Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(4), 75-82
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.144141

不含 4-圈的 IC-平面图的严格邻点可区别边染色

王加炎

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2025年3月1日；录用日期：2025年3月25日；发布日期：2025年4月3日

摘 要

图的严格邻点可区别边染色是指图中的任意一对相邻顶点的颜色集合互相不包含。称使得图具有严格邻点可区别边染色的最小正整数为图的严格邻点可区别边色数。本文运用权转移方法证明：对于不含4-圈的IC-平面图，其严格邻点可区别边色数为两倍最大度与13 的和。

关键词

严格邻点可区别边染色，IC-平面图，圈

Strict Neighbor-Distinguishing Edge-Coloring of IC-Planar Graphs without 4-Cycles

Jiayan Wang

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 1^{st}, 2025; accepted: Mar. 25^{th}, 2025; published: Apr. 3^{rd}, 2025

Abstract

The strict neighbor-distinguishing edge coloring of a graph refers to an edge coloring where for any pair of adjacent vertices, their respective color sets neither contain nor

文章引用: 王加炎. 不含 4-圈的 IC-平面图的严格邻点可区别边染色[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 75-82.
DOI: 10.12677/aam.2025.144141

are contained within each other. The smallest positive integer that enables a graph to admit such a coloring is called the strict neighbor-distinguishing edge chromatic number. In this paper, we employ the discharging method to prove that for IC-planar graphs without 4-cycles, the strictly adjacent vertex-distinguishing edge chromatic number equals the sum of twice the maximum degree and 13.

Keywords

Strict Neighbor-Distinguishing Edge-Coloring, IC-Planar Graph, Cycle

1. 引言

本文仅考虑有限简单图. 若图 G 可嵌在平面上, 使得任意两条边仅在端点处相交, 则称 G 为平面图. 给定平面图 G, 用 $V(G)$、$E(G)$、$F(G)$、$\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ (简写为 Δ) 分别表示图 G 的顶点集、边集、面集、最小度和最大度. 设 $x \in V(G) \cup F(G)$, 用 $d_G(x)$ 表示图 G 中顶点 (或面) x 的度. 如果顶点 v 满足 $d_G(v) = k$ ($d_G(v) \geq k$ 或 $d_G(v) \leq k$), 则称顶点 v 为 k- 点 (k^+-点或 k^--点). 类似可以定义 k-面, k^+-面或 k^--面. 对于 $v \in V(G)$, 用 $N_G(v)$ 表示与顶点 v 相邻的所有顶点构成的集合. 显然, $|N_G(v)| = d_G(v)$. 设 $f \in F(G)$ 是 G 的一个 k-面. 若 $v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}$ 是面 f 的周界上依次出现的顶点 (允许顶点有重复) 且依顺时针方向排列, 则记 $f = [v_0 v_1 \cdots v_{k-1}]$. 用 $n_k^G(v)$ 表示图 G 中与 v 相邻的 k-点的个数, $n_i^G(f)$ 表示平面图 G 中与面 f 关联的 i-点的个数. 类似可以定义 $n_{k^+}^G(v)$ 和 $n_{k^-}^G(v)$.

若图 G 可画在平面上使得每条边至多被交叉一次, 且每个顶点至多与一个交叉点相邻, 则称 G 为 IC-可平面图. 具有上述画法的 IC-可平面图称为 IC-平面图. 设 G 是 IC-平面图. 用 $C(G)$ 表示图 G 中的所有交叉点组成的集合. 按如下方式构造图 G 的关联平面图 $G^\times$: $V(G^\times) = V(G) \cup C(G), E(G^\times) = (E(G)$-$\{e \in E(G) | \exists f \in E(G)$, 使 e 与 f 交叉$\}) \cup E_1$, 其中 $E_1 = \{xz, yz, uz, vz | xy \in E(G), uv \in E(G)$ 且 xy 与 uv 交叉于 $z\}$. 称 $C(G)$ 中的点为 $G^\times$ 的假点, $V(G)$ 中的点为 $G^\times$ 的真点. $G^\times$ 中与假点关联的面称为假面, 其余为真面.

图 G 的一个正常 k-边染色是指一个映射 $\phi : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$, 使得任意两条相邻边染不同的颜色. 图 G 的边色数是使 G 有一个正常 k-边染色的最小正整数 k, 记作 $\chi'(G)$. 对于图 G 的一个正常 k-边染色 ϕ, 用 $C_\phi(v)$ 表示与 v 相关联的边的颜色组成的集合. 若对图 G 任一对相邻顶点 u 和 v, 都有 $C_\phi(u) \neq C_\phi(v)$, 则称 ϕ 是邻点可区别的. 用 $\chi'_a(G)$ 表示使得 G 有邻点可区别 k-边染色的最小正整数 k. 称不含 K_2 为连通分支的图为正常图. 显然 G 有邻点可区别边染色当且仅当 G 为正常图.

