

委托代理框架下带模糊厌恶和连续分红的最优再保险合同

王迪迪*, 杨梓鑫, 李逸霏

河北工业大学理学院, 天津

收稿日期: 2025 年 3 月 8 日; 录用日期: 2025 年 3 月 31 日; 发布日期: 2025 年 4 月 10 日

摘要

本文研究了带有连续分红的保险公司和再保险公司, 在委托代理框架下基于 Stackelberg 随机微分博弈的最优再保险-投资问题。保险公司通过购买比例再保险来转移风险, 且根据期望值保费原则支付再保险的保费。保险公司和再保险公司的博弈过程符合 Stackelberg 随机微分博弈, 在均方差准则下建立保险公司和再保险公司的目标函数, 利用动态规划原理, 通过求解相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程得出保险公司和再保险公司的纳什均衡策略的显示表达式。最后, 利用数据分析及 MCMC 方法估计模型中的主要参数。

关键词

委托代理框架, 最优再保险-投资, Stackelberg 随机微分博弈, 均方差准则, 纳什均衡

Optimal Reinsurance Contracts with Ambiguity Aversion and Continuous Dividends under the Principal-Agent Framework

Didi Wang*, Zixin Yang, Yifei Li

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

* 通讯作者。

Received: Mar. 8th, 2025; accepted: Mar. 31st, 2025; published: Apr. 10th, 2025

Abstract

This paper studies the optimal reinsurance-investment problem of an insurance company and a reinsurer with continuous dividends under the principal-agent framework, based on the Stackelberg stochastic differential game. The insurance company transfers risks by purchasing proportional reinsurance and pays the reinsurance premium according to the expected value premium principle. The game process between the insurance company and the reinsurer conforms to the Stackelberg stochastic differential game. Under the mean-variance criterion, the objective functions of the insurance company and the reinsurer are established. By using the principle of dynamic programming and solving the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation, the explicit expressions of the Nash equilibrium strategies of the insurance company and the reinsurer are derived. Finally, data analysis and the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method are used to estimate the main parameters in the model.

Keywords

Principal-Agent Framework, Optimal Reinsurance-Investment, Stackelberg Stochastic Differential Game, Mean-Variance Criterion, Nash Equilibrium

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

为了规避大额索赔给自身带来的风险，保险公司往往作为委托人通过购买比例再保险将部分风险转移给再保险公司，再通过合理地分配投资比例来进一步控制由于金融市场的不稳定性带来的损失。而再保险公司作为代理人为保险公司承担一定比例的风险的同时，也通过调整再保险的价格以及自身的投资策略来提高自身收益。通过随机控制理论研究保险公司的最优再保险-投资问题已成为保险精算领域的热门课题之一。几十年来，关于不同目标准则下的再保险-投资优化问题的研究已有很多成果 [1–7]。

然而, 现有研究大多假设保险公司和再保险公司对模型参数具有完全的确定性, 忽略了模型不确定性对决策的影响。在实际中, 由于市场环境的复杂性和不确定性, 保险公司和再保险公司往往对模型参数存在模糊性, 这种模糊性可能会影响其决策行为。此外, 保险公司与再保险公司之间的委托代理关系也使得双方在决策过程中需要考虑对方的利益与风险偏好, 进一步增加了问题的复杂性 [8–12]。

鉴于此, 本文在委托代理框架下, 引入 Stackelberg 随机微分博弈理论和均方差准则, 在几何布朗运动模型下考虑两个参与者带有连续分红的再保险-投资模型。通过考虑模糊厌恶因素为保险公司和再保险公司提供一种更加稳健和实用的决策方法。在实证部分中, 使用 MCMC 方法进行拟合 CEV 模型并进行实际股市估计, 最后分析了各参数对于模型的影响。

2. 模型建立

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ 是一个完备概率空间, 其中 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ 是右连续且关于概率测度 \mathbb{P} 是完备的, 其中 $T > 0$ 表示终端时刻, 下文中所有随机过程都是该概率空间上的适应过程。考虑一个保险公司以及一个再保险公司组成的保险市场风险模型。保险公司和再保险公司的盈余过程满足经典风险模型: $R(t) = x_0 + pt - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$, $x_0 > 0$ 是公司的初始盈余, p 表示保险费率, $\{N(t)\}_{t \in [0, T]}$ 是强度为 λ 的 poisson 过程, 索赔大小为 Z_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, μ 和 σ^2 分别是索赔大小的均值和二阶矩。

保险公司恒定的保费率可以根据期望值保费原则计算: $p = (1 + \theta)\lambda\mu$, 其中 $\theta > 0$ 是保险公司的安全负荷。进一步假设保险公司可以购买比例再保险合同来转移和管理风险, 我们用 $q(t) \in [0, 1]$ 来表示保险公司在时刻 t 的风险自留比例, 在这种情况下保险公司将在时刻 t 支付给再保险公司 $p^q(t)$ 的再保费, 我们假设再保费也利用期望值保费原则计算: $p^q(t) = \lambda\mu(1 + \eta(t))(1 - q(t))$ 。 $\eta = \{\eta(t) \geq \theta : 0 \leq t \leq T\}$ 表示再保险公司的风险负荷。考虑再保险之后, 保险公司的盈余过程变为: $U(t) = x_0 + \int_0^t [(1 + \theta)\lambda\mu - \lambda\mu(1 + \eta(s))(1 - q(s))]ds - \sum_{i=1}^{N(t)} q(T_i)Z_i$, 其中 T_i 表示第 i 个索赔发生的时刻。对上述盈余过程扩散近似后, 保险公司的盈余过程为:

$$dU(t) = \lambda\mu(\theta - \eta(t) + q(t)\eta(t))dt + \sigma\sqrt{\lambda}q(t)dB(t), \quad (1)$$

其中, $\{W_1(t)\}_{t \in [0, T]}$ 为定义在 $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ 中的一维标准布朗运动。通过对符号进行调整, 我们同样将再保险公司的盈余过程用以下扩散近似过程来表述:

$$dV(t) = \lambda\mu\eta(t)(1 - q(t))dt + \sigma\sqrt{\lambda}(1 - q(t))dB(t), \quad (2)$$

另外为了保证任意时刻索赔大小均为正数, 我们需要假设 $\sqrt{\lambda}\mu/\sigma$ 足够大。

接着我们假设保险公司和再保险公司均可以将一部分盈余投资在由无风险资产和风险资产组成的金融市场中。其中无风险资产的价格过程可以表示为:

$$dS_0(t) = r_0 S_0(t)dt, \quad S_0(0) = s_0, \quad (3)$$

$r_0 > 0$ 表示无风险利率, s_0 表示无风险资产初始投资额。考虑保险公司和再保险公司投资于同一

风险资产, 假设风险资产价格过程服从几何布朗运动模型 (GBM):

$$dS_1(t) = S_1(t)[(\tilde{\mu} - L_t)dt + \tilde{\sigma}d\tilde{B}(t)], \quad (4)$$

