Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(4), 927-943
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.144217

三维不可压缩黏弹性流体Green函数的逐点估计

罗一帆，白一格*

太原理工大学数学学院，山西 晋中

收稿日期：2025年3月28日；录用日期：2025年4月23日；发布日期：2025年4月29日

摘 要

在本文中，我们研究三维不可压黏弹性流体的柯西问题。首先我们引入合适的变量变换然后研究变化后方程组的线性系统的Green函数。然后，我们应用复分析的方法得到在有限马赫数区域内关于Green 函数更精确的逐点估计。最后我们获得关于方程组解的线性部分的更精确的逐点估计。

关键词

逐点估计，Green函数，黏弹性流体

The Pointwise Estimate of the Green Function for 3-D Incompressible Viscoelastic Fluids

Yifan Luo, Yige Bai*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Mar. 28th, 2025; accepted: Apr. 23rd, 2025; published: Apr. 29th, 2025

* 通讯作者。

文章引用: 罗一帆, 白一格. 三维不可压缩黏弹性流体Green函数的逐点估计[J]. 应用数学进展, 2025, 14(4): 927-943.
DOI: 10.12677/aam.2025.144217

Abstract

In this paper, we investigate the Cauchy problem of the 3-D incompressible viscoelastic flow. Fisrt, we introduce suitable variable transformations and then investigate the Green's function of the linearized system for the transformed equations. Then, we apply complex analytic methods to obtain more precise pointwise estimates of the Green's function in finite Mach number region. Finally, we obtain more accurate pointwise estimates for the linear component of the solution.

Keywords

Pointwise Estimate, Green's Function, Viscoelastic Fluids

1. 引言

在本文中，我们研究以下三维不可压黏弹流

$$\begin{cases} \nabla \cdot v = 0, \\ v_t + v \cdot \nabla v + \nabla P = \mu \Delta v + \nabla \cdot (FF^\top), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ F_t + v \cdot \nabla F = \nabla v F, \\ (v, F) \mid_{t=0} = (v_0, F_0), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$v(t,x) \in \mathbb{R}^3$ 和$P(t,x) \in \mathbb{R}^3$ 代表了速度和压强，$\mu(> 0)$ 是粘性系数，$F(t,x) \in M^{3\times3}$是变形张量。

系统(1.1) 用来描述三维不可压黏弹流体的行为。近年来不可压缩黏弹流体的数学理论取得重要进展，参见 [1–9]。在 [2]中，Chen 和Zhang 证明了小初值条件下解的存在性和唯一性。Shibata [8] 研究线性黏弹流柯西问题解的$L^p - L^q$ 估计。在 [1]中，Bai 和Zhang 研究了系统(1.1) 解的估计

$$(1+t)^{-2}(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}} + (1+t)^{-2}(1+\frac{|x|^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}), \tag{1.2}$$

其中第一项代表广义惠更斯波，第二项代表扩散波。

对于可压缩黏弹流体，Hu 和Wang [10]已经证明了强解的存在性和局部唯一性。Hu-Wang [11]和Qian-Zhang [12] 证明了方程解在Besov空间中的全局存在性。Hu-Wu [13]，Jia-Peng-Mei [14]和Wei-Li-Yao [15] 得到了解的最优衰减率。Pan-Xu [16] 和Ishigaki [17]研究了在L^p 空间中强解的时间衰减估计. 之后，Bai 和Zhang [18] 获得了三维可压黏弹流的整体解的逐点估计。

在可压缩N-S方程解的逐点估计中，Hoff 和Zumbrun [19] 研究N-S方程的Green函数的衰减估计。Liu [20]应用了Green函数的方法得到了N-S方程在奇数维空间下解的逐点估计。

本文我们将利用Green函数的方法研究三维不可压黏弹流体。然而，因为此系统的Green函数难以直接计算，我们利用变量变换 [21]转化原方程组。我们的方法启发于 [22–24]，他们通过复分析的方法得到了一个关于N-S方程的Green函数更精确的逐点估计。在本文中，我们最后获得了一个不同于(1.2)的估计，从多项式型的结果转化为一个指数型的结果。

在本文中我们引入以下记号，

$$(\nabla v)^{ij} = \partial_j v^i, \quad (\nabla vF)_{ij} = \partial_k v^i F^{kj}, \quad (divF)^i = \partial_k F^{ik}.$$

令$E := F - I$，系统(1.1) 可转化成以下形式，

$$\begin{cases} \nabla \cdot v = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ v_t^i + v \cdot \nabla v^i + \nabla_i P = \mu \Delta v^i + E^{jk} \nabla_j E^{ik} + \nabla_j E^{ij}, \\ E_t + v \cdot \nabla E = \nabla v E + \nabla v, \\ (v, E)\mid_{t=0} = (v_0, E_0). \end{cases} \tag{1.3}$$

通过 [2,4]，我们假设初值条件满足以下条件：

$$\nabla \cdot v_0 = 0, \quad det(I + E_0) = 1, \quad \nabla \cdot E_0^\top = 0, \tag{1.4}$$

$$\nabla_m E_0^{kj} - \nabla_j E_0^{km} = E_0^{lj} \nabla_l E_0^{km} - E_0^{lm} \nabla_l E_0^{kj}, \tag{1.5}$$

接着 [2,4] 证明了解满足以下条件

$$\nabla \cdot v = 0, \quad det(I + E) = 1, \quad \nabla \cdot E^\top = 0, \tag{1.6}$$

$$\nabla_m E^{kj} - \nabla_j E^{km} = E^{lj} \nabla_l E^{km} - E^{lm} \nabla_l E^{kj}. \tag{1.7}$$

为了方便后续的计算，我们需要引入一些变量变换：

$$d^{kj} = -\Lambda^{-1} \nabla_j v^k, \quad v^k = \Lambda^{-1} \nabla_j d^{kj}, \tag{1.8}$$

其中

$$\Lambda^s f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \hat{f}),$$

$$\hat{f} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} (i\xi)^\alpha f(x,t) e^{ix\cdot\xi} dx, \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi,t) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