2002 年, Zhang 等 [1] 率先研究了图的邻点可区别边染色问题并提出如下猜想.

猜想1. [1] 若 G 是阶数至少为 6 的连通图, 则 $\chi'_a(G) \le \Delta + 2$.

Akbari 等 [2] 证明了每个正常图 G 满足 $\chi'_a(G) \le 3\Delta$. Wang 等 [3] 将这个结果改进到 $\chi'_a(G) \le 2.5\Delta$. 随后 Vučković [4] 进一步改进到 $\chi'_a(G) \le 2\chi'_a(G) \le 2\Delta + 2$. 2020 年, Joret 和 Lochet [5] 用概率方法证明了当 Δ 充分大时, 有$\chi'_a(G) \le \Delta + 19$. 设 G 是一个正常平面图. Huang 等 [6] 证明了若 $\Delta \ge 10$, 则 $\chi'_a(G) \le \Delta + 2$. 此外, Huo 等 [7] 证明了若 $\Delta \ge 13$, 则 $\chi'_a(G) \le \Delta + 1$, 等号成立当且仅当 G 有两个相邻的 Δ-点.

设 ϕ 是 G 的一个正常 k-边染色. 若 $C_\phi(u) \subsetneq C_\phi(v)$ 且 $C_\phi(v) \subsetneq C_\phi(u)$, 则称顶点 u 和顶点 v 在 ϕ 下互斥. 若图 G 的任一对相邻顶点 u 和 v 在 ϕ 下都是互斥的, 则称 ϕ 是 G 的严格邻点可区别 k-边染色 (简称为 SNDE-染色). 用 $\chi'_{snd}(G)$ 表示使得 G 有严格邻点可区别 k-边染色的最小正整数 k. 称 $\delta(G) \ge 2$ 的图为正规图. 显然 G 有严格邻点可区别边染色当且仅当 G 为正规图. 进一步地, 若图 G 的任意一对相邻的 2^+-点 u 和 v 在 ϕ 下都是互斥的, 则称 ϕ 是局部严格邻点 k-边染色 (简称为 LNDE-染色). 用 $\chi'_{lnd}(G)$ 表示使得 G 有局部严格邻点可区别 k-边染色的最小正整数 k.

命题1. *若 G 是正规图, 则 $\chi'_{snd}(G) = \chi'_{lnd}(G)$.*

Zhu 等 [8] 研究了图的严格邻点可区别边染色. Gu 等 [9] 构造了一类图 H_n: 在 $K_{2,n}$ 中剖分一条边, 其中 $n \ge 2$ 且证明了 $\chi'_{snd}(H_n) = 2n + 1 = 2\Delta(H_n) + 1$. 由此, 他们提出如下猜想:

猜想2. [8] 若 G 是不与 H_Δ 同构的正规连通图, 则 $\chi'_{snd}(G) \le 2\Delta$.

Gu 等 [9] 证明了每个 $\Delta \le 3$ 的正规图 G 都有 $\chi'_{snd}(G) \le 7$, 且 $\chi'_{snd}(G) = 7$ 当且仅当 G 同构于 H_3. 刘信生等 [10] 证明了: 存在一个常数 c 使得每个满足 $\Delta \ge 10^{26}$ 和围长 $g(G) \ge c\Delta log\Delta$ 的正规图 G, 有 $\chi'_{snd}(G) \le \Delta + 301$. Przybyło 等 [11]证明了每个正规图 G, 有 $\chi'_{snd}(G) \le 3\Delta - 1$. Jing 等 [12] 证明了: 若 G 是不含 4-圈的正规平面图, 则 $\chi'_{snd}(G) \le 2\Delta + 10$. 2023 年, 井普宁在其博士毕业论文 [13] 中证明了: 若 G 是不含 4-圈的正规平面图, 则 $\chi'_{snd}(G) \le \Delta + 300$.

本文考虑了不含 4-圈的 IC-平面图的严格邻点可区别边色数, 得到了以下结论:

定理1. 若 G 是不含 4-圈的正规 IC-平面图, 则 $\chi'_{snd}(G) \le 2\Delta + 13$.

根据命题 1, 我们只需要证明如下稍微强一些的定理:

定理2. 若 G 是不含 4-圈的 IC-平面图, 则 $\chi'_{lnd}(G) \le 2\Delta + 13$.

2. 结构性质

引理1. [11] 对每个平面图 G, 有 $\chi'_{lnd}(G) \le 3\Delta - 1$.