其中 $W_2(t)$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ 上独立于 $W_1(t)$ 的标准布朗运动, $\tilde{\mu} > r$ 为风险资产的期望收益率, $\tilde{\sigma} > 0$ 代表波动率, 且 $S_1(0) = s_1 > 0$. 根据前文的假设, 我们对保险公司及再保险公司在市场中的模型架构有了基本的了解。接下来我们可以分析出整个投资过程中保险公司和再保险公司的财富过程。我们假设保险公司的财富过程为 $X^a(t)$, 再保险公司的财富过程为 $Y^a(t)$, 令 $\pi_1(t)$ 、 $\pi_2(t)$ 分别为保险公司和再保险公司在 t 时刻投资于风险资产的金额, 然后剩余部分即 $X^a(t) - \pi_1(t)$ 和 $Y^a(t) - \pi_2(t)$ 用于投资无风险资产, $a_1(t) = (q(t), \pi_1(t))$ 表示保险公司的再保险-投资策略, $a_2(t) = (\eta(t), \pi_2(t))$ 表示再保险公司的价格-投资策略, $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$ 包含两个参与者各自的策略, 因此保险公司和再保险公司在 \mathbb{P} 下的财富过程分别为:

$$\begin{aligned} dX(t) = & [rX(t) + (\tilde{\mu} - L_t - r)\pi_1(t) + \lambda\mu(\theta - \eta(t) + q(t)\eta(t))]dt \\ & + \sigma\sqrt{\lambda}q(t)dB(t) + \tilde{\sigma}\pi_1(t)d\tilde{B}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} dY(t) = & [rY(t) + (\tilde{\mu} - L_t - r)\pi_2(t) + \lambda\mu\eta(t)(1 - q(t))]dt \\ & + \sigma\sqrt{\lambda}(1 - q(t))dB(t) + \tilde{\sigma}\pi_2(t)d\tilde{B}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $X(0) = x_0$ 表示保险公司的初始盈余, $Y(0) = y_0$ 表示再保险公司的初始盈余。在实践中, 金融市场和保险市场在建模时普遍出现模型不确定性的情况。因此, 本文通过考虑模糊厌恶的保险公司 (AAI) 和再保险公司 (AAR) 原来的概率测度 \mathbb{P} 被用为参考概率测度, 围绕参考测度可以作等效于参考测度的 \mathbb{Q} 测度为替代测度。即:

$$\mathcal{Q} := \{\mathbb{Q} | \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}\}$$

定义指数鞅过程如下:

$$\mathcal{A}^{\varphi_k}(t) = \exp \left\{ \int_0^t \varphi_{k_1}(s) dW_1(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_{k_1}^2(s) ds \int_0^t \varphi_{k_2}(s) dW_2(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_{k_2}^2(s) ds \right\} \quad (7)$$

其中, $k \in \{1, 2\}$, 当 $k = 1$ 时代表保险公司, $k = 2$ 时代表再保险公司。对于每个 $t \in [0, T]$, $\{\varphi_{k(t)}\}_{t \in [0, T]}$ 都是一个可测的过程。

定义于 (7) 的指数过程 $\{\Lambda^{\phi_k}(t)\}_{t \in [0, T]}$, 对于每个 $k \in \{1, 2\}$, 是一个 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, \mathbb{P} -鞅, $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\Lambda^{\phi_k}(T)] = 1$. 对于每个 $k \in \{1, 2\}$, 定义一个新的概率测度 $\mathbb{Q}_k \sim \mathbb{P}$ 在 \mathcal{F}_T 如下:

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}_k}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_T} := \Lambda^{\phi_k}(T).$$

根据 Girsanov 定理, 在替代概率测度 \mathbb{Q}_k 下, 过程 $\{B^{\mathbb{Q}_k}(t)\}_{t \in [0, T]}$ 和 $\{\tilde{B}^{\mathbb{Q}_k}(t)\}_{t \in [0, T]}$ 是实值

标准布朗运动, 并且对于每个 $\{\phi_k(t)\}_{t \in [0, T]} \in \Sigma_k$:

$$\begin{aligned} dB^{\mathbb{Q}_k}(t) &= dB(t) - \phi_{k1}(t)dt, \\ d\tilde{B}^{\mathbb{Q}_k}(t) &= d\tilde{B}(t) - \phi_{k2}(t)dt. \end{aligned}$$

概率测度 \mathbb{Q}_k 下, 布朗运动 $B^{\mathbb{Q}_k}(t)$ 和 $\tilde{B}^{\mathbb{Q}_k}(t)$ 是相互独立的。

因此, 保险公司的盈余过程在替代测度 \mathbb{Q}_1 下满足:

$$\begin{aligned} dX^{u,v}(t) &= \left[rX^{u,v}(t) + (\tilde{\mu} - L_t - r)\pi(t) + \lambda\mu(\theta - \eta(t) + q(t)\eta(t)) + \sigma\sqrt{\lambda q(t)}\phi_{11}(t) + \tilde{\sigma}(t)\phi_{12}(t) \right] dt \\ &\quad + \sigma\sqrt{\lambda q(t)}dB^{\mathbb{Q}_1}(t) + \tilde{\sigma}(t)d\tilde{B}^{\mathbb{Q}_1}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

在替代测度 \mathbb{Q}_2 下, 再保险公司的盈余过程由以下随机微分方程 (SDE) 控制:

$$\begin{aligned} dY^{u,v}(t) &= \left[rY^{u,v}(t) + (\tilde{\mu} - L_t - r)\tilde{\pi}(t) + \lambda\mu(t)(1 - q(t)) + \sigma\sqrt{\lambda}(1 - q(t))\phi_{21}(t) + \tilde{\sigma}(t)\phi_{22}(t) \right] dt \\ &\quad + \sigma\sqrt{\lambda}(1 - q(t))dB^{\mathbb{Q}_2}(t) + \tilde{\sigma}(t)d\tilde{B}^{\mathbb{Q}_2}(t). \end{aligned} \quad (9)$$

令 \mathcal{U} 表示所有保险公司可行策略的集合, \mathcal{V} 表示所有再保险公司可行策略的集合。

均值-方差准则下保险公司和再保险公司相应的价值函数为:

$$\begin{aligned} J_1^u(0, x_0) &= \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \mathbb{E}_{0, x_0}^{\mathbb{P}} [X_T^{u,v}(T)] - \frac{m_1}{2} \text{Var}_{0, x_0}^{\mathbb{P}} [X_T^{u,v}(T)] \right\}, \\ J_2^v(0, y_0) &= \sup_{v \in \mathcal{V}} \left\{ \mathbb{E}_{0, y_0}^{\mathbb{P}} [Y_T^{u,v}(T)] - \frac{m_2}{2} \text{Var}_{0, y_0}^{\mathbb{P}} [Y_T^{u,v}(T)] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

$m_k > 0$, $k \in \{1, 2\}$, 表示保险公司和再保险公司的风险厌恶系数。按照以往文献对均值-方差准则的研究, 建立时间一致的再保险-投资策略, 通过如下方式定义实变的值函数:

$$\begin{aligned} J_1^u(t, x) &= \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \mathbb{E}_{t, x}^{\mathbb{P}} [X_T^{u,v}(T)] - \frac{m_1}{2} \text{Var}_{t, x}^{\mathbb{P}} [X_T^{u,v}(T)] \right\}, \\ J_2^v(t, y) &= \sup_{v \in \mathcal{V}} \left\{ \mathbb{E}_{t, y}^{\mathbb{P}} [Y_T^{u,v}(T)] - \frac{m_2}{2} \text{Var}_{t, y}^{\mathbb{P}} [Y_T^{u,v}(T)] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

接下来, 我们引入替代测度来通过一种稳健优化方法解决模糊性, 保险公司和再保险公司旨在解决以下均值-方差优化问题:

在替代概率测度的最坏情况下, 保险公司和再保险公司的目标函数分别为:

$$\begin{aligned} J_1^u(t, x) &= \sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{\mathbb{Q}_1 \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{t, x}^{\mathbb{Q}_1} [X_T^{u,v}(T)] - \frac{m_1}{2} \text{Var}_{t, x}^{\mathbb{Q}_1} [X_T^{u,v}(T)] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_1, x} [P_1(\mathbb{P} \parallel \mathbb{Q}_1)] \right\}, \\ J_2^v(t, y) &= \sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{\mathbb{Q}_2 \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{t, y}^{\mathbb{Q}_2} [Y_T^{u,v}(T)] - \frac{m_2}{2} \text{Var}_{t, y}^{\mathbb{Q}_2} [Y_T^{u,v}(T)] + \mathbb{E}_{t, y}^{\mathbb{Q}_2} [P_2(\mathbb{P} \parallel \mathbb{Q}_2)] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $P_k(\mathbb{P} \parallel \mathbb{Q}_k) \geq 0$, $k \in \{1, 2\}$, 是一个罚函数, 用于度量 \mathbb{Q}_k 与 \mathbb{P} 的偏离程度。这里, 我们允许保险公司和再保险公司采用不同的罚函数 P_1 和 P_2 。

定义 2.1. 保险公司的稳健均值-方差优化问题为以下随机优化问题:

$$\begin{aligned} & \sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{\mathbb{Q}_1 \in \mathcal{Q}} \mathcal{J}_1^{\mathbb{Q}_1, u, v}(t, x) \\ & := \sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{\mathbb{Q}_1 \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}_1} [X_T^{u,v}(T)] - \frac{m_1}{2} \text{Var}_{t,x}^{\mathbb{Q}_1} [X_T^{u,v}(T)] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_1, x} [P_1(\mathbb{P} \parallel \mathbb{Q}_1)] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $X^{u,v}(t)$ 满足 (6), 对于任意 $v \in \mathcal{V}$ 。

定义如下:

$$\mathcal{J}_1^{u,v}(t, x) := \inf_{\mathbb{Q}_1 \in \mathcal{Q}} \mathcal{J}_1^{\mathbb{Q}_1, u, v}(t, x).$$

定义 2.2. 再保险公司的稳健均值-方差优化问题为以下随机优化问题:

$$\begin{aligned} & \sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{\mathbb{Q}_2 \in \mathcal{Q}} \mathcal{J}_2^{\mathbb{Q}_2, u^*, v}(t, y) \\ & := \sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{\mathbb{Q}_2 \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}_2} [Y_T^{u^*, v}(T)] - \frac{m_2}{2} \text{Var}_{t,y}^{\mathbb{Q}_2} [Y_T^{u^*, v}(T)] + \mathbb{E}_{t,y}^{\mathbb{Q}_2} [P_2(\mathbb{P} \parallel \mathbb{Q}_2)] \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $Y^{u^*, v}(t)$ 满足 (9), u^* 是问题 (13) 的最优解。

定义如下:

$$\mathcal{J}_2^{u,v}(t, y) := \inf_{\mathbb{Q}_2 \in \mathcal{Q}} \mathcal{J}_2^{\mathbb{Q}_2, u, v}(t, y).$$

本文将惩罚函数定义如下:

$$P_1(\mathbb{P} \parallel \mathbb{Q}_1) = \int_t^T \Psi_1(s, \phi_1(s), X^{u,v}(s)) ds,$$

同时定义保险公司的值函数如下:

$$\begin{aligned} V_1(t, x, v) &:= \sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{\mathbb{Q}_1 \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_1, x} [X_T^{u,v}(T)] - \frac{m_1}{2} \text{Var}_t^{\mathbb{Q}_1, x} [X_T^{u,v}(T)] \right. \\ & \quad \left. + \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_1, x} \left[\int_t^T \Psi_1(s, \phi_1(s), X^{u,v}(s)) ds \right] \right\} \\ &= \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_1^{u,v}(t, x), \end{aligned}$$

其中

$$\Psi_1(s, \phi_1(s), X^{u,v}(s)) = \frac{\phi_{11}^2(s)}{2\psi_{11}(s, X^{u,v}(s))} + \frac{\phi_{12}^2(s)}{2\psi_{12}(s, X^{u,v}(s))}.$$

类似地, 对于再保险公司在问题 (14) 中呈现的稳健优化问题, 我们采用以下惩罚函数:

$$P_2(\mathbb{P} \parallel \mathbb{Q}_2) = \int_t^T \Psi_2(s, \phi_2(s), Y^{u,v}(s)) ds,$$

再保险公司的价值函数定义为:

$$V_2(t, y) = \sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{\mathbb{Q}_2 \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_2, y} [Y_T^{u, v}(T)] - \frac{m_2}{2} \text{Var}_t^{\mathbb{Q}_2, y} [Y_T^{u, v}(T)] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_2, y} \left[\int_t^T \Psi_2(s, \phi_2(s), Y^{u, v}(s)) ds \right] \right\}$$

其中

$$\Psi_2(s, \phi_2(s), Y^{u, v}(s)) = \frac{\phi_{21}^2(s)}{2\psi_{21}(s, Y^{u, v}(s))} + \frac{\phi_{22}^2(s)}{2\psi_{22}(s, Y^{u, v}(s))}.$$

对于每个 $j \in \{1, 2\}$, 我们还假设 ψ_{2j} 是一个固定且状态无关的函数, 且 $\psi_{2j}(t, y) = \beta_{2j}$,

其中 β_{2j} 是 AAR 关于扩散风险的模糊厌恶参数, 且 $\beta_{2j} \geq 0$ 。当 $\beta_{2j} \rightarrow 0$ 时, 再保险公司对扩散风险趋于模糊中立。

3. 最优再保险-投资策略

3.1. 保险公司的最优再保险-投资策略

为了简化符号, 在以下段落中省略了一些函数的变量。对于所有 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, 我们定义作用于 $W_1(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ 的无穷小生成算子 \mathcal{L}_1 如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{u, v, \phi_1, \phi_2} W_1(t, x) := & \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t} + \left[rx + (\tilde{\mu} - L_t - r)\pi + \lambda\mu(\theta - \eta) + \lambda\mu\eta q + \right. \\ & \left. \sigma\sqrt{\lambda}\phi_{11}q + \tilde{\sigma}\phi_{12}\pi \right] \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2}(\lambda\sigma^2q^2 + \tilde{\sigma}^2\pi^2) \frac{\partial^2 W_1(t, x)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

定理 3.1 (验证定理, 针对保险公司的优化问题) 对于问题 (13), 如果存在实值函数 $W_1(t, x)$ 和 $g_1(t, x) \in D_p^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ 对 $\forall(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ 满足以下扩展 HJB 方程组:

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{\phi_1 \in \Sigma_1} \left\{ \mathcal{L}_1^{u, v, \phi_1, \phi_2} W_1(t, x) - \mathcal{L}_1^{u, v, \phi_1, \phi_2} g_1(t, x) \frac{m_1}{2} g_1^2(t, x) + \right. \\ \left. m_1 g_1(t, x) \mathcal{L}_1^{u, v, \phi_1, \phi_2} g_1(t, x) + \sum_{j=1}^2 \frac{\phi_{1j}^2}{2\beta_{1j}} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