结合(1.6) 和(1.7)，系统(1.3) 可简化成以下形式

$$\begin{cases} d_t^{kj} - \mu\Delta d^{kj} - \Lambda E^{kj} = F_1^{kj}, \\ E_t^{kj} + \Lambda d^{kj} = F_2^{kj}, \end{cases} \tag{1.9}$$

其中

$$F_1^{kj} = \Lambda^{-1}\nabla_j\nabla_l(\delta^{km} + \nabla_k\Lambda^{-2}\nabla_m)(v^l v^m - E^{lq}E^{mq}) + \Lambda^{-1}\nabla_m\nabla_l(E^{lj}E^{km} - E^{lm}E^{kj})$$

和

$$F_2^{kj} = -\nabla_l(v^l E^{kj}) + \nabla_l(v^k E^{lj}).$$

通过直接计算可得系统(1.9)的Green矩阵的傅里叶变换后的$\hat{G}$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_+ e^{\lambda_+ t} - \lambda_- e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} I_{3\times3} & |\xi|(\frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-}) I_{3\times3} \\ -|\xi|(\frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-}) I_{3\times3} & -\frac{\lambda_- e^{\lambda_+ t} - \lambda_+ e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} I_{3\times3} \end{bmatrix}, \tag{1.10}$$

其中

$$\lambda_\pm = \frac{-\mu|\xi|^2 \pm \sqrt{\mu^2|\xi|^4 - 4|\xi|^2}}{2}. \tag{1.11}$$

为了后续计算的便利，Green矩阵可以表示成以下形式，

$$\hat{G} = e^{\lambda_+ t} P_1 + e^{\lambda_- t} P_2, \tag{1.12}$$

其中

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-} I_{3\times3} & \frac{|\xi|}{\lambda_+ - \lambda_-} I_{3\times3} \\ -\frac{|\xi|}{\lambda_+ - \lambda_-} I_{3\times3} & -\frac{\lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-} I_{3\times3} \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-} I_{3\times3} & -\frac{|\xi|}{\lambda_+ - \lambda_-} I_{3\times3} \\ \frac{|\xi|}{\lambda_+ - \lambda_-} I_{3\times3} & \frac{\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-} I_{3\times3} \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

通过傅里叶逆变换，我们得到了Green函数的显示表达式，

$$D_x^\alpha G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} (i\xi)^\alpha \hat{G}(\xi,t) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

在第二部分中，我们将给出在有限马赫数区域下($|x| \le (M+1)ct$) Green函数解的逐点估计，其中M 足够大且c代表声速。我们将利用长短波分解和复分析的方法，将Green函数分解成三部分。$|\xi|$很小时代表长波，$|\xi|$很大时代表短波，$|\xi|$ 中等时代表中波。

$$\begin{aligned} D_x^\alpha G(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^3}(\int_{|\xi|<\varepsilon} + \int_{\varepsilon<|\xi|<N} + \int_{|\xi|>N})(i\xi)^\alpha \hat{G}(\xi,t) e^{ix\cdot\xi} d\xi \\ &:= D_x^\alpha G_L(x,t) + D_x^\alpha G_M(x,t) + D_x^\alpha G_S(x,t). \end{aligned} \tag{1.14}$$

通过计算并耦合这三部分的解，本文得到了以下成果，

定理1.1. 当$t>0, |x|\le (M+1)ct$时，M 是一个足够大的常数，那么对于任意一个多重指标α 都存在一个正常数C 满足

$$|D_x^\alpha(G-G_{S_1})|\le C(1+t)^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}e^{-\frac{(|x|-t)^2}{C(t+1)}}+Ce^{-t/C}, \tag{1.15}$$

其中$G_{S_1}=Ce^{-\frac{1}{\mu}t}\sum_{|\gamma|\le 1}D_x^\gamma(f_1(x)+f_2(x)+C_0\delta(x))$ 是Green函数短波部分中的奇异部分，

$$|D_x^\alpha f_1(x)|\le Ce^{-\frac{x^2}{Ct}},\quad ||f_2(\cdot)||_{L^1}\le C,\quad suppf_2(x)\subset\{x,|x|<\eta_0\},\eta_0\ll 1.$$

接下来，我们将解分成线性和非线性的两部分，

$$(v,E)=(\overline{v},\overline{E})+(\tilde{v},\tilde{E}),$$

其中$(\overline{v},\overline{E})$ 将在第三部分中给出具体形式。

定理1.2. 假设$v_0, F_0-I\in H^6(\mathbb{R}^3)$ 满足*(1.3)* 和*(1.4)*。接着我们假设

$$||v_0||_{H^6(\mathbb{R}^3)}+||F_0-I||_{H^6(\mathbb{R}^3)}\le\varepsilon_0,$$

$$|D_x^\alpha(v_0,F_0-I)|\le\varepsilon_0(1+|x|^2)^{-\frac{5}{2}},\quad |\alpha|\le 1, \tag{1.16}$$

其中ε_0 足够小. 那么则存在系统（*1.1*）的唯一的整体古典解(F,v)，满足*(1.5)*，*(1.6)*，$(F-I,v)\in L^\infty([0,\infty);H^6(\mathbb{R}^3))$ 和$\nabla v\in L^2([0,\infty);H^6(\mathbb{R}^3))$. 接着我们在有限马赫数区域内对线性部分$(\overline{v},\overline{E})$有如下估计

$$|D_x^\alpha(\overline{v},\overline{E})|\le C\varepsilon_0((1+t)^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}+e^{-t/c}(1+\frac{|x|^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}),\quad |\alpha|\le 1, \tag{1.17}$$

其中C 是一个正常数，ε_0 足够小。

2. Green函数的逐点估计

在这个部分中，我们将在有限马赫数区域内估计系统(1.2)的Green矩阵。有限马赫数区域即$|x|\le(M+1)ct$，其中常数M 足够大。

首先我们需要引入一些命题和引理来帮助我们证明定理1.1.