假设定理 2 不成立. 设 G 是定理 2 的边数尽可能少的极小反例图, 即 G 是不含 4-圈的 IC-平面图且 $\chi'_{lnd}(G) > 2\Delta + 13$. 但对于任意真子图 G' 有 $\chi'_{lnd}(G') \le 2\Delta(G') + 13 \le 2\Delta + 13$. 显然, G 是一个连通图. 用 $C = \{1, 2, \cdots, 2\Delta + 13\}$ 表示所用的颜色集合. 选取 G 的 IC-平面画法中交叉点数最少的一种画法, 即 G 有最优 IC-平面画法.

设 G' 是 G 的一个子图且 G' 有一个 $(2\Delta + 13)$-LNDE-染色 ϕ. 令 $v \in V(G')$, $vv_i \in E(G')$ 且 $\min\{d_{G'}(v), d_{G'}(v_i)\} \ge 2$. 因为 v 和 v_i 在 ϕ 下互斥, 所以存在一个颜色 $r_i \in C_\phi(v_i) \setminus C_\phi(v)$. 令 $R(v) = \{r_i \in C_\phi(v_i) \setminus C_\phi(v) | v_i \in N_{G'}(v)\}$, 称 $R(v)$ 是 v 关于 ϕ 的第二层限制色集. 注意到若 $d_G(v_i) \ge d_G(v)$ 且存在 $\gamma_i \in C_\phi(v_i) \setminus C_\phi(v)$, 则只要 uv 正常染色皆可保证 v 与 v_i 是互斥的.

由引理 1 易得断言 1 成立.

断言1. $\Delta \geq 15$.

断言2. G 不含 1-点.

证明 假设 $d_G(u)=1$ 且 $uv \in E(G)$. $G' = G - uv$ 是不含 4-圈且 $|E(G')| < |E(G)|$ 的 IC-平面图. 由 G 的极小性知, G' 有一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色 ϕ, 所用颜色集为 C. 当 $d_G(v)=2$ 时, 令 v_1 为 v 的不同于 u 的邻点. 用颜色 $a \in C \setminus C_\phi(v_1)$ 染 uv 得到 G 的一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色, 矛盾. 当 $d_G(v) \geq 3$ 时, 用颜色 $a \in C \setminus (C_\phi(v) \cup R(v))$ 染 uv 得到 G 的一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色, 矛盾.□

断言3. 设 $v \in V(G)$. 若 $d_G(v)=2$, 则 $n^G_{14^-}(v)=0$.

证明 令 v_1, v_2 是 v 的邻点. 由断言 1 知, $d_G(v_1), d_G(v_2) \geq 2$. 假设 $d_G(v_1) \leq 14$. 由 G 的极小性知, $G-v$ 有一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色 ϕ, 所用颜色集为 C.

设 $d_G(v_1)=d_G(v_2)=2$. 令 u_1, u_2 分别为 v_1, v_2 的不同于 v 的邻点. 用颜色 $a \in C \setminus (C_\phi(u_1) \cup C_\phi(v_2))$ 染 vv_1, 用颜色 $b \in C \setminus (C_\phi(u_2) \cup C_\phi(v_1) \cup \{a\})$ 染 vv_2 得到 G 的一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色, 矛盾.

设 $d_G(v_1)=2, d_G(v_2) \geq 3$. 令 u_1 为 v_1 的不同于 v 邻点. 用颜色 $a \in C \setminus (C_\phi(u_1) \cup C_\phi(v_2))$ 染 vv_1, 用颜色 $b \in C \setminus (C_\phi(v_2) \cup R(v_2) \cup C_\phi(v_1) \cup \{a\})$ 染 vv_2 得到 G 的一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色, 矛盾.

设 $3 \leq d_G(v_1) \leq 14, d_G(v_2) \geq 3$. 用颜色 $a \in C \setminus (C_\phi(v_1) \cup R(v_1) \cup C_\phi(v_2))$ 染 vv_1, 用颜色 $b \in C \setminus (C_\phi(v_2) \cup R(v_2) \cup C_\phi(v_1) \cup \{a\})$ 染 vv_2. 注意到 $|C_\phi(v_2) \cup R(v_2) \cup C_\phi(v_1) \cup \{a\}| \leq (\Delta-1)+(\Delta-1)+13+1 = 2\Delta+12$. 故可得 G 的一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色, 矛盾. □

断言4. 设 $v \in V(G)$. 若 $d_G(v)=3$, 则 $n^G_{8^-}(v)=0$.