其中, 初始条件为:

$$W_1(T, x) = x, \quad (16)$$

$$g_1(T, x) = x, \quad (17)$$

$$\mathcal{L}_1^{u^*, v, \phi_1^*, \phi_2} g_1(t, x) = 0, \quad (18)$$

则我们有:

$$\begin{aligned} (u^*, \phi_1^*) := & \arg \sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{\phi_1 \in \Sigma_1} \left\{ \mathcal{L}_1^{u, v, \phi_1, \phi_2} W_1(t, x) - \mathcal{L}_1^{u, v, \phi_1, \phi_2} g_1(t, x) \frac{m_1}{2} g_1^2(t, x) \right. \\ & \left. + m_1 g_1(t, x) \mathcal{L}_1^{u, v, \phi_1, \phi_2} g_1(t, x) + \sum_{j=1}^2 \frac{\phi_{1j}^2}{2\beta_{1j}} \right\}, \end{aligned}$$

那么

$$W_1(t, x) = V_1(t, x), \quad \mathbb{E}_{t,x}^{\mathbb{Q}_1^*}[X_T^{u^*,v}(T)] = g_1(t, x),$$

u^* 是保险公司的稳健均衡再保险-投资策略, ϕ_1^* 是保险公司的最坏情景无穷小生成元。

通过简化定理 3.1 中的方程 (15), 得到:

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{\phi_1 \in \Sigma_1} \left\{ \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial t} + \left[rx + (\tilde{\mu} - L_t - r)\pi + \lambda\mu(\theta - \eta) + \lambda\mu\eta q + \sigma\sqrt{\lambda}\phi_{11}q + \tilde{\sigma}\phi_{12}\pi \right] \frac{\partial W_1(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2}(\lambda\sigma^2q^2 + \tilde{\sigma}^2\pi^2) \frac{\partial^2 W_1(t, x)}{\partial x^2} - m_1 \left(\frac{\partial g_1(t, x)}{\partial x} \right)^2 (\lambda\sigma^2q^2 + \tilde{\sigma}^2\pi^2) + \frac{\phi_{11}^2}{2\beta_{11}} + \frac{\phi_{12}^2}{2\beta_{12}} \right\} = 0. \quad (19)$$

为了解方程 (18) 和 (19), 假设解函数具有以下形式:

$$W_1(t, x) = A_1(t)x + B_1(t), \quad A_1(T) = 1, \quad B_1(T) = 0, \quad (20)$$

$$g_1(t, x) = \tilde{A}_1(t)x + \tilde{B}_1(t), \quad \tilde{A}_1(T) = 1, \quad \tilde{B}_1(T) = 0,$$

其中 $A_1, B_1, \tilde{A}_1, \tilde{B}_1$ 的终端条件由 (16) 和 (17) 的终止条件决定。假设这些函数是平滑的。对 W_1 和 g_1 分别关于 t 和 x 求导, 并代入 (19), 得到:

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{\phi_1 \in \Sigma_1} \left\{ A_1'(t)x + B_1'(t) + \left[rx + (\tilde{\mu} - L_t - r)\pi + \lambda\mu(\theta - \eta) + \lambda\mu\eta q + \sigma\sqrt{\lambda}\phi_{11}q + \tilde{\sigma}\phi_{12}\pi \right] A_1(t) - \frac{m_1\tilde{A}_1^2}{2}(\lambda\sigma^2q^2 + \tilde{\sigma}^2\pi^2) + \frac{\phi_{11}^2}{2\beta_{11}} + \frac{\phi_{12}^2}{2\beta_{12}} \right\} = 0. \quad (21)$$

对于每个固定的 u , 关于 ϕ_1 的函数的一阶最优条件给出了 $\phi_1^*(t) = (\phi_{11}^*(t), \phi_{12}^*(t))$ 的极小点:

$$\begin{cases} \phi_{11}^*(t) = -\beta_{11}\sigma\sqrt{\lambda}A_1(t)q(t), \\ \phi_{12}^*(t) = -\beta_{12}\tilde{\sigma}A_1(t)\pi(t). \end{cases} \quad (22)$$

通过评估二阶导数验证凸性条件, 很容易证明 ϕ_1^* 是极小点。将 (22) 代入 (21) 并通过一阶最优条件求出了保险公司的最优再保险-投资策略 $u^*(t) := (q^*(t), \pi^*(t))$ 如下:

$$q^*(t) = \frac{\mu\eta(t)A_1(t)}{\beta_{11}\sigma^2\lambda A_1^2(t) + m_1\sigma^2\lambda A_1^2(t)}, \quad (23a)$$

$$\pi^*(t) = \frac{(\tilde{\mu} - L_t - r)A_1(t)}{m_1\tilde{\sigma}^2 A_1^2(t) + \beta_{12}\tilde{\sigma}^2 A_1^2(t)}. \quad (23b)$$

将 (23) 中的 q^* 和 π^* 代入 (16) 和 (22), 得到:

$$\begin{aligned} & (A_1' + rA_1)x + B_1' + [(\tilde{\mu} - L_t - r)\pi^* + \lambda\mu(\theta - \eta) + \lambda\mu\eta q^*]A_1 \\ & - \beta_{11}\sigma^2\lambda A_1(q^*)^2 - \beta_{12}\tilde{\sigma}^2 A_1(\pi^*)^2 = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

以及

$$\begin{aligned} & (A'_1 + rA_1)x + B'_1 + [(\tilde{\mu} - L_t - r)\pi^* + \lambda\mu(\theta - \eta) + \lambda\mu\eta q^*]A_1 \\ & - \lambda\sigma^2(q^*)^2\left(\frac{m_1A_1^2}{2} + \frac{\beta_{11}A_1^2}{2}\right) - \tilde{\sigma}^2(\pi^*)^2\left(\frac{m_1A_1^2}{2} + \frac{\beta_{12}A_1^2}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

通过将带 x 和不带 x 的变量分离, 我们可以得到以下方程组:

$$\begin{cases} \tilde{A}'_1 + r\tilde{A}_1 = 0, \\ A'_1 + rA_1 = 0, \\ \tilde{B}'_1 + [(\tilde{\mu} - L_t - r)\pi^* + \lambda\mu(\theta - \eta) + \lambda\mu\eta q^* - \beta_{11}\sigma^2\lambda A_1(q^*)^2 - \beta_{12}\tilde{\sigma}^2 A_1(\pi^*)^2]\tilde{A}_1 = 0, \\ B'_1 + [(\tilde{\mu} - L_t - r)\pi^* + \lambda\mu(\theta - \eta) + \lambda\mu\eta q^*]A_1 - \lambda\sigma^2(q^*)^2\left(\frac{m_1A_1^2}{2} + \frac{\beta_{11}A_1^2}{2}\right) \\ - \tilde{\sigma}^2(\pi^*)^2\left(\frac{m_1A_1^2}{2} + \frac{\beta_{12}A_1^2}{2}\right) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

通过使用 (16) 中的边界条件, 可以解得:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(t) &= e^{r(T-t)}, \quad A_1(t) = e^{r(T-t)}, \\ \tilde{B}_1(t) &= \int_t^T \lambda\mu(\theta - \eta)ds + \int_t^T \tilde{b}_{11}(s)ds + \int_t^T \tilde{b}_{12}(s)ds, \\ B_1(t) &= \int_t^T \lambda\mu(\theta - \eta)ds + \int_t^T b_{11}(s)ds + \int_t^T b_{12}(s)ds, \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{b}_{11}(s) = \left[\lambda\mu\eta q^*(s) - \beta_{11}\sigma^2\lambda(q^*(s))^2 \right] e^{r(T-s)}, \\ \tilde{b}_{12}(s) = \left[(\tilde{\mu} - L_t - r)\pi^*(s) - \beta_{12}\tilde{\sigma}^2(\pi^*(s))^2 \right] e^{r(T-s)}, \end{cases} \quad (28)$$

