

基于拟似然方法的随机热方程参数估计

盖子若, 杨晗璐, 闫理坦*

东华大学数学与统计学院, 上海

收稿日期: 2025 年 3 月 10 日; 录用日期: 2025 年 4 月 3 日; 发布日期: 2025 年 4 月 14 日

摘要

本文中, 我们研究了时空白噪声驱动的随机热方程的参数估计问题。在固定某一时间点的情况下, 我们假设空间过程可以离散观测, 使用拟似然方法给出了扩散参数的估计量。另外, 我们基于马列万分析得到了估计量的渐进行为。

关键词

随机热方程, 时空白噪声, 马列万分析, 拟似然, 参数估计

Parameter Estimation for the Stochastic Heat Equation Based on the Quasi-Likelihood Method

Ziruo Gai, Hanlu Yang, Litan Yan*

School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: Mar. 10th, 2025; accepted: Apr. 3rd, 2025; published: Apr. 14th, 2025

* 通讯作者。

Abstract

In this paper, we investigate the parameter estimation problem of the stochastic heat equation driven by space-time white noise. Under the assumption that the spatial process can be discretely observed at a fixed time point, we use the quasi-likelihood method to provide an estimator for the diffusion parameter. Additionally, we derive the asymptotic behavior of the estimator based on Malliavin calculus.

Keywords

Stochastic Heat Equation, Space-Time White Noise, Malliavin Calculus, Quasi-Likelihood, Parameter Estimation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 随机热方程的统计推断引起人们的极大兴趣, 许多学者已经研究了各类随机热方程的参数估计问题, 主要使用了基于半群的 p -变分方法, 以及基于变分的最小二乘法 and 极大似然方法. 有关 p -变分方法, 可参考 Cialenco [1], I. Cialenco 及 Y. Huang [2], Torres [3], Gamain, Julie 及 Ciprian [4] 等文献; 关于最小二乘法, 可以参考文献 [5]; 关于极大似然方法, 可参考 Cialenco [6], Markussen [7].

在本文中, 我们尝试利用拟似然方法研究以下随机热方程的参数估计问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + \sqrt{\theta} \dot{W}(t, x), & t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子, $\dot{W}$ 是时空白噪声, $\theta > 0$ 是一个未知参数.

假设空间过程 $x \mapsto u(\cdot, x)$ 可以在离散空间点 $\{x_j = \frac{j}{n}(b-a), j = 1, 2, \dots, n\}$ (其中 $-\infty < a < b < \infty$) 上被观测. 记 $\eta_j = u(t, x_j) - u(t, x_{j-1})$, 其中 $x \in \mathbb{R}$ 且 $t > 0$. 由 η_j , 我们得到参数 θ 的

拟似然函数:

$$L(\theta) := \prod_{j=1}^n f_{\eta_j}(\eta_j) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi B(j)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 B(j)} (\eta_j)^2 \right\},$$

其中 $f_X(\cdot)$ 表示随机变量 X 的密度函数, $B(j) = E[\eta_j^2]$ 。利用

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0,$$

可得到参数 θ 的估计量 $\tilde{\theta}_n$:

$$\tilde{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^2}{B(j)}. \quad (1.2)$$

我们对该估计量收敛性和误差过程的稳定性主要结果如下:

- 估计量 $\tilde{\theta}_n$ 是一致的无偏估计量。
- n 趋于无穷时, 有

$$\sqrt{n} (\tilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, 2(b-a)\sigma^4).$$

2. 预备知识

本节我们将简要描述与下述高斯过程 $u(t, x)$ 相关的随机微积分。

$$u(t, x) = \sqrt{\theta} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-r, x-y) W(dr, dy), \quad t \geq 0,$$

其中 $x \in \mathbb{R}$ 且 $t \geq 0$, $G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ 为热核。于是, 我们有

$$E[u(t, x)u(s, y)] = \frac{\theta}{2\pi} \int_0^{t \wedge s} \frac{1}{\sqrt{t+s-2z}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t+s-2z)}} dz \quad (2.1)$$

对所有 $s, t \geq 0$ 和 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立。我们知道 u 为方程(1.1)的适定解。更多细节可以参见 Alós 等人 [8], Nualart [9] 及其参考文献。

在下文中, 我们将空间过程记为:

$$u^t = \{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}.$$

(2.1)中取 $t = s$, 于是, 对于每个 $t > 0$ 及 $x, y \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$\begin{aligned} R_t(x, y) &= Eu(t, x)u(t, y) \\ &= \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-z)}} \frac{dz}{\sqrt{2t-2z}} = \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(x-y)^2}{4z}} \frac{dz}{\sqrt{z}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

此外, 通过分部积分和 Pospisil 以及 Tribe 的研究 [10], 我们得到

$$\begin{aligned} R_t(x, y) &= Eu(t, x)u(t, y) \\ &= \theta \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - \frac{1}{2}\theta|x-y| + \frac{1}{2}\theta|x-y|\operatorname{erf}\left(\frac{|x-y|}{2\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