将(1.11)用泰勒展开，我们可以发现关于$\lambda_\pm$的一些性质

引理2.1. 对于一个足够小的数$\varepsilon>0$ 和一个足够大的数$N>0$,我们有如下结果,

(i) 当$|\xi|<\varepsilon$时, $\lambda_\pm$ 有以下的展开式,

$$\lambda_+=-\frac{1}{2}\mu|\xi|^2+i(|\xi|+\sum_{j=2}^\infty a_j^+|\xi|^{2j-1}),$$

$$\lambda_-=-\frac{1}{2}\mu|\xi|^2-i(|\xi|+\sum_{j=2}^\infty a_j^-|\xi|^{2j-1}),$$

(ii) 当$\varepsilon < |\xi| < N$时，$\lambda_{\pm}$ 有以下的性质，

$$Re(\lambda_{\pm}) \le -C|\xi|^2,$$

*(iii)*当$|\xi| > N$时，$\lambda_{\pm}$ 有以下的展开式，

$$\lambda_{+} = -\frac{1}{\mu} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{+}|\xi|^{-2j},$$

$$\lambda_{-} = \frac{1}{\mu} - |\xi|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{-}|\xi|^{-2j},$$

其中$a_j^{\pm}, b_j^{\pm}, C$ 都是实常数.

经过直接的计算，我们可以得到关于P_1, P_2的估计。

引理2.2. 对于一个足够小的$|\xi|$，我们得到了关于P_1, P_2的估计.

$$P_1 + P_2 = I_{6\times 6}, \quad P_1 - P_2 = \begin{bmatrix} iO(|\xi|)_{3\times 3} & -iO(1)_{3\times 3} \\ iO(1)_{3\times 3} & -iO(|\xi|)_{3\times 3} \end{bmatrix}.$$

这里$O(|\xi|)$ 是一个可解析函数.

接下来的引理则是对于三维波动方程的Kirchhoff 公式。

引理2.3. [23] $w(x,t)$ 是一个由其三维傅里叶变换给定的一个函数，

$$\hat{w} = \frac{sin(|\xi|t)}{|\xi|}, \quad \hat{w}_t = cos(|\xi|t).$$

那么，对于任意一个函数$g(x)$，它满足

$$w * g(x) = \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} g(x+ty)dS_y, w_t * g(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{|y|=1} g(x+ty)dS_y + \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} \nabla g(x+ty)\cdot y dS_y.$$

引理2.4. [20] 令$\widetilde{E}^{\mu}(x,t) = e^{-|x|^2/\mu t}$，那么

$$|\int_{|y|=1} \widetilde{E}^{\mu}(x+cty,t)y^{\alpha}dS_y| \le Ct^{-1}e^{-(|x|-ct)^2/3\mu t}.$$

2.1. 长波估计

在这个部分中，我们将使用复分析的技术，估计Green矩阵的长波部分(当$|\xi|$足够小时)在有限马赫数区域内的情况。在对$\hat{G}$的长波部分利用傅里叶逆变换之前，我们给出(1.12)的欧拉公式的展开形式，

$$
\begin{aligned}
(i\xi)^\alpha \hat{G} &= (i\xi)^\alpha e^{-\frac{1}{2}\mu|\xi|^2 t}(e^{i|\xi|(1+\beta(|\xi|^2))t}P_1 + e^{-i|\xi|(1+\beta(|\xi|^2))t}P_2) \\
&= (i\xi)^\alpha cos(|\xi|t)e^{-\frac{1}{2}\mu|\xi|^2 t}(cos(|\xi|\beta(|\xi|^2)t)(P_1+P_2) + isin(|\xi|\beta(|\xi|^2)t)(P_1-P_2)) \\
&\quad + \frac{sin(|\xi|t)}{|\xi|}e^{-\frac{1}{2}\mu|\xi|^2 t}(-|\xi|sin(|\xi|\beta(|\xi|^2)t)(P_1+P_2) + i|\xi|cos(|\xi|\beta(|\xi|^2)t)(P_1-P_2)),
\end{aligned}
$$

其中$\beta(|\xi|^2)$ 是关于$|\xi|^2$的可解析函数。

结合傅里叶逆变换和引理2.3，我们得到

$$
D_x^\alpha G_L(x,t) = w_t * K_1 + w * K_2, \tag{2.1}
$$

其中

$$
K_1 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{|\xi|<\varepsilon}(i\xi)^\alpha e^{ix\cdot\xi}e^{-\frac{1}{2}\mu|\xi|^2 t}(cos(|\xi|\beta(|\xi|^2)t)(P_1+P_2) + isin(|\xi|\beta(|\xi|^2)t)(P_1-P_2))d\xi,
$$

$$
K_2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{|\xi|<\varepsilon}(i\xi)^\alpha e^{ix\cdot\xi}e^{-\frac{1}{2}\mu|\xi|^2 t}(-|\xi|sin(|\xi|\beta(|\xi|^2)t)(P_1+P_2) + i|\xi|cos(|\xi|\beta(|\xi|^2)t)(P_1-P_2))d\xi,
$$

$$
\hat{w} = \frac{sin(|\xi|t)}{|\xi|}, \quad \hat{w_t} = cos(|\xi|t).
$$

通过计算和分析，我们发现ξ^α项会导致时间衰减项$(1+t)^{-|\alpha|/2}$，所以我们只考虑$|\alpha|=0$时的情况。事实上，当$|\alpha|=0$时，

$$
K_1 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{|\xi|<\varepsilon}e^{ix\cdot\xi}e^{-\frac{1}{2}\mu|\xi|^2 t}(cos(|\xi|\beta(|\xi|^2)t)(P_1+P_2) + isin(|\xi|\beta(|\xi|^2)t)(P_1-P_2))d\xi =: K_1^*.
$$

引理2.5. K_1^* 有如下估计,

$$
K_1^* \le C\frac{e^{-\frac{|x|^2}{C(1+t)}}}{(1+t)^{3/2}} + Ce^{-t/C}.
$$

证明. 利用引理2.2可直接计算得到

$$
|P_1+P_2|, |P_1-P_2| \le O(1),
$$

$$
|cos(|\xi|\beta(|\xi|^2)t)(P_1+P_2) + isin(|\xi|\beta(|\xi|^2t)(P_1-P_2)| \le Ce^{O(1)|\xi|^3 t},
$$

那么可以得到

$$
|K_1^*| \le C\int_{|\xi|<\alpha}|e^{i\xi\cdot x}e^{-\frac{1}{2}\mu|\xi|^2 t + O(1)|\xi|^3 t}|d\xi.
$$

