell_S}(n),$$

即增长函数 $G^{\Gamma}_{\ell_S}(\cdot)$ 是次可乘的 [5–9]. 于是一个随着而来的问题是: 对于一个不是由一个有限生成子集诱导的长度函数而言, 其导出的增长函数是否仍然具有次可乘性质.

本文主要讨论这个问题, 并给出了一个解答. 我们给出了整数群 $\mathbb{Z}$ 上一个均不与词长函数双 Lipschitz 等价的真的长度函数, 并证明了这个长度函数诱导的增长函数不是次可乘的, 但却满足一个一般的次可乘不等式. 同时计算出了该增长函数的增长率是欧拉数 e.

2. 长度函数

定义 2.1. 设 Γ 为一个离散群. Γ 上的一个长度函数是一个函数 $\ell : \Gamma \mapsto [0, \infty)$ 且满足条件:

(1) $\ell(\gamma)=0$ 当且仅当 $\gamma=e$, 其中 e 是 Γ 的单位元.

(2) 等式 $\ell(\gamma)=\ell(\gamma^{-1})$ 对所有的 $\gamma\in\Gamma$ 都成立.

(3) 不等式 $\ell(\gamma_1\gamma_2)\leq\ell(\gamma_1)+\ell(\gamma_2)$ 对所有的 $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ 都成立.

如果对于任意一个正实数 $\beta\in(0,\infty)$, 集合 $\ell^{-1}([0,\beta])$ 都是有限集, 则称长度函数 ℓ 是真的 (proper).

真的长度函数的标准例子是一个有限生成的离散群对应于某个有限对称生成子集的词长函数 (word length function). 如果 S 是离散群 Γ 的一个有限对称的生成子集, 我们定义由 S 诱导的词长函数 $\ell_S:\Gamma\mapsto\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,\ldots\}$ 为

$$\ell_S(\gamma)=\min\{n:\gamma=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n,\gamma_i\in S,i=1,\ldots,n\},\quad \gamma\in\Gamma$$

和

$$\ell_S(e)=0.$$

显然 $S_1=\{-1,1\}$ 可以生成 $\mathbb{Z}$, 它诱导的词长函数就是绝对值, 即对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, 有 $\ell_1(n)=\ell_{S_1}(n)=|n|$. 由于 2 和 3 互素, 于是 $S_2=\{-3,-2,2,3\}$ 也是 $\mathbb{Z}$ 的一个生成元集, 而它诱导的词长函数为

$$\ell_2(n)=\ell_{S_2}(n)=\begin{cases}0, & n=0,\\ 1, & n=-3,-2,2,3,\\ 2, & n=-1,1,\\ m, & 3m-2\leq|n|\leq 3m,\ m\geq 2.\end{cases}$$

定义整数群 $\mathbb{Z}$ 上的一个函数为

$$\ell_3(n)=\ln(1+|n|)=\log_e(1+|n|),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

因为 ℓ_3 的取值不一定为正整数, 所以 ℓ_3 不是整数群 $\mathbb{Z}$ 上的一个词长函数.

命题 2.2. ℓ_3 是整数群 $\mathbb{Z}$ 上的一个真的长度函数.

证明. 显然对任意的整数 n, 有 $\ell_3(n)\geq 0$. 若存在整数 n 满足 $\ell_3(n)=0$, 则有 $\ln(1+|n|)=0$, 因而 $n=0$.

对任意的整数 n, 有

$$\ell_3(n^{-1})=\ell(-n)=\ln(1+|-n|)=\ln(1+|n|)=\ell_3(n).$$

对于任意的整数 $n_1,n_2\in\mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned}\ell_3(n_1+n_2)&=\ln(1+|n_1+n_2|)\\ &\leq\ln(1+|n_1|+|n_2|)\\ &\leq\ln((1+|n_1|)(1+|n_2|))\end{aligned}$$

$$= \ln(1+|n_1|) + \ln(1+|n_2|)$$
$$= \ell_3(n_1) + \ell_3(n_2),$$

于是 ℓ_3 是一个长度函数.