证明 令 v_1, v_2, v_3 是 v 的邻点. 由断言 1 及断言 2 知, $d_G(v_i) \geq 3$, $i \in \{1,2,3\}$. 假设 $3 \leq d_G(v_1) \leq 8$. 由 G 的极小性知, $G-v$ 有一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色 ϕ, 所用颜色集为 C. 用颜色 $a \in C \setminus (C_\phi(v_1) \cup R(v_1) \cup C_\phi(v_2) \cup C_\phi(v_3))$ 染 vv_1, 用颜色 $b \in C \setminus (C_\phi(v_2) \cup R(v_2) \cup C_\phi(v_1) \cup \{a\})$ 染 vv_2, 用颜色 $c \in C \setminus (C_\phi(v_3) \cup R(v_3) \cup \{a,b\})$ 染 vv_3. 注意到 $|C_\phi(v_1) \cup R(v_1) \cup C_\phi(v_2) \cup C_\phi(v_3)| \leq 7+7+(\Delta-1)+(\Delta-1) = 2\Delta+12$. 故可得 G 的一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色, 矛盾. □

断言5. 设 $v \in V(G)$. 若 $d_G(v)=k$, 则 $n^G_{(16-k)^-}(v)=0$, 其中 $4 \leq k \leq 8$.

证明 令 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 是 v 的邻点. 当 $k=4$ 时, 由断言 2-4 知, $d_G(v_i) \geq 4$, $i \in \{1,2,3,4\}$. 假设 $n^G_{12^-}(v) \geq 1$. 不妨设 $4 \leq d_G(v_1) \leq 12$. 由 G 的极小性知, $G - \{vv_1, vv_2\}$ 有一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色 ϕ, 所用颜色集为 C. 用颜色 $a \in C \setminus (C_\phi(v_1) \cup R(v_1) \cup C_\phi(v_2) \cup C_\phi(v))$ 染 vv_1, 用颜色 $b \in C \setminus (C_\phi(v_2) \cup R(v_2) \cup C_\phi(v_1) \cup C_\phi(v) \cup \{a\})$ 染 vv_2. 注意到 $|C_\phi(v_2) \cup R(v_2) \cup C_\phi(v_1) \cup C_\phi(v) \cup \{a\}| \leq (\Delta-1)+(\Delta-1)+11+2+1 = 2\Delta+12$. 故可得 G 的一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色, 矛盾.

假设 $t \leq k-1$ 时结论成立. 则 $(k-1)^-$-点不与 $(17-k)^-$-点相邻. 由 $4 \leq k \leq 8$ 知, $(k-1)^-$-点不与 k-点相邻.

当 $t=k$ 时, 由归纳假设知, $d_G(v_i) \geq k$, $i \in \{1,2,\cdots,k\}$. 假设 $n^G_{(16-k)^-}(v) \geq 1$. 不妨设 $k \leq d_G(v_1) \leq 16-k$. 由 G 的极小性知, $G - \{vv_1, vv_2\}$ 有一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色 ϕ, 所用颜色集为 C. 用颜色 $a \in C \setminus (C_\phi(v_1) \cup R(v_1) \cup C_\phi(v_2) \cup C_\phi(v))$ 染 vv_1, 用颜色 $b \in C \setminus (C_\phi(v_2) \cup R(v_2) \cup C_\phi(v_1) \cup C_\phi(v) \cup \{a\})$ 染 vv_2. 注意到$|C_\phi(v_2) \cup R(v_2) \cup C_\phi(v_1) \cup C_\phi(v) \cup \{a\}| \leq (\Delta-1)+(\Delta-1)+(16-k-1)+(k-2)+1 = 2\Delta+12$. 故可得 G 的一个 $(2\Delta+13)$-LNDE-染色, 矛盾. □

3. 定理 2 的证明

记 $G^{\times}$ 为 G 的关联平面图. 令 $C(G)$ 为 G 的交叉点, E_1 为与交叉点关联的边. 则 $V(G^{\times}) = V(G) \cup C(G)$, $E(G^{\times}) = (E(G) - E_1) \cup E_2$, 其中 $E_2 = \{uz, vz, xz, yz | uv$ 与 xy 的交叉点为 $z\}$. 则 $G^{\times}$ 是平面图. 称 $C(G)$ 中的点为假点, 与假点关联的面为假面.

断言6. (1) $G^{\times}$ 中的 2-点不与假 3-面关联;

(2) $G^{\times}$ 中不存在假 4-面 $f = [v_1v_2v_3v_4]$, 使得 v_2 是交叉点且 $d_G(v_1) = d_G(v_3) = 2$.