接下来我们利用复分析的方法估计$|K_1^*|$。
令$\mathbb{B} = [-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}]\times[-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}]\times[-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}]$, 那么有

$$
|K_1^*| \le C\int_{\mathbb{B}}|e^{i\xi\cdot x}e^{-\frac{1}{2}\mu|\xi|^2 t + O(1)|\xi|^3 t}|d\xi + C\int_{\{|\xi|\le\varepsilon\}\cap\mathbb{B}^c}|e^{i\xi\cdot x}e^{-\frac{1}{2}\mu|\xi|^2 t + O(1)|\xi|^3 t}|d\xi. \tag{2.2}
$$

事实上，对于每一个$x\in\mathbb{R}^3$, 都存在一个依赖于x的正交矩阵Q 使得$Qx = (|x|,0,0)^\top$. 接着我们

令$\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^\top:=Q\xi$. 那么可以得到

$$|K_1^*|\leq CI_1+CI_2, \tag{2.3}$$

其中

$$I_1=\int_{\mathbb{B}}|e^{i|x|\eta_1}e^{-\frac{1}{2}\mu|\eta|^2(t+1)+O(1)|\eta|^3(t+1)}|d\eta,$$

$$I_2=\int_{\{|\xi|\leq\varepsilon\}\cap\mathbb{B}^c}|e^{i|x|\eta_1}e^{-\frac{1}{2}\mu|\eta|^2(t+1)+O(1)|\eta|^3(t+1)}|d\eta.$$

接下来我们先考虑I_2, 因为$|\eta|\geq\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$ 在I_2的积分区域下恒成立，那么可以得到

$$|e^{-\frac{1}{2}\mu|\eta|^2(t+1)+O(1)|\eta|^3(t+1)}|=O(1)e^{-\varepsilon^2t/C}.$$

所以

$$I_2=O(1)e^{-\varepsilon^2t/C}. \tag{2.4}$$

接着我们估计I_1,

$$\begin{aligned}I_1&\leq C\int_{\frac{-\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}\int_{\frac{-\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}\int_{\frac{-\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}|e^{i|x|\eta_1}e^{-\frac{1}{2}\mu|\eta|^2(t+1)+O(1)|\eta|^3(t+1)}|d\eta_1d\eta_2d\eta_3\\&\leq C\int_{\frac{-\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}\int_{\frac{-\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}|e^{-\frac{1}{2}\mu(\eta_2^2+\eta_3^2)(t+1)+O(1)(\eta_2^3+\eta_3^3)(1+t)}|d\eta_2d\eta_3\\&\quad\times\int_{\frac{-\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}|e^{i|x|\eta_1}e^{-\frac{1}{2}\mu\eta_1^2(t+1)+O(1)\eta_1^3(1+t)}|d\eta_1.\end{aligned} \tag{2.5}$$

接下来，我们将通过转换积分区域从$\mathbb{R}$ 到$\mathbb{R}+\sigma i$来对I_1进行估计。我们选择边界$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4$,

$$\Gamma_1=\{z:Imz=0,|Rez|\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\},\Gamma_2=\{z:Rez=\frac{-\varepsilon}{\sqrt{3}},0\leq Imz\leq\sigma\},$$

$$\Gamma_3=\{z:Imz=\sigma,|Rez|\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\},\Gamma_4=\{z:Rez=\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},0\leq Imz\leq\sigma\},$$

其中$\sigma=\varepsilon_1\frac{|x|}{t+1}$ 且$\varepsilon_1\leq\varepsilon$. 根据Cauchy-Gourast 定理，我们可以得到I_1中被积函数沿边界的积分结果，

$$0=\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4}|e^{i|x|\eta_i}e^{-\frac{1}{2}\mu\eta_i^2(t+1)+O(1)\eta_i^3(t+1)}|d\eta_i.$$

所以我们只需要计算沿着路径Γ_2,Γ_3 和Γ_4的积分就可以得到沿着路径Γ_1的积分。那么我们考虑$I_0=\int_{\frac{-\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}|e^{i|x|\eta_1}e^{-\frac{1}{2}\mu\eta_1^2(t+1)+O(1)\eta_1^3(t+1)}|d\eta_1$. 记$\eta_1=\gamma+\zeta i,\gamma,\zeta\in R$, 那么

$$I_0:=\int_{\Gamma_1}|e^{i|x|\eta_1}e^{-\frac{1}{2}\mu\eta_1^2(t+1)+O(1)\eta_1^3(t+1)}|d\eta_1.$$

DOI: 10.12677/aam.2025.144217

沿着路径Γ_2, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_2} |e^{i|x|\eta_1} e^{-\frac{1}{2}\mu\eta_1^2(t+1)+O(1)\eta_1^3(t+1)}|d\eta_1 \\
&\le C\int_0^{\varepsilon_1\frac{|x|}{t+1}} |e^{i|x|(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{3}}+\zeta i)} e^{-\frac{1}{2}\mu(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{3}}+\zeta i)^2(t+1)+O(1)(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{3}}+\zeta i)^3(t+1)}|d\zeta \\
&\le Ce^{-\frac{1}{6}\mu\varepsilon^2(t+1)} \int_0^{\varepsilon_1\frac{|x|}{t+1}} |e^{-(\zeta|x|+\frac{1}{2}\mu\zeta^2(t+1)+O(1)\varepsilon_1^3(\frac{|x|}{t+1})^3)(t+1))}|d\zeta \\
&\le Ce^{-t/C}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

沿着路径Γ_3, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_3} |e^{i|x|\eta_1} e^{-\frac{1}{2}\mu\eta_1^2(t+1)+O(1)\eta_1^3(t+1)}|d\eta_1 \\
&= \int_{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}} |e^{i|x|(\gamma+\varepsilon_1\frac{|x|}{t+1}i)} e^{-\frac{1}{2}\mu(\gamma+\varepsilon_1\frac{|x|}{t+1}i)^2(t+1)+O(1)(\gamma+\varepsilon_1\frac{|x|}{t+1}i)^3(t+1)}|d\gamma \\
&\le Ce^{-\varepsilon_1\frac{|x|^2}{t+1}+\frac{1}{2}\mu\varepsilon_1^2\frac{|x|^2}{t+1}} \int_{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}} |e^{-\frac{1}{2}\mu\gamma^2(t+1)+O(1)(\gamma+i\varepsilon_1\frac{|x|}{t+1})^3(t+1)}|d\gamma \\
&\le C\frac{e^{-\frac{|x|^2}{C(1+t)}}}{\sqrt{(1+t)}}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