和

$$\begin{cases} b_{11}(s) = \left[\lambda\mu\eta q^*(s) - \frac{\lambda\sigma^2(q^*(s))^2}{2}(m_1 + \beta_{11}) \right] e^{r(T-s)}, \\ b_{12}(s) = \left[(\tilde{\mu} - L_t - r)\pi^*(s) - \frac{\tilde{\sigma}^2(\pi^*(s))^2}{2}(m_1 + \beta_{12}) \right] e^{r(T-s)}. \end{cases} \quad (29)$$

同时, 通过分离 L_t 前系数可以求得, 对于保险公司来说最优的分红为:

$$L_t = \lambda\mu - \sqrt{\frac{2\lambda\sigma^2((m_1 + \beta_{12}))}{2 - \beta_{12}\lambda\sigma^2 - m_1\lambda\sigma^2}} \quad (30)$$

3.2. 再保险人的最优价格-投资策略

本节讨论再保险人的优化问题。首先, 对于所有 $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, 我们定义一个关于 $W_2(t, y) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ 的无穷小生成元 \mathcal{L}_2 如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^{u,v,\phi_1,\phi_2}W_2(t,y) &:= \frac{\partial W_2(t,y)}{\partial t} + \left[ry + (\tilde{\mu} - L_t - r)\tilde{\pi} + \lambda\mu(1-q) + \sigma\sqrt{\lambda}\phi_{21}(1-q) \right] \\ &\quad \frac{\partial W_2(t,y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\lambda\sigma^2(1-q)^2 + \tilde{\sigma}^2\tilde{\pi}^2 \right) \frac{\partial^2 W_2(t,y)}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

按照定理 (3.1) 关于在保险人 HJB 的方程 (15) 等价于:

$$\begin{aligned}\sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{\phi_2 \in \Sigma_2} &\left\{ \frac{\partial W_2(t,y)}{\partial t} + \left[ry + (\tilde{\mu} - L_t - r)\tilde{\pi} + \lambda\mu(1-q^*) + \sigma\sqrt{\lambda}\phi_{21}(1-q^*) + \tilde{\sigma}\phi_{22}\tilde{\pi} \right] \frac{\partial W_2(t,y)}{\partial y} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\lambda\sigma^2(1-q^*)^2 + \tilde{\sigma}^2\tilde{\pi}^2 \right) \left(\frac{\partial^2 W_2(t,y)}{\partial y^2} - m_2 \left(\frac{\partial g_2(t,y)}{\partial y} \right)^2 \right) \\ &\quad \left. + \frac{\phi_{21}^2}{2\beta_{21}} + \frac{\phi_{22}^2}{2\beta_{22}} \right\} = 0.\end{aligned}\quad (31)$$

为了解 (32) 和 (33), 考虑如下形式的解函数:

$$\begin{cases} W_2(t,y) = A_2(t)y + B_2(t), g_2(t,y) = \tilde{A}_2(t)y + \tilde{B}_2(t), \\ A_2(T) = 1, \quad B_2(T) = 0, \tilde{A}_2(T) = 1, \quad \tilde{B}_2(T) = 0. \end{cases}$$

将 W_2 和 g_2 的对应偏导数代入 (35), 得到:

$$\begin{aligned}\sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{\phi_2 \in \Sigma_2} &\left\{ A_2'y + B_2' + \left[ry + (\tilde{\mu} - L_t - r)\tilde{\pi} + \lambda\mu(1-q^*) + \sigma\sqrt{\lambda}\phi_{21}(1-q^*) + \tilde{\sigma}\phi_{22}\tilde{\pi} \right] A_2 \right. \\ &\quad \left. - m_2 A_2^2 \frac{\lambda\sigma^2(1-q^*)^2 + \tilde{\sigma}^2\tilde{\pi}^2}{2} + \frac{\phi_{21}^2}{2\beta_{21}} + \frac{\phi_{22}^2}{2\beta_{22}} \right\} = 0.\end{aligned}\quad (32)$$

对于每个固定的 v , 关于 ϕ_2 的值函数一阶最优性条件的最小点 $\phi_2^*(t) := (\phi_{21}^*(t), \phi_{22}^*(t))$ 如下:

$$\begin{cases} \phi_{21}^*(t) = -\beta_{21}\sigma\sqrt{\lambda}A_2(t)(1-q^*(t)), \\ \phi_{22}^*(t) = -\beta_{22}\tilde{\sigma}A_2(t)\tilde{\pi}(t). \end{cases}\quad (33)$$

将 (33) 代入 (32), 并 (23a) 中的 q^* 代入 (33), 得到:

$$\begin{aligned}\sup_{v \in \mathcal{V}} &\left\{ A_2'y + B_2' + \left[ry + (\tilde{\mu} - L_t - r)\tilde{\pi} + \lambda\mu\eta - \frac{\lambda\mu^2\eta^2 A_1}{\beta_{11}\sigma^2 A_1^2 + m_1\sigma^2 \tilde{A}_1^2} \right] A_2 \right. \\ &\quad \left. - \lambda\sigma^2 \left(\frac{m_2 \tilde{A}_2^2}{2} + \frac{\beta_{21} A_2^2}{2} \right) \left(1 - \frac{2\mu\eta A_1}{\beta_{11}\sigma^2 A_1^2 + m_1\sigma^2 \tilde{A}_1^2} + \frac{\mu^2\eta^2 A_1^2}{(\beta_{11}\sigma^2 A_1^2 + m_1\sigma^2 \tilde{A}_1^2)^2} \right) \right\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

类似地, 关于 v 的值函数一阶最优性条件的最大点 $v^*(t) := (\eta^*(t), \tilde{\pi}^*(t))$ 如下:

$$\eta^*(t) = \frac{A_2(t)\sigma^2(\beta_{11}A_1^2(t) + m_1\tilde{A}_1^2(t)) + A_1(t)\sigma^2(\beta_{21}A_2^2(t) + m_2\tilde{A}_2^2(t))}{2\mu A_1(t)A_2(t) + \frac{\mu^2 A_1(t)(\beta_{21}A_2^2(t) + m_2\tilde{A}_2^2(t))}{\beta_{11}\sigma^2 A_1^2(t) + m_1\sigma^2 \tilde{A}_1^2(t)}}, \quad (34a)$$

$$\tilde{\pi}^*(t) = \frac{\tilde{\mu} - L_t - r}{\tilde{\sigma}^2(\beta_{22}A_2^2(t) + m_2\tilde{A}_2^2(t))}. \quad (34b)$$