证明 (1) 设 v 是与假 3-面 f 关联的 2-点. 令 $f = [uvw]$, 其中 u 为交叉点. 设 u 是 ww_1 与 vv_1 的交叉点. 令 f_1 为与 f 相邻且以 wv, vu, uw_1 为边界的面. 则可在 G 的 IC-平面画法中去掉边 ww_1 且在面 f_1 中加上边 ww_1 且使得 ww_1 与其余边都不交叉, 与 G 为最优 IC-平面画法矛盾. 故 2-点不与假 3-面关联. □

(2) 设 $G^{\times}$ 中存在满足条件的假 4-面 $f = [v_1v_2v_3v_4]$, 其中 v_2 是交叉点. 令 v_2 是 v_1v_1' 与 v_3v_3' 的交叉点. 令 f_1 (或 f_2) 为与 f 相邻且以 v_4v_1, v_1v_2, v_2v_3' (对应的, 以 v_4v_3, v_3v_2, v_2v_1') 为边界的面. 则可在 G 的 IC- 平面画法中去掉顶点 v_3, 将 v_3 画在面 f_1 中并连接边 v_4v_3, v_3v_3' 且不产生新交叉边, 与 G 为最优 IC-平面画法矛盾. □

由 G 为不含 4-圈的 IC-平面图知, 断言 7 成立.

断言7. (1) $G^{\times}$ 中的真 3-面不与真 3-面相邻;

(2) $G^{\times}$ 中的假 3-面不与假 4-面相邻.

(3) $G^{\times}$ 中的真 3-面至多与一个假 3-面相邻.

(4) 若两个假 3-面相邻, 则它们不与 3-面相邻.

设 $f = [v_0v_1 \cdots v_{l-1}]$ 是 $G^{\times}$ 的一个 l-面. 若 $d_G(v_i) = k_i$, $i \in \{0, 1, \cdots, l-1\}$ 则称该 l-面为 $(k_0, k_1, \cdots, k_{l-1})$-面. 特别地, 若有 $d_G(v_j) \geq k_j$, $j \in \{0, 1, \cdots, l-1\}$, 则称该 l-面为 $(k_0, \cdots, k_j^+, \cdots, k_{l-1})$-面. 设 $f = v_0v_1 \cdots v_{k-1}$ 是一个假 k-面. 令 v_0 是 v_1v_1' 与 v_kv_k' 的交叉点, 则称 v_1' 和 v_k' 为 f 的对应点, f 为 v_1' 或 v_k' 的对应面. 从而每个顶点至多有两个对应面.

下面将运用权转移方法来推出矛盾. 首先, 定义初始权函数 w: 对 $v \in V(G^{\times})$, 令 $w(v) = d_{G^{\times}}(v) - 4$; 对 $f \in F(G^{\times})$, 令 $w(f) = d_{G^{\times}}(f) - 4$. 根据欧拉公式和握手定理, 有

$$\sum_{x \in V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})} w(x) = \sum_{v \in V(G^{\times})} (d_{G^{\times}}(v) - 4) + \sum_{f \in F(G^{\times})} (d_{G^{\times}}(f) - 4) = -8.$$

接着, 定义适当的权转移规则, 并且按照给定的规则对图中的顶点和面的权进行重新分配. 当权转移过程结束后, 会得到一个新的权函数 w', 并且权转移过程中所有顶点和面的权和保持不变. 若对任意 $x \in V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})$, 有 $w'(x) \geq 0$, 则可以得到:

$$0 \leq \sum_{x \in V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})} w'(x) = \sum_{x \in V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})} w(x) = -8,$$

矛盾. 从而定理 2 成立.

设 $x, y \in V(G^{\times}) \cup F(G^{\times})$, 用 $\tau(x \to y)$ 表示 x 转给 y 的权.

定义如下的权转移规则:

R1. 设 $d_{G^\times}(v)=2$. 则每个与 v 相关联的面给 v 转权 $\frac{1}{2}$ (重复的面按重数计算).

R2. 设 $d_{G^\times}(v)=k\geq 15$ 且 $uv\in E(G)$. 若 $d_{G^\times}(u)=2$, 则 $\tau(v\to u)=\frac{1}{2}$.

R3. 设 $d_{G^\times}(v)=k\geq 9$ 且 $uv\in E(G)$. 若 $d_{G^\times}(u)=3$, 则 $\tau(v\to u)=\frac{1}{3}$.

R4. 设 $d_{G^\times}(v)=k\geq 9$, f 是与 v 关联的面.

R4.1. 若 f 是 $(2,15^+,15^+)$-面, 则 $\tau(v\to f)=\frac{3}{4}$.

R4.2. 若 $d_{G^\times}(f)=3$ 且 f 既不是 $(2,15^+,15^+)$-面也不是假 $(4,8^-,9^+)$-面, 则 $\tau(v\to f)=\frac{1}{2}$.

R4.3. 若 f 是 $(2,15^+,4,15^+)$-面, 则 $\tau(v\to f)=\frac{1}{4}$.

R5. 设 f 是假 $(4,8^-,9^+)$-面, u,v 为 f 的 2 个对应点.

R5.1. 若 $d_{G^\times}(u)\geq 9$ 且 $d_{G^\times}(v)\geq 9$, 则 $\tau(u\to f)=\frac{1}{2}$ 且 $\tau(v\to f)=\frac{1}{2}$.