沿着路径Γ_4 的估计和Γ_2类似, 那么

$$\int_{\Gamma_4} |e^{i|x|\eta_1} e^{-\frac{1}{2}\mu\eta_1^2(t+1)+O(1)\eta_1^3(t+1)}|d\eta_1 \le Ce^{-t/C}. \tag{2.8}$$

结合(2.6), (2.7) 和(2.8), 我们有

$$I_0 \le C\frac{e^{-\frac{|x|^2}{C(1+t)}}}{(1+t)^{1/2}} + Ce^{-t/C}.$$

继续计算(2.5), 我们有

$$I_1 \le C(1+t)^{-1/2}(1+t)^{-1/2}I_0 \le C\frac{e^{-\frac{|x|^2}{C(1+t)}}}{(1+t)^{3/2}} + Ce^{-t/C}.$$

所以我们从I_1 , I_2 和(2.3)得到如下

$$K_1^* \le C\frac{e^{-\frac{|x|^2}{C(1+t)}}}{(1+t)^{3/2}} + Ce^{-t/C}.$$

□

关于K_1, K_2 和∇K_1 的估计类似于引理2.5, 我们可以得到

$$K_1 \leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{C(t+1)}}}{(1+t)^{3/2}} + Ce^{-t/C},$$

$$K_2 \leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{C(t+1)}}}{(1+t)^{2}} + Ce^{-t/C},$$

$$\nabla K_1 \leq C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{C(t+1)}}}{(1+t)^{2}} + Ce^{-t/C}.$$

这里K_2 和∇K_1的估计与K_1不同是由于显示表达式中K_2 和∇K_1的$|\xi|$的次数更高。

利用引理2.3 和引理2.4, 我们有

$$|w * K_2| = |\frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} K_2(x+ty)dS_y| \leq C(1+t)^{-\frac{4+|\alpha|}{2}} e^{-\frac{(|x|-t)^2}{C(t+1)}} + Ce^{-t/C},$$

$$|w_t * K_1| \leq \frac{1}{4\pi}\int_{|y|=1} |K_1(x+ty)|dS_y + \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} |\nabla K_1(x+ty)\cdot y|dS_y$$

$$\leq C(1+t)^{-\frac{5+|\alpha|}{2}} e^{-\frac{(|x|-t)^2}{C(t+1)}} + C(1+t)^{-\frac{4+|\alpha|}{2}} e^{-\frac{(|x|-t)^2}{C(t+1)}} + Ce^{-t/C}.$$

最后，结合(2.1)我们得到以下估计,

$$|D_x^\alpha G_L| \leq C(1+t)^{-\frac{4+|\alpha|}{2}} e^{-\frac{(|x|-t)^2}{C(t+1)}} + Ce^{-t/C}. \tag{2.9}$$

2.2. 中部估计

在这部分中, 我们将对Green矩阵G的中频部分在有限马赫数区域内进行逐点估计。

命题2.6. 对于$\varepsilon < |\xi| < N$, 其中ε 足够小, $N > 0$, 那么对于任一给定的多重指标α 存在一个正常数C 满足

$$|D_x^\alpha G_M| \leq C(1+t)^{-\frac{3+|\alpha|}{2}} e^{-t/C}.$$

证明. 通过傅里叶逆变换公式可得,

$$\begin{aligned}
|D_x^\alpha G_M(x,t)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^3}|\int_{\varepsilon<|\xi|<N} e^{ix\cdot\xi}\xi^\alpha \hat{G} d\xi| \\
&\leq C\int_{\varepsilon<|\xi|<N} e^{-c\varepsilon^2 t}\xi^\alpha e^{-c|\xi|^2 t} d\xi \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{3+|\alpha|}{2}} e^{-t/C}.
\end{aligned}$$

□

2.3. 短波估计

在这个部分中，我们将估计在$|\xi|$足够大时，Green矩阵G在有限马赫数区域内的情况。

我们需要以下引理来便于我们后续的计算证明。

引理2.7. [25] *(i) 如果*$supp\hat{f}(\xi) \subset O_N = \{\xi, |\xi| \geq N > 0\}$*, 且*$\hat{f}(\xi)$ *满足*

$$|D_\xi^\beta \hat{f}(\xi)| \leq C|\xi|^{-1-\beta},$$

那么则存在广义函数$f_1(x)$ *和*$f_2(x)$ *及一个常数*C_0 *满足*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + C_0\delta(x),$$

其中$\delta(x)$ *是Dirac 函数. 进一步, 对于任意的*$|\alpha| \geq 0$*, 我们有*

$$|D_x^\alpha f_1(x)| \leq Ce^{-\frac{x^2}{Ct}}, \quad ||f_2(\cdot)||_{L^1} \leq C, \quad suppf_2(x) \subset \{x, |x| < \eta_0\},$$

其中η_0 *足够小.*
(ii) 更多地, 如果$\hat{f}(\xi)$ *满足*$|D_\xi^\beta \hat{f}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\beta}$*, 那么则存在广义函数*$f_1(x)$ *和*$f_2(x)$ *及一个常数*C_0 *满足*

$$f(x) = \sum_{|\gamma|\leq 1} D_x^\gamma (f_1(x) + f_2(x) + C_0\delta(x)),$$

且对于任意的$|\alpha| \geq 0$*,*

$$|D_x^\alpha f_1(x)| \leq Ce^{-\frac{x^2}{Ct}}, \quad ||f_2(\cdot)||_{L^1} \leq C, \quad suppf_2(x) \subset \{x, |x| < 2\eta_0\}.$$

命题2.8. 存在常数C使得短波部分有如下估计,

$$|D_x^\alpha (G_S - G_{S_1})| \leq C(1+t)^{-\frac{3+|\alpha|}{2}} e^{-t/C} + e^{-t/C}.$$