将 η^* 和 $\tilde{\pi}^*$ 代入得到:

$$\begin{aligned} (\tilde{A}'_2 + r\tilde{A}_2)y + \tilde{B}'_2 + \left[(\tilde{\mu} - L_t - r)\tilde{\pi}^* + \lambda\mu\eta^*(1 - q^*) - \beta_{21}\sigma^2\lambda A_2(1 - q^*)^2 - \beta_{22}\tilde{\sigma}^2 A_2(\tilde{\pi}^*)^2 \right] \tilde{A}_2 &= 0, \\ (A'_2 + rA_2)y + B'_2 + \left[(\tilde{\mu} - L_t - r)\tilde{\pi}^* + \lambda\mu\eta^*(1 - q^*) \right] A_2 - \frac{\lambda\sigma^2(1 - q^*)^2}{2}(m_2\tilde{A}_2^2 + \beta_{21}A_2^2) \\ &\quad - \frac{\tilde{\sigma}^2(\tilde{\pi}^*)^2}{2}(m_2\tilde{A}_2^2 + \beta_{22}A_2^2) = 0. \end{aligned}$$

通过分离变量法, 我们得到以下常微分方程组:

$$\begin{cases} \tilde{A}'_2 + r\tilde{A}_2 = 0, & A'_2 + rA_2 = 0, \\ \tilde{B}'_2 + \left[(\tilde{\mu} - L_t - r)\tilde{\pi}^* + \lambda\mu\eta^*(1 - q^*) - \beta_{21}\sigma^2\lambda A_2(1 - q^*)^2 - \beta_{22}\tilde{\sigma}^2 A_2(\tilde{\pi}^*)^2 \right] \tilde{A}_2 = 0, \\ B'_2 + \left[(\tilde{\mu} - L_t - r)\tilde{\pi}^* + \lambda\mu\eta^*(1 - q^*) \right] A_2 \\ \quad - \frac{\lambda\sigma^2(1 - q^*)^2}{2}(m_2\tilde{A}_2^2 + \beta_{21}A_2^2) - \frac{\tilde{\sigma}^2(\tilde{\pi}^*)^2}{2}(m_2\tilde{A}_2^2 + \beta_{22}A_2^2) = 0. \end{cases}$$

利用边界条件, 我们得到:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2(t) &= e^{r(T-t)}, & A_2(t) &= e^{r(T-t)}, \\ \tilde{B}_2(t) &= \int_t^T \tilde{b}_{21}(s)ds + \int_t^T \tilde{b}_{22}(s)ds, \\ B_2(t) &= \int_t^T b_{21}(s)ds + \int_t^T b_{22}(s)ds, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{b}_{21}(s) = \left[\lambda\mu\eta^*(s)(1 - q^*(s)) - \beta_{21}\sigma^2\lambda(1 - q^*(s))^2 e^{r(T-s)} \right] e^{r(T-s)}, \\ \tilde{b}_{22}(s) = \left[(\tilde{\mu} - L_t - r)\tilde{\pi}^*(s) - \beta_{22}\tilde{\sigma}^2(\tilde{\pi}^*(s))^2 e^{r(T-s)} \right] e^{r(T-s)}, \\ b_{21}(s) = \left[\lambda\mu\eta^*(s)(1 - q^*(s)) - \frac{\lambda\sigma^2(1 - q^*(s))^2}{2}(m_2 + \beta_{21})e^{r(T-s)} \right] e^{r(T-s)}, \\ b_{22}(s) = \left[(\tilde{\mu} - L_t - r)\tilde{\pi}^*(s) - \frac{\tilde{\sigma}^2(\tilde{\pi}^*(s))^2}{2}(m_2 + \beta_{22})e^{r(T-s)} \right] e^{r(T-s)}. \end{cases} \quad (35)$$

保险人的稳健最优自留比例和再保险人的最优再保险价格分别为：

$$q^*(t) = \frac{\beta_{11} + m_1 + \beta_{21} + m_2}{2(\beta_{11} + m_1) + \beta_{21} + m_2}, \quad (36)$$

以及

$$\eta^*(t) = \frac{\sigma^2(\beta_{11} + m_1)^2 e^{r(T-t)} + \sigma^2(\beta_{11} + m_1)(\beta_{21} + m_2) e^{r(T-t)}}{2\mu(\beta_{11} + m_1) + \mu(\beta_{21} + m_2)}. \quad (37)$$

此外，保险人和再保险人的稳健最优投资策略分别为：

$$\pi^*(t) = \frac{\tilde{\mu} - L_t - r}{(m_1 + \beta_{12})\tilde{\sigma}^2 e^{r(T-t)}}, \quad (38)$$

以及

$$\tilde{\pi}^*(t) = \frac{\tilde{\mu} - L_t - r}{(m_2 + \beta_{22})\tilde{\sigma}^2 e^{r(T-t)}}. \quad (39)$$

最终，保险人和再保险人的值函数分别由以下积分表示给出：

$$V_1(t, x) = x e^{r(T-t)} + \int_t^T \lambda \mu (\theta - \eta^*(s)) ds + \int_t^T b_{11}(s) ds + \int_t^T b_{12}(s) ds, \quad (40)$$

$$V_2(t, y) = y e^{r(T-t)} + \int_t^T b_{21}(s) ds + \int_t^T b_{22}(s) ds, \quad (41)$$

其中 $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ 按照 (27) 和 (34) 中将 η 替换为 η^* 得到。对于再保险公司来说最优的分红为：

$$L_t = \tilde{\mu} - \sqrt{\frac{B_1(t)\tilde{\sigma}^2((m_2 + \beta_{22}))}{m_2}} - r \quad (42)$$

4. 实证分析

4.1. 数据来源

本文选取的是 2020 年 1 月 2 日至 2024 年 8 月 30 日的上证指数收盘价作为研究对象，共计 1132 组数据。

图 1 表示上证指数的时序图，上证指数收盘价随时间变化而变化。本文考虑使用 MCMC 方法估计参数，首先对数据进行统计性分析。

4.2. 上证指数统计性分析

在 CEV 模型中， μ 为股票指数的期望对数收益率均值， σS_t^β 为对数收益率的标准差，建立如下的对数收益率模型：

$$r_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$$

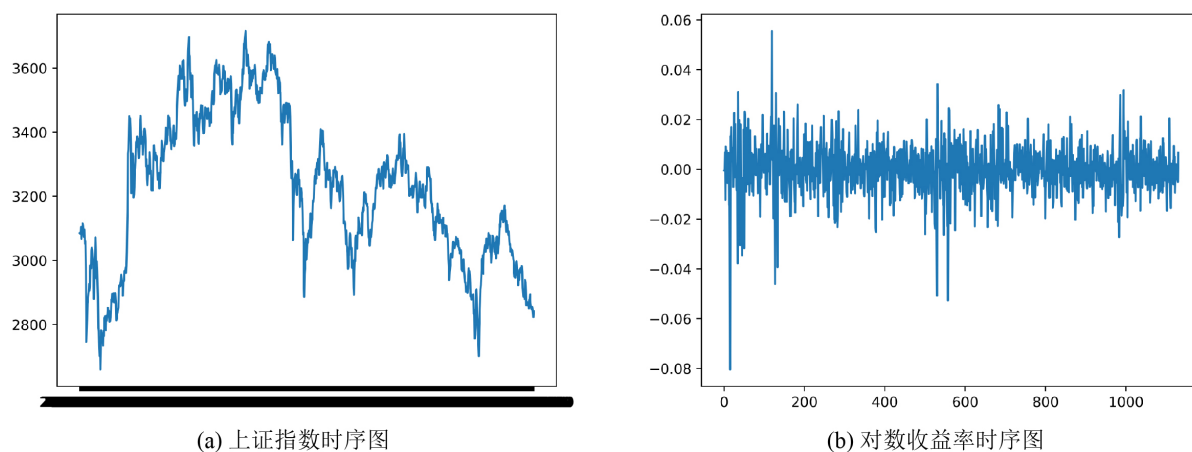


Figure 1. Temporal diagram of the Shanghai Composite Index and logarithmic return temporal diagram