R5.2. 若 u,v 中只有一个 9^+-点, 不妨设为 u, 则 $\tau(u\to f)=1$.

R6. 设 f 是 $(4,2,15^+,3^+)$-面, u 为 f 的对应点. 若 $d_{G^\times}(u)\geq 15$, 则 $\tau(u\to f)=\frac{1}{2}$.

设 $f=v_0v_1\cdots v_{k-1}$ 是一个假 k-面. 令 v_0 是 v_1v_1' 与 v_kv_k' 的交叉点, 则称 v_1' 和 v_k' 为 f 的对应点, f 为 v_1' 或 v_k' 的对应面. 从而每个顶点至多有两个对应面.

断言8. 设 v 是 $G^\times$ 中的 9^+-点. 则 v 给对应面转权之和至多为 1.

证明 令 f_1 和 f_2 是 v 的两个对应面. 若 f_1 和 f_2 至少有一个假 4-面, 则由断言 7 知, 另一个面不是假 3-面. 从而由 R6 知, $\tau(v\to f_1)+\tau(v\to f_2)\leq\frac{1}{2}\times 2=1$. 下设 f_1, f_2 都为假 3-面, 若 f_1, f_2 中至多有一个假 $(4,8^-,9^+)$-面, 则由 R6 知, $\tau(v\to f_1)+\tau(v\to f_2)\leq 1$. 从而 f_1 和 f_2 皆为假 $(4,8^-,9^+)$-面. 令 $f_1=[x_1x_2y]$ 且 $f_2=[yx_2x_3]$, 其中 y 是 vx_2 与 x_1x_3 的交叉点. 若 $d_{G^\times}(x_1)\leq 8$, 则由断言 4 和断言 5 知, $d_{G^\times}(x_2)\geq 9$ 且 $d_{G^\times}(x_3)\geq 9$, 与f_2 是假 $(4,8^-,9^+)$-面矛盾. 故 $d_{G^\times}(x_1)\geq 9$. 由对称性, $d_{G^\times}(x_3)\geq 9$. 从而 $d_{G^\times}(x_2)\leq 8$. 由 R5 知, $\tau(v\to f_1)+\tau(v\to f_2)\leq\frac{1}{2}\times 2=1$. □

我们在引理 2 和引理 3 中分别证明 $\forall x\in V(G^\times)\cup F(G^\times)$, 有 $w'(x)\geq 0$.

引理2. 设 $f\in F(G^\times)$. 则 $w'(f)\geq 0$.

证明 设 $d_{G^\times}(f)=k$ 且令 $f=[x_0x_1x_2\cdots x_{k-1}]$.

情形 1 $k=3$.

则 $w(f)=-1$. 由断言 2-5 知, $n_{8^-}^{G^\times}(f)\leq 1$. 设 $n_2^{G^\times}(f)=1$, 不妨设 $d_{G^\times}(x_1)=2$. 由断言 6 知 f 不为假3-面. 由断言 3 知, $d_{G^\times}(x_0)\geq 15$ 且 $d_{G^\times}(x_2)\geq 15$. 由 R1 和 R4 知, $w'(f)\geq -1+\frac{3}{4}\times 2-\frac{1}{2}=0$. 设 $n_2^{G^\times}(f)=0$ 且 $n_{8^-}^{G^\times}(f)=1$. 不妨设 $3\leq d_{G^\times}(x_1)\leq 8$, 若 f 为真 3-面, 则由断言 4 知, $d_{G^\times}(x_0)\geq 9$ 且 $d_{G^\times}(x_2)\geq 9$. 由 R4 知, $w'(f)\geq -1+\frac{1}{2}\times 2=0$. 若 f 为假 3-面, 不妨设 x_0 为假点, 令 x_0 是 x_1x_1' 与 x_2x_2' 的交叉点. 则由断言 4 和断言 5 知, $d_{G^\times}(x_1')\geq 9$ 且 $d_{G^\times}(x_2)\geq 9$. 由 R5 知, $w'(f)\geq -1+\min\{1,\frac{1}{2}\times 2\}=0$. 设 $n_{8^-}^{G^\times}(f)=0$. 即 $n_{9^+}^{G^\times}(f)\geq 2$. 由 R4 知, $w'(f)\geq -1+\frac{1}{2}\times 2=0$.

情形 2 $k=4$.

由 G 不含 4-圈知, f 为假 4-面. 则 $w(f)=0$. 由断言 2, 断言 3, 及断言 6 知, $n_2^{G^\times}(f)\leq 1$. 设 $n_2^{G^\times}(f)=1$, 不妨设 $d_{G^\times}(x_1)=2$. 当 x_0 为假点, 即 x_0 是 x_1x_1' 与 x_3x_3' 的交叉点时, 由断言 3 知, $d_{G^\times}(x_1')\geq 15$. 由 R1 和 R4 知, $w'(f)\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$. 下设 x_3 为假点. 由断言 3 知, $d_{G^\times}(x_0)\geq 15$ 且 $d_{G^\times}(x_2)\geq 15$. 由 R1 和 R4 知, $w'(f)\geq\frac{1}{4}\times 2-\frac{1}{2}=0$. 故可设 $n_2^{G^\times}(f)=0$. 从而 $w'(f)=w(f)=0$.