对于任意的正实数 $\beta > 0$, 有

$$\ell_3^{-1}([0,\beta]) = \{n \in \mathbb{Z} : \ln(1+|n|) \le \beta\} = \{n \in \mathbb{Z} : |n| \le e^\beta - 1\}.$$

因此集合 $\ell_3^{-1}([0,\beta])$ 是一个有限集, 故 ℓ_3 是整数群 $\mathbb{Z}$ 上的一个真的长度函数. □

对一个有限生成群 Γ, 设 S 为它的一个有限对称生成子集. 对于任意的 $\gamma \in \Gamma$ 和 Γ 上的任意一个长度函数 ℓ, 有

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n) \le \sum_{i=1}^{n} \ell(\gamma_i) \le n \max_{t\in S} \ell(t),$$

其中 $\gamma_i \in S$ 及 $\gamma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$, 因而不等式

$$\ell(\gamma) \le \ell_S(\gamma) \max_{t\in S} \ell(t)$$

对于任意的 $\gamma \in \Gamma$ 均成立. 因此分别存在常数 $C_1 > 0$ 和 $C_2 > 0$ 使得对任意的整数 $n \in \mathbb{Z}$, 均有

$$\ell_3(n) \le C_1\ell_1(n), \quad \ell_3(n) \le C_2\ell_2(n).$$

命题 2.3. 不存在正实数 $C > 0$ 使得不等式

$$\ell_1(n) \le C\ell_3(n)$$

对所有整数 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立.

证明. 假设存在一个正实数 $C > 0$ 使得不等式 $\ell_1(n) \le C\ell_3(n)$ 对所有整数 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立. 则对任意的整数 $n \in \mathbb{Z}$, 有

$$|n| = \ell_1(n) \le C\ell_3(n) = C\ln(1+|n|)$$

取正整数 $n \ge 1$ 就有 $n \le C\ln(1+n)$ 和 $e^n \le (1+n)^C$. 于是对任意的 $n \ge 1$, 有

$$\frac{e^n}{(1+n)^C} \le 1.$$

但这与序列 $\{\frac{e^n}{(1+n)^C}\}_{n=1}^{\infty}$ 无界矛盾. 因此命题成立. □

推论 2.4. 设 ℓ 是整数群 $\mathbb{Z}$ 上对应于某个有限对称生成子集的词长函数. 则不存在正实数 $C > 0$ 使得不等式

$$\frac{1}{C}\ell(n) \le \ell_3(n) \le C\ell(n)$$

对所有整数 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立.

证明. 由命题 2.3 前的讨论可知存在一个正实数 $C_0 > 0$ 使得不等式

$$\frac{1}{C_0}\ell(n) \le \ell_1(n) \le C_0\ell(n)$$

对所有整数 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立. 但由命题 2.3 可知不存在正实数 $C_1 > 0$ 使得不等式

$$\frac{1}{C_1}\ell_1(n) \le \ell_3(n) \le C_1\ell(n)$$

对所有整数 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立. 因此不存在正实数 $C > 0$ 使得不等式

$$\frac{1}{C}\ell(n) \le \ell_3(n) \le C\ell(n)$$

对所有整数 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立. □

从推论 2.4 可知 ℓ_3 不与 $\mathbb{Z}^2$ 上的任意一个由有限对称生成子集诱导的词长函数双 Lipschitz 等价.

3. 增长函数的次可乘性与增长率

在这一节中我们将讨论长度函数 ℓ_3 诱导的增长函数及其次可乘性质和增长率.

从长度函数 ℓ_3 我们可以赋予整数群 $\mathbb{Z}$ 一个度量空间结构如下:

$$d(m,n) = \ell_3(m-n) = \ln(1+|m-n|), \quad m,n \in \mathbb{Z}.$$

容易验证 $d(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个度量. 记 $\mathbb{Z}$ 中以 n 为中心, r 为半径的球为

$$B_{\ell_3}(n,r) = \{m \in \mathbb{Z} : d(m,n) = \ell_3(m-n) \le r\}.$$

特别地, 当 $n = 0$ 时, $B_{\ell_3}(0,r) = \{m \in \mathbb{Z} : \ell_3(m) = \ln(1+|m|) \le r\}$.