证明. 对于一个足够大的数$N > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} G_S &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|\xi|\geq N} \hat{G} e^{i\xi x} d\xi \\ &\leq C \int_{|\xi|\geq N} (e^{-\frac{1}{\mu}t + O(|\xi|^{-2})t} P_1 + e^{\frac{1}{\mu}t - |\xi|^2 t + O(|\xi|^{-2})t} P_2) e^{i\xi x} d\xi. \end{aligned} \tag{2.10}$$

(2.10)式的右边第一项可以有以下估计,

$$\begin{aligned} G_{S_1}(x,t) :&= |\int_{|\xi|\geq N} e^{-\frac{1}{\mu}t + O(|\xi|^{-2})t} P_1 e^{i\xi x} d\xi| \\ &\leq |\int_{|\xi|\geq N} e^{-\frac{1}{\mu}t} P_1 e^{i\xi x} d\xi| + |\int_{|\xi|\geq N} e^{-\frac{1}{\mu}t} (e^{O(|\xi|^{-2})t} - 1) P_1 e^{i\xi x} d\xi|. \end{aligned} \tag{2.11}$$

利用(1.13)计算, 我们有

$$P_1=\begin{bmatrix} O(|\xi|^{-2})_{3\times 3} & O(|\xi|^{-2})_{3\times 3} \\ -O(|\xi|^{-2})_{3\times 3} & 1+O(|\xi|^{-2})_{3\times 3} \end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix} 1+O(|\xi|^{-2})_{3\times 3} & -O(|\xi|^{-2})_{3\times 3} \\ O(|\xi|^{-2})_{3\times 3} & O(|\xi|^{-2})_{3\times 3} \end{bmatrix}.$$

结合引理2.7, 我们有

$$\begin{aligned} &|\int_{|\xi|\geq N} e^{-\frac{1}{\mu}t}P_1 e^{i\xi x}d\xi| = e^{-\frac{1}{\mu}t}|\int_{|\xi|\geq N} P_1 e^{i\xi x}d\xi| \\ &\leq Ce^{-\frac{1}{\mu}t}\sum_{|\gamma|\leq 1} D_x^{\gamma}(f_1(x)+f_2(x)+C_0\delta(x))+Ce^{-\frac{1}{\mu}t}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

且

$$\begin{aligned} &|\int_{|\xi|\geq N} e^{-\frac{1}{\mu}t}(e^{O(|\xi|^{-2})t}-1)P_1 e^{i\xi x}d\xi| \\ &\leq O(1)te^{-\frac{1}{\mu}t}\int_{|\xi|\geq N}|O(|\xi|^{-2})|d\xi \leq Ce^{-\frac{1}{\mu}t}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

接着我们估计(2.10)式右边的第二项，根据(2.10) 和(2.11) 可以得到,

$$\begin{aligned} |D_x^{\alpha}(G_S-G_{S_1})| \leq &|\int_{|\xi|\geq N}(i\xi)^{\alpha}e^{\frac{1}{\mu}t-|\xi|^2t+O(|\xi|^{-2})t}P_2e^{i\xi x}d\xi| \\ \leq &C\int_{|\xi|\geq N}e^{-t/c}\frac{e^{-C|\xi|^2t}}{(1+t)^{|\alpha|/2}}d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{3+|\alpha|}{2}}e^{-t/C}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

因此, 将(2.11), (2.12) 和(2.13)相加，命题证明完毕. □

至此，根据(1.14), (2.9), 命题2.5 和命题2.7,我们得到了Green矩阵在有限马赫数区域内的逐点估计，即证明完毕定理1.1。

3. 线性系统解的逐点估计

在这一部分中，我们将研究在有限马赫数区域下系统(1.2)解的线性部分的逐点估计。

在估计系统(1.2)解之前，我们需要参考文献 [2]中的定理，其证明了系统(1.1)解的全局存在性和唯一性。

定理3.1. *[2] 假设$v_0\in H^6(\mathbb{R}^3), F_0-I\in H^6(\mathbb{R}^3)$ 满足(1.3)和(1.4). 进一步我们假设*

$$||v_0||_{H^6(\mathbb{R}^3)}+||F_0-I||_{H^6(\mathbb{R}^3)}\leq \varepsilon_0,$$

其中ε_0 足够小. 那么则存在一个系统（1.1）的唯一的全局古典解(F,v)，满足(1.5) 和(1.6). 同时, $(F-I,v)\in L^{\infty}([0,\infty);H^6(\mathbb{R}^3)), \nabla v\in L^2([0,\infty);H^6(\mathbb{R}^3))$,

$$||(F-I,v)||_{L^{\infty}([0,\infty);H^6(\mathbb{R}^3))}+||\nabla v||_{L^2([0,\infty);H^6(\mathbb{R}^3)}\leq C\varepsilon_0.$$

根据$Sobolev$嵌入定理，我们有

$$||\nabla^{\alpha}(F-I,v)||_{L^{\infty}([0,\infty);L^{\infty}(\mathbb{R}^3))}\leq C\varepsilon_0,\quad \forall|\alpha|\leq 4. \tag{3.1}$$

在证明定理1.2之前，我们需要以下引理。

引理3.1. [23] 对于一个正常数$c\geq 1$ 并且如果$A^2\leq c(1+t)$，那么

$$1\leq (1+c)^n(1+\frac{A^2}{1+t})^{-n}. \tag{3.2}$$

对于$0\leq s\leq t$，若$A^2\geq c(1+t)$，则有

$$(1+\frac{A^2}{1+s})^{-n}\leq 3^n(\frac{1+s}{1+t})^n(1+\frac{A^2}{1+t})^{-n}. \tag{3.3}$$

对于$N\geq n/2$ 且任意的正常数a和b，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+\frac{(|y|-a)^2}{b})^{-N}dy\leq C(b^{n/2}+b^{1/2}a^{n-1}). \tag{3.4}$$