情形 3 $k \geq 5$.

则 $w(f) = k-4$. 由断言 3 知, $n_2^{G^\times}(f) \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. 由 R1 知, $w'(f) \geq k-4-\frac{1}{2}\times\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. 当 $k=5$ 时, $w'(f) \geq 5-4-\frac{1}{2}\times 2 = 0$. 当 $k \geq 6$ 时, $w'(f) \geq k-4-\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2} \geq \frac{3}{4}k-4 \geq \frac{1}{2}$. □

引理3. 设 $v \in V(G^\times)$. 则 $w'(v) \geq 0$.

证明 设 $d_{G^\times}(v) = k$ 且令 $N_G(v) = \{v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}\}$.

情形 1 $2 \leq k \leq 8$.

当 $k=2$ 时. 由断言 3 知, $d_{G^\times}(v_i) \geq 15$, $i \in \{0,1\}$. 由 R1 和 R2 知, $w'(v) \geq 2-4+2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2} = 0$. 当 $k=3$ 时. 由断言 4 知, $d_{G^\times}(v_i) \geq 9$, $i \in \{0,1,2\}$. 由 R3 知, $w'(v) \geq 3-4+3\times\frac{1}{3} = 0$. 当 $4 \leq k \leq 8$ 时. 由权规则知, $w'(v) = w(f) = k-4 \geq 0$.

情形 2 $9 \leq k \leq 14$.

由断言 3 知, $n_2^G(v) = 0$. 设 $n_3^G(v) = t$.

先设顶点 v 关联 2 个假 3-面. 由断言 7 知, v 的对应面为 5^+-面. 由断言 7 知, $G^\times$ 中与顶点 v 关联的 3-面个数至多为 $\lceil \frac{k}{2} \rceil$. 由 R3-R6 知, $w'(v) \geq k-4-\frac{1}{3}t-\frac{1}{2}\cdot\lceil \frac{k}{2} \rceil$. 当 $t \leq k-3$ 时, $w'(v) \geq k-4-\frac{1}{3}(k-3)-\frac{1}{2}\times\frac{k+1}{2} = \frac{5}{12}k-\frac{13}{4} \geq \frac{1}{2}$. 当 $t \geq k-2$ 时, $G^\times$ 中与顶点 v 关联真 3-面及假 $(4,9^+,9^+)$-面个数至多为 3. $w'(v) \geq k-4-\frac{1}{3}k-\frac{1}{2}\times 3 \geq \frac{2}{3}k-\frac{11}{2} \geq \frac{1}{2}$.

设顶点 v 恰好关联 1 个假 3-面 f. 若 f 与真 3-面相邻, 由断言 7 知, v 的对应面中没有 3-面且至多有一个 4-面. 由断言 7 知, $G^\times$ 中与顶点 v 关联的 3-面个数至多为 $\lceil \frac{k}{2} \rceil$. 由 R3-R6 知, $w'(v) \geq k-4-\frac{1}{3}t-\frac{1}{2}\cdot\lceil \frac{k}{2} \rceil$. 类似前面分析可得 $w'(v) \geq \frac{1}{2}$. 若 f 不与真 3-面相邻, 由断言 7 知, $G^\times$ 中与顶点 v 关联的 3-面个数至多为 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. 由 R3-R6 和断言 8 知, $w'(v) \geq k-4-\frac{1}{3}t-\frac{1}{2}\cdot\lfloor \frac{k}{2} \rfloor-1$. 当 $t \leq k-3$ 时, $w'(v) \geq k-4-\frac{1}{3}(k-3)-\frac{1}{2}\cdot\lfloor \frac{k}{2} \rfloor-1 \geq 0$. 当 $t \geq k-2$ 时, $G^\times$ 中与顶点 v 关联真 3-面及假 $(4,9^+,9^+)$-面个数至多为 2. 由 R3-R6 知, $w'(v) \geq k-4-\frac{1}{3}k-\frac{1}{2}\times 2-1 = \frac{2}{3}k-6 \geq 0$.

最后设顶点 v 不与假 3-面关联, 由断言 7 知, $G^\times$ 中与顶点 v 关联的 3-面个数至多为 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. 由 R3-R6 和断言 8 知, $w'(v) \geq k-4-\frac{1}{3}t-\frac{1}{2}\cdot\lfloor \frac{k}{2} \rfloor-1$. 类似上面分析可得 $w'(v) \geq 0$.