定义 3.1. 整数群 $\mathbb{Z}$ 上对应于一个长度函数 ℓ 的增长函数是一个函数 $G_\ell^{\mathbb{Z}} : [0,\infty) \mapsto \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, 它的具体定义如下:

$$G_\ell^{\mathbb{Z}}(r) = \sharp B_\ell(0,r) = \sharp\{n \in \mathbb{Z} : \ell(n) \le r\}, \quad r \in [0,\infty),$$

其中 $\sharp B_\ell(0,r)$ 是 $\mathbb{Z}$ 中以 0 为中心, r 为半径的球的基数 (元素个数).

为了讨论方便, 后续我们均将增长函数 $G_\ell^{\mathbb{Z}}(\cdot)$ 简记为 $G(\cdot)$. 显然增长函数 $G(\cdot)$ 是单调递增的.

对于任意的正实数 $r \ge 0$, 记 $[r]$ 为它的整部 (整数部分), 即 $[r]$ 为不超过 r 的最大正整数.

命题 3.2. 整数群 $\mathbb{Z}$ 上对应于词长函数 ℓ_S 的增长函数具有次可乘性. 即对任意的正实数 $r \geq 0$, $s \geq 0$, 有 $G^{\mathbb{Z}}_{\ell_S}(r+s) \leq G^{\mathbb{Z}}_{\ell_S}(r)G^{\mathbb{Z}}_{\ell_S}(s)$.

证明. 对任意 $x \in B_{\ell_S}(r+s)$, 则 $\ell_S(x) = m \leq r+s$, 于是由词长函数的定义可将 x 写作 m 个生成元的乘积 $x = a_1a_2\cdots a_m$, 其中 $a_i \in S, 1 \leq i \leq m$. 当 $m \leq r$ 时, 令

$$x_1 = a_1a_2\cdots a_m, \quad x_2 = e.$$

当 $r < m \leq r+s$ 时, 令

$$x_1 = a_1a_2\cdots a_{[r]}, \quad x_2 = a_{[r]+1}\cdots a_m.$$

综上有

$$x = x_1x_2, \quad x_1 \in B_{\ell_S}(r), \quad x_2 \in B_{\ell_S}(s),$$

故

$$B_{\ell_S}(r+s) \subseteq B_{\ell_S}(r)\cdot B_{\ell_S}(s), \sharp B_{\ell_S}(r+s) \leq \sharp B_{\ell_S}(r)\cdot B_{\ell_S}(s) \leq \sharp B_{\ell_S}(r)\sharp B_{\ell_S}(s).$$

即 $G^{\mathbb{Z}}_{\ell_S}(r+s) \leq G^{\mathbb{Z}}_{\ell_S}(r)G^{\mathbb{Z}}_{\ell_S}(s)$. □

通过观察有下面的命题.

命题 3.3. 对任意的正实数 $r \geq 0$, 有

$$G(r) = \sharp B_{\ell_3}(0,r) = \sharp\{x \in \mathbb{Z} : \ell_3(x) = \ln(1+|x|) \leq r\} = 2[e^r - 1] + 1 = 2[e^r] - 1. \tag{3.1}$$

进一步有

$$G(r) = 2m-1, \quad \ln m \leq r < \ln(m+1), m \in \mathbb{N}.$$

进一步可以计算得:

$$G(r) = \begin{cases} 1, & 0 = \ln 1 \leq r < \ln 2 = 0.6931471806 \\ 3, & \ln 2 \leq r < \ln 3 = 1.098612289 \\ 5, & \ln 3 \leq r < \ln 4 = 1.386294361 \\ 7, & \ln 4 \leq r < \ln 5 = 1.609437912 \\ 9, & \ln 5 \leq r < \ln 6 = 1.791759469 \\ 11, & \ln 6 \leq r < \ln 7 = 1.945910149 \\ 13, & \ln 7 \leq r < \ln 8 = 2.079441542 \\ 15, & \ln 8 \leq r < \ln 9 = 2.197224577. \end{cases}$$

$$G(r)=\begin{cases}17, & \ln 9\le r<\ln 10=2.302585093\\ 19, & \ln 10\le r<\ln 11=2.397895273\\ 21, & \ln 11\le r<\ln 12=2.48490665.\\ 23, & \ln 12\le r<\ln 13=2.564949357.\\ 25, & \ln 13\le r<\ln 14=2.639057329.\\ 27, & \ln 14\le r<\ln 15=2.708050201.\\ 29, & \ln 15\le r<\ln 16=2.77258872.\\ 31, & \ln 16\le r<\ln 17=2.83321334.\\ 33, & \ln 17\le r<\ln 18=2.89037176.\\ 35, & \ln 18\le r<\ln 19=2.94443898.\\ 37, & \ln 19\le r<\ln 20=2.99573227.\\ 39, & \ln 20\le r<\ln 21=3.04452243.\end{cases}$$