根据Duhamel's原则，我们将(2.2)的解记作以下形式

$$\begin{pmatrix} d\\ E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} G_{11}I_{3\times 3} & G_{12}I_{3\times 3}\\ G_{21}I_{3\times 3} & G_{22}I_{3\times 3}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix} d_0\\ E_0\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix} G_{11}I_{3\times 3} & G_{12}I_{3\times 3}\\ G_{21}I_{3\times 3} & G_{22}I_{3\times 3}\end{pmatrix}(\cdot,t-s)*\begin{pmatrix} F_1\\ F_2\end{pmatrix}(\cdot,s)ds, \tag{3.5}$$

其中$*$ 代表关于空间的卷积. 结合(2.1)，我们可以分别写出v^k 和$E^{kj}(k,j=1,2,3)$ 的表达式，

$$\begin{aligned}
v^k=&(\mathcal{F}^{-1}(\frac{\lambda_+e^{\lambda_+t}-\lambda_-e^{\lambda^-t}}{\lambda_+-\lambda_-}))*v_0^k+(\mathcal{F}^{-1}(i\xi^j\frac{e^{\lambda_+t}-e^{\lambda^-t}}{\lambda_+-\lambda_-}))*E_0^{kj}\\
&-\int_0^t(\delta^{mk}+\Lambda^{-2}\nabla_m\nabla_k)(\mathcal{F}^{-1}(\frac{\lambda_+e^{\lambda_+t}-\lambda_-e^{\lambda^-t}}{\lambda_+-\lambda_-}))(\cdot,t-s)*\nabla_l(v^lv^m-E^{lr}E^{mr})(\cdot,s)ds\\
&+\int_0^t(\mathcal{F}^{-1}(i\xi^j|\xi|^{-2}\frac{\lambda_+e^{\lambda_+t}-\lambda_-e^{\lambda^-t}}{\lambda_+-\lambda_-}))(\cdot,t-s)*\nabla_r\nabla_l(E^{lj}E^{kr}-E^{lr}E^{kj})(\cdot,s)ds\\
&+\int_0^t(\mathcal{F}^{-1}(i\xi^j\frac{e^{\lambda_+t}-e^{\lambda^-t}}{\lambda_+-\lambda_-}))(\cdot,t-s)*(\nabla_r(v^kE^{rj})-\nabla_l(v^lE^{kj}))(\cdot,s)ds
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
E^{kj}=&(\mathcal{F}^{-1}(i\xi^j\frac{e^{\lambda_+t}-e^{\lambda^-t}}{\lambda_+-\lambda_-}))*v_0^k+(\mathcal{F}^{-1}(-\frac{\lambda_-e^{\lambda_+t}-\lambda_+e^{\lambda^-t}}{\lambda_+-\lambda_-}))*E_0^{kj}\\
&+\int_0^t(\delta^{mk}+\Lambda^{-2}\nabla_m\nabla_k)(\mathcal{F}^{-1}(-i\xi^j\frac{e^{\lambda_+t}-e^{\lambda^-t}}{\lambda_+-\lambda_-}))(\cdot,t-s)*\nabla_l(v^lv^m-E^{lr}E^{mr})(\cdot,s)ds\\
&+\int_0^t(\mathcal{F}^{-1}(-\frac{e^{\lambda_+t}-e^{\lambda^-t}}{\lambda_+-\lambda_-}))(\cdot,t-s)*\nabla_r\nabla_l(E^{lj}E^{kr}-E^{lr}E^{kj})(\cdot,s)ds\\
&+\int_0^t(\mathcal{F}^{-1}(-\frac{\lambda_-e^{\lambda_+t}-\lambda_+e^{\lambda^-t}}{\lambda_+-\lambda_-}))(\cdot,t-s)*(\nabla_r(v^kE^{rj})-\nabla_l(v^lE^{kj}))(\cdot,s)ds.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

接着我们估计(3.3)和(3.4)中的线性部分$\overline{v}(x,t)$ 和$\overline{E}(x,t)$，

$$\overline{v}^k =(\mathcal{F}^{-1}(\frac{\lambda_+ e^{\lambda_+ t}-\lambda_- e^{\lambda^- t}}{\lambda_+-\lambda_-}))*v_0^k+(\mathcal{F}^{-1}(i\xi^j\frac{e^{\lambda_+ t}-e^{\lambda^- t}}{\lambda_+-\lambda_-}))*E_0^{kj}=: R_1+R_2 \tag{3.8}$$

同时

$$\overline{E}^{kj} =(\mathcal{F}^{-1}(i\xi^j\frac{e^{\lambda_+ t}-e^{\lambda^- t}}{\lambda_+-\lambda_-}))*v_0^k+(\mathcal{F}^{-1}(-\frac{\lambda_- e^{\lambda_+ t}-\lambda_+ e^{\lambda^- t}}{\lambda_+-\lambda_-}))*E_0^{kj}. \tag{3.9}$$

我们从(1.16)和(3.8)可得

$$|D_x^\alpha R_1|\le |D_x^\alpha G*(v_0,E_0)|\le |D_x^\alpha (G-G_{S_1})*(v_0,E_0)|+|D_x^\alpha G_{S_1}*(v_0,E_0)|.$$

当$|x|\le (M+1)ct$ 且$|\alpha|\le 1$时, 类似于 [22]中的证明, 从引理3.2中我们可以得到

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha (G-G_{S_1})*(v_0,E_0)| &\le C\varepsilon_0 t^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(|x-y|-t)^2}{C(t+1)}}(1+|y|)^{-\frac{5}{2}}dy\\ &\le C\varepsilon_0((1+t)^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}+e^{-t/c}(1+\frac{|x|^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}).\end{aligned} \tag{3.10}$$

并且, 根据参考文献 [22], 我们有

$$|D_x^\alpha G_{S_1}*(v_0,E_0)|\le C\varepsilon_0 e^{-t/c}(1+\frac{|x|^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}},\quad |\alpha|\le 1. \tag{3.11}$$

因此我们得到

$$|D_x^\alpha R_1|\le C\varepsilon_0((1+t)^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}+e^{-t/c}(1+\frac{|x|^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}),\quad |\alpha|\le 1. \tag{3.12}$$

关于R_2 和$\overline{E}^{kj}$ 的估计也类似于R_1,

$$|D_x^\alpha R_2|\le C\varepsilon_0((1+t)^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}+e^{-t/c}(1+\frac{|x|^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}),\quad |\alpha|\le 1, \tag{3.13}$$

$$|D_x^\alpha \overline{E}^{kj}|\le C\varepsilon_0((1+t)^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}+e^{-t/c}(1+\frac{|x|^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}),\quad |\alpha|\le 1. \tag{3.14}$$