图 1. 上证指数时序图和对数收益率时序图

S 在这里表示上证指数, r_t 表示每日对数收益率。

对该对数收益率时序图进行分析, 可观测出对数收益率的集群现象。其中, 0-200, 500-700, 900-1100 之间数据波动较大。

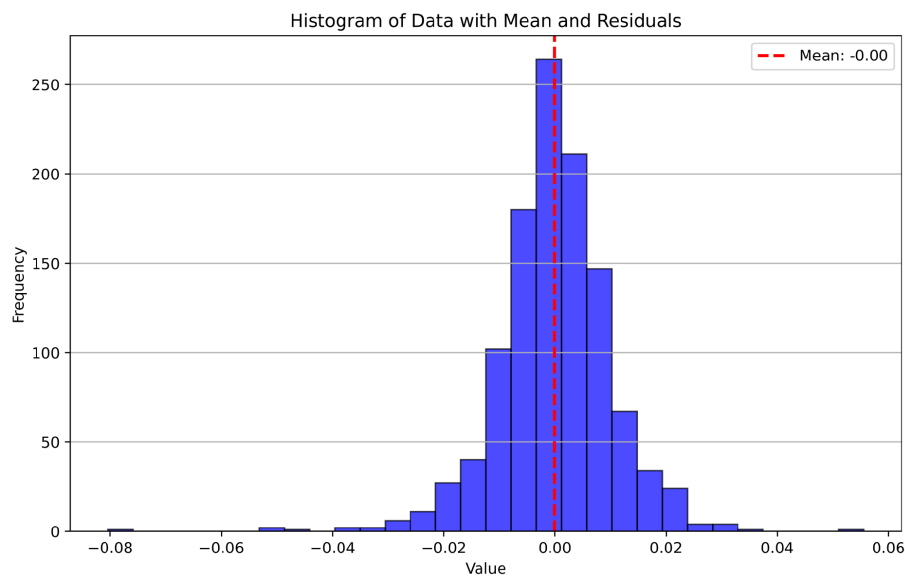


Figure 2. Logarithmic yield box plot

图 2. 对数收益率箱型图

经过观察并分析图 2, 可以了解到平均值为 -0.000107525, 中位数为 -0.000265860, 标准差为 0.0102581。由于本文研究的是金融序列, 需要考虑序列的平稳性, 本文使用 ADF 方法检验序列的平稳性。表 1 是 ADF 检验结果。

通过表 1 可以看出, p 值约等于 0.00, 且检验统计量均大于在 0.01, 0.05, 0.1 显著性水平下

Table 1. ADF test result

表 1. ADF 检验结果

项目	值
<i>ADFStatistic</i>	-18.04099508991882
<i>p-value</i>	2.657769175161298e-30
<i>CriticalValues</i>	
1%	-3.4361656672131806
5%	-2.864107957764881
10%	-2.568137251515397

的临界值。所以拒绝原假设，认为序列是平稳的。之后对序列进行自相关和偏自相关的检验，建立合适的模型。本文考虑使用 DW 检验验证自相关性，经过计算 DW 统计量为 1.970，接近 2，可以认为序列无显著的自相关性。

由于序列中无显著的相关性，假设均值方程为回归模型中的白噪声：

$$r_t = c + u_t$$

根据经验，笔者假设白噪声函数均值为 0.001。在一般线性模型中，可以认为随机误差项为同方差的。但因本文使用的数据中出现了集群现象，可以认定参差具有异方差性质。在研究金融时间序列时，需要检验参差序列是否存在 ARCH 效应，即异方差性质。本文考虑使用 ARCH LM 检验，验证序列是否存在 ARCH 效应 (异方差)。

4.3. ARCH 检验结果

对时间序列数据进行 ARCH (自回归条件异方差) 检验，表 2 为统计量检验结果。

Table 2. ARCH test statistic

表 2. ARCH 检验统计量

统计量	值
Lagrange 乘数统计量	46.8979
p-value (Lagrange 乘数)	0.0000
F 统计量	4.8465
p-value (F 统计量)	0.0000

LM 统计量为 46.8979，显示本序列存在显著自相关性。并且两个 p 值都非常小，远低于显著性水平。因此可以得出结论：拒绝原假设，存在 ARCH 效应。

由于序列存在 ARCH 效应，本文考虑通过 ARCH 模型来拟合原序列。但在拟合过程中，需要估计很多参数，并且只有当滞后阶数足够多时才会有理想的拟合结果。为了减少参数过多导致

的误差，本文尝试使用 Clive Granger 提出的 GARCH(1,1) 模型进行拟合，序列应满足以下方程：

$$\begin{cases} r_t = c + u_t \\ \sigma_t^2 = c_1 + c_2 \cdot u_{t-1}^2 + c_3 \cdot \sigma_{t-1}^2, \end{cases} \quad (8)$$

4.4. GARCH Model 拟合结果

分析表 3，表 4，表 5 可以发现，其中赤池信息量准则（AIC）与贝叶斯信息量准则（BIC）的值十分小，可以说明模型拟合效果良好；均值模型系数 μ 为负值，表示均值模型中，常数影响较小，并且通过 t 值可知在 0.005 显著性水平下显著；波动率模型中各系数 p 值均接近于 0，可知均通过显著性检验。

Table 3. GARCH model results

表 3. GARCH 模型拟合结果

Dep. Variable:	<i>y</i>
Mean Model:	Constant Mean
Vol Model:	GARCH
Distribution:	Normal
Method:	Maximum Likelihood
No. Observations:	1131
Log-Likelihood:	3647.44
AIC:	-7286.87
BIC:	-7266.75
Df Residuals:	1130
Df Model:	1
Date:	Mon, Dec 09 2024
Time:	10:40:39

Table 4. Mean model coefficients

表 4. 均值模型系数

	coef	std err	t	P	95.0% Conf. Int.
μ	-8.4000e-05	3.896e-05	-2.156	3.109e-02	[-1.604e-04, -7.635e-06]

Table 5. Volatility model coefficients

表 5. 波动率模型系数

	coef	std err	t	P	95.0% Conf. Int.
ω	2.0799e-06	2.846e-11	7.309e+04	0.000	[2.080e-06, 2.080e-06]
$\alpha[1]$	0.0498	1.926e-02	2.587	9.691e-03	[1.207e-02, 8.758e-02]
$\beta[1]$	0.9268	1.685e-02	54.850	0.000	[8.924e-01, 9.284e-01]