情形 3 $k \geq 15$.

设 $n_{3^-}^G(v) = s$ 且 $n_{4^+}^G(v) = t$, $G^\times$ 中与顶点 v 关联的 $(2,15^+,15^+)$-面个数为 x. 则 $x \leq s$, $x \leq t$ 且 $2x \leq s+t = k$. $G^\times$ 中与顶点 v 关联的假 4^--面个数至多为 2. 由断言 4 和断言 5 知, $G^\times$ 中与顶点 v 关联的真 3-面个数至多为 t. 先设顶点 v 关联 2 个假 3-面. 由断言 7 知, v 的对应面为 5^+-面. 由 R2-R6 知, $w'(v) \geq k-4-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}(t-x)-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\times 2 = k-\frac{1}{2}(s+t)-\frac{1}{4}x-5 \geq \frac{3}{8}k-5 \geq \frac{5}{8}$. 再设顶点 v 恰好关联 1 个假 3-面 f. 若 f 与真 3-面相邻, 由断言 7 知, 顶点 v 不与假 4-面关联, v 的对应面中没有 3-面且至多只有一个 4- 面. 由 R2-R6 知, $w'(v) \geq k-4-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}(t-x)-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \geq \frac{3}{8}k-5 \geq \frac{5}{8}$. 若 f 不与真 3-面相邻, 由断言 7 知, 顶点 v 不与假 4-面关联. 由 R3-R6 和断言 8 知, $w'(v) \geq k-4-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}(t-x)-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}-1 \geq \frac{3}{8}k-\frac{11}{2} \geq \frac{1}{8}$. 最后设顶点 v 不与假 3-面关联. 由 R3-R6 和断言 8 知, $w'(v) \geq k-4-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}(t-x)-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\times 2-1 \geq \frac{3}{8}k-\frac{11}{2} \geq \frac{1}{8}$. □

参考文献

[1] Zhang, Z., Liu, L. and Wang, J. (2002) Adjacent Strong Edge Coloring of Graphs. *Applied Mathematics Letters*, **15**, 623-626. https://doi.org/10.1016/s0893-9659(02)80015-5

[2] Akbari, S., Bidkhori, H. and Nosrati, N. (2006) R-Strong Edge Colorings of Graphs. *Discrete Mathematics*, **306**, 3005-3010. https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.12.027

[3] Wang, Y., Wang, W. and Huo, J. (2015) Some Bounds on the Neighbor-Distinguishing Index of Graphs. *Discrete Mathematics*, **338**, 2006-2013. https://doi.org/10.1016/j.disc.2015.05.007

[4] Vučković, B. (2017) Edge-Partitions of Graphs and Their Neighbor-Distinguishing Index. *Discrete Mathematics*, **340**, 3092-3096. https://doi.org/10.1016/j.disc.2017.07.005

[5] Joret, G. and Lochet, W. (2020) Progress on the Adjacent Vertex Distinguishing Edge Coloring Conjecture. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **34**, 2221-2238. https://doi.org/10.1137/18m1200427

[6] Huang, D., Cai, H., Wang, W. and Huo, J. (2023) Neighbor-Distinguishing Indices of Planar Graphs with Maximum Degree Ten. *Discrete Applied Mathematics*, **329**, 49-60. https://doi.org/10.1016/j.dam.2022.12.023

[7] Huo, J., Li, M. and Wang, Y. (2022) A Characterization for the Neighbor-Distinguishing Index of Planar Graphs. *Symmetry*, **14**, Article 1289. https://doi.org/10.3390/sym14071289

[8] Zhu, E., Wang, Z. and Zhang, Z. (2009) On the Smarandachely Adjacent Vertex Edge Coloring of Some Double Graphs. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, **44**, 25-29.

[9] Gu, J., Wang, W., Wang, Y. and Wang, Y. (2020) Strict Neighbor-Distinguishing Index of Subcubic Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **37**, 355-368. https://doi.org/10.1007/s00373-020-02246-w

[10] 刘信生, 刘旺发. 图的Smarandachely邻点无圈边色数的一个上界[J]. 系统科学与数学, 2013, 33(5): 550-554.

[11] Przybyło, J. and Kwaśny, J. (2020) On the Inclusion Chromatic Index of a Graph. *Journal of Graph Theory*, **97**, 5-20. https://doi.org/10.1002/jgt.22636

[12] Wang, W., Jing, P., Gu, J. and Wang, Y. (2023) Local Neighbor-Distinguishing Index of Graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **46**, Article No. 83. https://doi.org/10.1007/s40840-023-01474-6

[13] 井普宁. 图的严格邻点可区别边染色及区间边染色[D]: [博士学位论文]. 金华: 浙江师范大学, 2023.