所以当$|x|\le (M+1)ct$时，我们从(3.8), (3.12), (3.13) 和(3.14)中得到了以下估计

$$|D_x^\alpha \overline{v}^k|+|D_x^\alpha \overline{E}^{kj}|\le C\varepsilon_0((1+t)^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}+e^{-t/c}(1+\frac{|x|^2}{1+t})^{-\frac{3}{2}}),\quad |\alpha|\le 1. \tag{3.15}$$

至此定理1.2证毕。

致　谢

在此特别感谢赵兴鹏老师的讨论指导。

基金项目

山西省基础研究计划项目(202103021223058)。

参考文献

[1] 白一格, 张挺. 三维不可压缩黏弹性流体系统解的逐点估计[J]. 中国科学: 数学, 2021, 51(6): 881-898.

[2] Chen, Y. and Zhang, P. (2006) The Global Existence of Small Solutions to the Incompressible Viscoelastic Fluid System in 2 and 3 Space Dimensions. *Communications in Partial Differential Equations*, **31**, 1793-1810. https://doi.org/10.1080/03605300600858960

[3] Fang, D., Zhang, T. and Zi, R. (2018) Dispersive Effects of the Incompressible Viscoelastic Fluids. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **38**, 5261-5295. https://doi.org/10.3934/dcds.2018233

[4] Lei, Z., Liu, C. and Zhou, Y. (2007) Global Solutions for Incompressible Viscoelastic Fluids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **188**, 371-398. https://doi.org/10.1007/s00205-007-0089-x

[5] Lin, F., Liu, C. and Zhang, P. (2005) On Hydrodynamics of Viscoelastic Fluids. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **58**, 1437-1471. https://doi.org/10.1002/cpa.20074

[6] Lin, F. and Zhang, P. (2007) On the InitialValue Problem of the Incompressible Viscoelastic Fluid System. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **61**, 539-558. https://doi.org/10.1002/cpa.20219

[7] Qian, J. (2010) Well-Posedness in Critical Spaces for Incompressible Viscoelastic Fluid System. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **72**, 3222-3234. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.12.022

[8] Shibata, Y. (2000) On the Rate of Decay of Solutions to Linear Viscoelastic Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **23**, 203-226. https://doi.org/10.1002/(sici)1099-1476(200002)23:3⟨203::aid-mma111⟩3.0.co;2-m

[9] Zhang, T. and Fang, D. (2012) Global Existence of Strong Solution for Equations Related to the Incompressible Viscoelastic Fluids in the Critical L^p Framework. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **44**, 2266-2288. https://doi.org/10.1137/110851742

[10] Hu, X. and Wang, D. (2010) Local Strong Solution to the Compressible Viscoelastic Flow with Large Data. *Journal of Differential Equations*, **249**, 1179-1198. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.03.027

[11] Hu, X. and Wang, D. (2011) Global Existence for the Multi-Dimensional Compressible Viscoelastic Flows. *Journal of Differential Equations*, **250**, 1200-1231. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.10.017

[12] Qian, J. and Zhang, Z. (2010) Global Well-Posedness for Compressible Viscoelastic Fluids near Equilibrium. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **198**, 835-868. https://doi.org/10.1007/s00205-010-0351-5

[13] Hu, X. and Wu, G. (2013) Global Existence and Optimal Decay Rates for Three-Dimensional Compressible Viscoelastic Flows. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **45**, 2815-2833. https://doi.org/10.1137/120892350

[14] Jia, J., Peng, J. and Mei, Z. (2014) Well-Posedness and Time-Decay for Compressible Viscoelastic Fluids in Critical Besov Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **418**, 638-675. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.04.008

[15] Wei, W., Li, Y. and Yao, Z. (2016) Decay of the Compressible Viscoelastic Flows. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **15**, 1603-1624. https://doi.org/10.3934/cpaa.2016004

[16] Pan, X. and Xu, J. (2019) Global Existence and Optimal Decay Estimates of the Compressible Viscoelastic Flows in L^p Critical Spaces. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **39**, 2021-2057. https://doi.org/10.3934/dcds.2019085

[17] Ishigaki, Y. (2020) Diffusion Wave Phenomena and L^p Decay Estimates of Solutions of Compressible Viscoelastic System. *Journal of Differential Equations*, **269**, 11195-11230. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.07.020

[18] Bai, Y. and Zhang, T. (2023) The Pointwise Estimates of Solutions for the 3D Compressible Viscoelastic Fluids. *Journal of Differential Equations*, **356**, 336-374. https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.01.048

[19] Hoff, D. and Zumbrun, K. (1997) Pointwise Decay Estimates for Multidimensional Navier-Stokes Diffusion Waves. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **48**, 597-614. https://doi.org/10.1007/s000330050049

[20] Liu, T. and Wang, W. (1998) The Pointwise Estimates of Diffusion Wave for the Navier-Stokes Systems in Odd Multi-Dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, **196**, 145-173. https://doi.org/10.1007/s002200050418

[21] Zhang, T. (2014) Global Strong Solutions for Equations Related to the Incompressible Viscoelastic Fluids with a Class of Large Initial Data. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **100**, 59-77. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.01.014

[22] Du, L. and Wu, Z. (2017) Solving the Non-Isentropic Navier-Stokes Equations in Odd Space Dimensions: The Green Function Method. *Journal of Mathematical Physics*, **58**, Article 101506. https://doi.org/10.1063/1.5005915

[23] Liu, T. and Noh, S.E. (2015) Wave Propagation for the Compressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, **12**, 385-445. https://doi.org/10.1142/s0219891615500113

[24] Liu, T.-P. and Yu, S. (2006) Green's Function of Boltzmann Equation, 3-D Waves. *Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica*, **1**, 1-78.

[25] Wang, W. and Yang, T. (2001) The Pointwise Estimates of Solutions for Euler Equations with Damping in Multi-Dimensions. *Journal of Differential Equations*, **173**, 410-450. https://doi.org/10.1006/jdeq.2000.3937