因为 $\ln 2<1.08<\ln 3$, $\ln 3<1.37<\ln 4$ 及 $\ln 11<1.08+1.37=2.45<\ln 12$, 所以

$$G(1.08+1.37)=21>G(1.08)\times G(1.37)=3\times 5=15.$$

因此, 不等式

$$G(r+s)\le G(r)G(s) \tag{3.2}$$

不是对所有正实数 $r,s\ge 0$ 都成立. 当增长函数是由一个有限对称生成群上的词长函数诱导的时, 不等式 (3.2) 总是成立的 [5–9]. 下面的引理给出了不等式 (3.2) 成立的一个条件.

引理 3.4. 对任意的正实数 $r,s\ge 3$, 有

$$G(r+s)\le G(r)G(s).$$

证明. 由于

$$\begin{aligned}4[e^r-1][e^s-1]&>4(e^r-2)(e^s-2)\\&=4(e^{r+s}-2e^r-2e^s+4)\\&=2(e^{r+s}-1)+2e^{r+s}-8e^r-8e^s+18\\&=2(e^{r+s}-1)+e^s(e^r-8)+e^r(e^s-8)+18\\&\ge 2(e^{r+s}-1)\ge 2[e^{r+s}-1]\end{aligned}$$

对任意的正实数 $r,s\ge 3$ 均成立, 于是

$$\begin{aligned}G(r)G(s)&=(2[e^r-1]+1)(2[e^s-1]+1)\\&\ge 4[e^r-1][e^s-1]+1\end{aligned}$$

$$\geq 2[e^{r+s}-1]+1=G(r+s)$$

对任意的正实数 $r,s\geq 3$ 都成立. □

定理 3.5. 存在一个常数 $C>1$ 使得不等式

$$G(r+s)\leq CG(r)G(s)$$

对所有正实数 $r,s\geq 0$ 都成立.

证明. 对于任意的正实数 $r,s\geq 3$, 从引理 3.4 可得不等式

$$G(r+s)\leq G(r)G(s).$$

由于对于有限区间 $[0,6)$, 增长函数 $G(\cdot)$ 的值域是一个有限集, 因而可以令

$$C_0=\max\left\{\frac{G(r+s)}{G(r)G(s)}:r,s\in[0,3)\right\}.$$

易知 $1<C_0<\infty$ 和不等式

$$G(r+s)\leq C_0G(r)G(s)$$

对任意的实数 $r,s\in[0,3)$ 成立.

对任意的实数 $r\in[0,3)$ 和 $s\in[3,\infty)$, 由引理 3.4 可知

$$G(r+s)\leq G(s+3)\leq G(s)G(3)\leq C_0G(s)G(r)G(3-r).$$

令

$$C=C_0G(3-r),$$

由前面的计算可得

$$1<C<39C_0$$

所以对任意实数 $r\in[0,3)$ 和 $s\in[3,\infty)$,

$$G(r+s)\leq 39C_0G(s)G(r)$$

同理对任意实数 $s\in[0,3)$ 和 $r\in[3,\infty)$,

$$G(r+s)\leq 39C_0G(s)G(r)$$

所以对任意实数 $r\in[0,\infty)$ 和 $s\in[0,\infty)$,

$$G(r+s)\leq\max\{C_0,C\}G(s)G(r)\leq 39C_0G(s)G(r)$$

则可推出定理成立. □

综上可以得到对于一个实数 $a>0$, 若 $a>39C_0$, 那么 $G(r+s)\leq aG(r)G(s)$ 对所有正实数 $r,s\geq 0$ 都成立. 若 $a<39C_0$, 则不能保证 $G(r+s)\leq aG(r)G(s)$ 在 $s\in[0,3)$ 或 $r\in[0,3)$ 时成立.