4.5. MCMC

最后考虑使用蒙特卡洛模拟方法来进行参数估计，并尝试给出对数收益率的预测值。参数估计结果如下：

$$\mu = -0.000119159$$

$$\sigma = 0.0102385$$

为了验证参数估计结果，本文尝试使用模型预测股市上证指数收盘价，图 3 为预测结果。

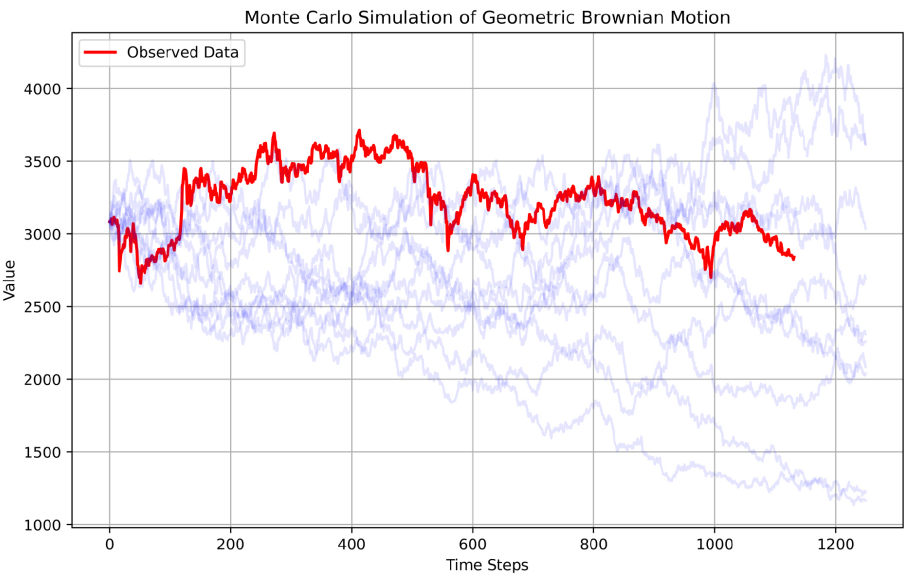


Figure 3. Monte Carlo simulation results

图 3. 蒙特卡洛模拟结果

观察图 3 可以发现预测结果绝大多数均在 [1500-4000] 区间内，与真实数据差距不大，并且在一定程度上与真实数据价格变化趋势相同，考虑到白噪声函数的存在，可以初步认为预测结果误差并不大，模型拟合性良好。

为了增加严谨性，使用不同迭代次数重复 MCMC 算法。下面分别进行 10000，20000，30000 次迭代（见图 4）。

Table 6. Parameter results with different iterations

表 6. 不同迭代次数下的参数结果

迭代次数	10000 次	20000 次	30000 次
μ	-0.000132824	-0.000119996	-0.000121236
σ	0.0102560	0.0101817	0.0102103

观察表 6 参数结果与使用 MCMC 算法参数模拟出的股市预测图，可以发现当模拟次数大于 10000 后，模拟次数对于参数模拟结果影响不大，股市预测结果都在 [1500-4500] 的区间中且大致

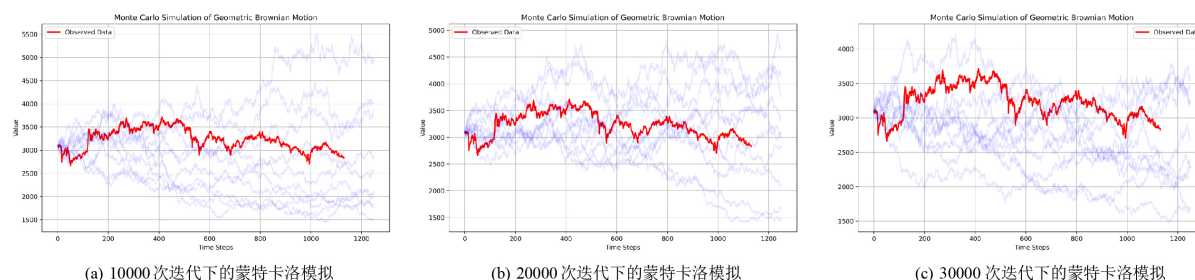


Figure 4. Monte Carlo simulations with different iterations

图 4. 不同迭代次数下的蒙特卡洛模拟

趋势相同，由于白噪声函数存在，可以认为该迭代方法是收敛和稳定的。

5. 结论

本文基于 Stackelberg 随机微分博弈理论，在委托代理框架下分别对模糊厌恶的保险公司和再保险公司讨论了最优再保险和投资问题。利用随机控制理论，在均值-方差准则下建立相应的 HJB 方程并得出两个参与者各自的纳什均衡策略及相应值函数。最后，通过数据分析模型参数估计值。与以往文献不同的是，将保险公司和再保险公司投资于相同的风险资产模型并计算带有连续分红的最优再保险-投资策略。在委托代理框架下，还有一些问题值得今后进一步研究，比如：当两个参与者投资于不同模型下的最优再保险-投资的均衡策略的求解问题；当保险市场和金融市场具有相关性时，利用 Stackelberg 随机微分博弈相关理论可进一步研究两个参与者的均衡策略。

参考文献

- [1] Cao, J., Li, D., Young, V.R. and Zou, B. (2022) Stackelberg Differential Game for Insurance under Model Ambiguity. *Insurance: Mathematics and Economics*, **106**, 128-145.
<https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2022.06.003>
- [2] Kang, J.-H., Gou, Z. and Huang, N.-J. (2024) Equilibrium Reinsurance and Investment Strategies for Insurers with Random Risk Aversion under Heston's SV Model. arXiv:2412.19050
- [3] Bai, Y., Zhou, Z., Xiao, H. and Gao, R. (2020) A Stackelberg Reinsurance-Investment Game with Asymmetric Information and Delay. *Optimization*, **70**, 2131-2168.
<https://doi.org/10.1080/02331934.2020.1777125>
- [4] Yi, B., Li, Z., Viens, F.G. and Zeng, Y. (2013) Robust Optimal Control for an Insurer with Reinsurance and Investment under Heston's Stochastic Volatility Model. *Insurance: Mathematics and Economics*, **53**, 601-614. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.08.011>

-
- [5] Yuan, Y., Liang, Z. and Han, X. (2021) Robust Reinsurance Contract with Asymmetric Information in a Stochastic Stackelberg Differential Game. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2022**, 328-355. <https://doi.org/10.1080/03461238.2021.1971756>
- [6] Bjork, T. and Murgoci, A. (2010) A General Theory of Markovian Time Inconsistent Stochastic Control Problems. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1694759>
- [7] Björk, T., Murgoci, A. and Zhou, X.Y. (2012) Mean-Variance Portfolio Optimization with State-Dependent Risk Aversion. *Mathematical Finance*, **24**, 1-24. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2011.00515.x>
- [8] Maenhout, P.J. (2004) Robust Portfolio Rules and Asset Pricing. *Review of Financial Studies*, **17**, 951-983. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhh003>
- [9] Li, Z., Zeng, Y. and Lai, Y. (2012) Optimal Time-Consistent Investment and Reinsurance Strategies for Insurers under Heston's SV Model. *Insurance: Mathematics and Economics*, **51**, 191-203. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2011.09.002>
- [10] Jang, B. and Kim, K.T. (2015) Optimal Reinsurance and Asset Allocation under Regime Switching. *Journal of Banking Finance*, **56**, 37-47. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2015.03.002>
- [11] Li, D., Rong, X. and Zhao, H. (2014) Optimal Reinsurance and Investment Problem for an Insurer and a Reinsurer with Jump-Diffusion Risk Process under the Heston Model. *Computational and Applied Mathematics*, **35**, 533-557. <https://doi.org/10.1007/s40314-014-0204-1>
- [12] Hu, D., Chen, S. and Wang, H. (2018) Robust Reinsurance Contracts with Uncertainty about Jump Risk. *European Journal of Operational Research*, **266**, 1175-1188. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.10.061>