如果整数群 $\mathbb{Z}$ 上的长度函数 ℓ 满足一般次可乘不等式且 $\mathbb{Z}$ 关于这个长度函数是速降的, 则可以类似 [4] 中的方法证明 $\mathbb{Z}$ 对应于 ℓ 的速降度大于或等于 $\frac{1}{2}$.

定理 3.6. 增长函数的极限

$$\lim_{r\to\infty}(G(r))^{\frac{1}{r}}$$

存在且它的极限为 e.

证明. 在 $[0,\infty)$ 上定义一个实函数 g 为

$$g(r)=CG(r),\quad r\in[0,\infty).$$

从定理 3.5 可知函数 g 在 $[0,\infty)$ 上是次可乘的, 即不等式

$$g(r+s)\leq g(r)g(s)$$

对所有 $r,s\in[0,\infty)$ 均成立. 容易看出 $G(r)$ 和 $g(r)$ 是区间 $(0,\infty)$ 上的可测函数. 而且对任意的 $r,s\in(0,\infty)$, 有

$$\log(g(r+s))\leq\log(g(r)g(s))=\log g(r)+\log g(s),$$

于是函数 $\log g(r)$ 在区间 $(0,\infty)$ 上是次可加的和可测的. 从文献 [10] 中的定理 7.6.1 可得

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log G(r)}{r}=\lim_{r\to\infty}\frac{\log g(r)}{r}=\inf_{r>0}\frac{\log g(r)}{r}<\infty.$$

因此增长函数的极限

$$\lim_{r\to\infty}(G(r))^{\frac{1}{r}}$$

也存在.

现在我们计算出增长函数的极限 $\lim_{r\to\infty}(G(r))^{\frac{1}{r}}$. 由数学分析的知识可知我们仅需一个严格单调递增的正实数序列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\lim_{n\to\infty}r_n=\infty$) 即可计算出该极限. 特别地, 为了计算方便可取 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 作为一个严格单调递增的序列. 从增长函数的具体形式 (3.1), 易知

$$G(n)=2[e^n-1]+1=2[e^n]-1\leq 2e^n$$

和

$$G(n)=2[e^n-1]+1=2[e^n]-1>2e^n-3=\frac{1}{2}e^n+3\left(\frac{1}{2}e^n-1\right)\geq\frac{1}{2}e^n$$

对任意的 $n\geq 1$ 均成立. 因而从夹挤定理可得极限

$$\lim_{r\to\infty}(G(r))^{\frac{1}{r}}=\lim_{n\to\infty}(G(n))^{\frac{1}{n}}=e.$$

故定理成立. □

因此类似于有限生成群的词长函数的情形 [5–9], 可以认为 ℓ_3 的增长率为 e. 再因为 $e > 1$, 故可认为 ℓ_3 是指数增长的.

参考文献

[1] Milnor, J. (1968) A Note on Curvature and Fundamental Group. *Journal of Differential Geometry*, **2**, 1-7. https://doi.org/10.4310/jdg/1214501132

[2] Wolf, J.A. (1968) Growth of Finitely Generated Solvable Groups and Curvature of Riemannian Manifolds. *Journal of Differential Geometry*, **2**, 421-446. https://doi.org/10.4310/jdg/1214428658

[3] Gromov, M. (1981) Groups of Polynomial Growth and Expanding Maps. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **53**, 53-78. https://doi.org/10.1007/bf02698687

[4] Nica, B. (2010) On the Degree of Rapid Decay. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **138**, 2341-2347. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-10-10289-5

[5] Ceccherini-Silberstein, T. and Coornaert, M. (2010) Cellular Automata and Groups. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14034-1

[6] Ceccherini-Silberstein, T. and D'Adderio, M. (2021) Topics in Groups and Geometry-Growth, Amenability, and Random Walks. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-88109-2

[7] de la Harpe, P. (2000) Topics in Geometric Group Theory. University of Chicago Press.

[8] Löh, C. (2017) Geometric Group Theory, an Introduction. Springer.

[9] Mann, A. (2012) How Groups Grow. London Math. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139095129

[10] Hille, E. and Phillips, R.S. (1957) Functional Analysis and Semi-Groups. In: *AMS Colloquium Publications*, Vol. 31, American Mathematical Society.