对所有 $t > 0$ 和 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立。其中, erf 表示误差函数, 其定义为:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-v^2} dv, \quad z \geq 0.$$

也就是说, 空间过程 $u^t = \{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}$ 是一个双分数布朗运动, 其指数为 $H = \frac{1}{2}$, $K = \frac{1}{2}$ 。此外, 我们知道空间过程 $u^t = \{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}$ 既不是半鞅也不是马尔可夫过程。通常, 我们假设 $\mathcal{H}_t$ 是与 $u^t = \{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}$ 相关的再生核希尔伯特空间。于是, Wiener 积分

$$u^t(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)u(t, dy), \quad \varphi \in \mathcal{H}_t$$

作为一个高斯随机变量存在, 并且

$$E\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(y)u(t, dy) \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(y)u(t, dy)\right) = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{H}_t}$$

对于 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_t$ 成立。显然, 对于 $x, y \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\langle 1_{[0,x]}, 1_{[0,y]} \rangle_{\mathcal{H}_t} = E(u(t, x)u(t, y)) = \theta \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - \frac{1}{2}\theta|x-y| + \frac{1}{2}\theta|x-y|\operatorname{erf}\left(\frac{|x-y|}{2\sqrt{t}}\right).$$

记 $\mathcal{S}_t$ 为形式如下的光滑泛函集合

$$F = f(u^t(\varphi_1), u^t(\varphi_2), \dots, u^t(\varphi_n)),$$

其中 $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (f 及其所有导数有界), $\varphi_i \in \mathcal{H}_t$ 。上述形式泛函 F 的导数算子 D^t (Malliavin 导数) 定义为

$$D^t F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(u^t(\varphi_1), u^t(\varphi_2), \dots, u^t(\varphi_n)) \varphi_j.$$

导数算子 D_t 是从 $L^2(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega; \mathcal{H}_t)$ 的可闭算子。我们用 $\mathbb{D}^{1,2}$ 表示 $\mathcal{S}_t$ 在范数

$$\|F\|_{1,2} := \sqrt{E|F|^2 + E\|D^t F\|_{\mathcal{H}_t}^2}.$$

下的闭包。散度积分 δ^t 是导数算子 D_t 的伴随算子。如果

$$E |\langle D_t F, v \rangle_{\mathcal{H}_t}| \leq c \|F\|_{L^2(\Omega)}$$

对所有 $F \in \mathcal{S}_t$ 成立, 我们称随机变量 $v \in L^2(\Omega; \mathcal{H}_t)$ 属于散度算子 δ^t 的定义域, 记为 $\text{Dom}(\delta^t)$ 。在这种情况下, $\delta^t(v)$ 由对偶关系定义

$$E [F \delta^t(v)] = E \langle D_t F, v \rangle_{\mathcal{H}_t} \quad (2.4)$$

对任意 $v \in \mathbb{D}^{1,2}$ 成立。我们有 $\mathbb{D}^{1,2} \subset \text{Dom}(\delta^t)$ 。我们将使用记号

$$\delta^t(v) = \int_0^X v_y u(t, dy)$$

来表示 Skorohod 积分, 且不定 Skorohod 积分定义为

$$\int_0^t v_y u(t, dy) = \delta^t(v 1_{[0,t]}).$$

我们还可以引入关于空间过程 $u^t = \{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}$ 的 $p \geq 1$ 阶多重积分 $I_p^t(f)$, 如下所示:

$$I_p^t(f) = \int_{[0,X]^p} f(x_1, x_2, \dots, x_p) u(t, dx_1) u(t, dx_2) \cdots u(t, dx_p), \quad f \in \mathcal{H}_t^{\otimes p}.$$

该多重积分的等距可以表示为

$$E [I_p^t(f) I_q^t(g)] = \begin{cases} n! \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_t^{\otimes p}}, & p = q, \\ 0, & p \neq q, \end{cases}$$

其中 p, q 为正整数。特别地, 我们有

$$E \left(|I_p^t(f)|^2 \right) = p! \|f\|_{\mathcal{H}_t^{\otimes p}}^2. \quad (2.5)$$

我们将需要计算如下任意 p, q 阶对称积分的维纳混沌积分的一般公式:

$$I_p^t(f) I_q^t(g) = \sum_{r=0}^{p \wedge q} r! \binom{p}{r} \binom{q}{r} I_k(f \otimes_r g),$$

其中 $k = p + q - 2r$, $f \otimes_r g$ 为 $\mathcal{H}_t^{\otimes(p+q-2r)}$ 中的元素, 定义如下:

$$\begin{aligned} f \otimes_r g(s_1, \dots, s_{p-r}, t_1, \dots, t_{q-r}) \\ = \int_{[0,X]^k} f(t_1, \dots, t_r, x_1, \dots, x_{p-r}) g(t_1, \dots, t_r, y_1, \dots, y_{q-r}) dt_1 dt_2 \dots dt_r. \end{aligned}$$

3. 参数估计

本节中, 我们考虑在固定时间点 t 上通过空间采样估计参数 θ , 该时间点 t 在有界域 $D = [0, T]$ 上。假设 $u^t = \{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}$ 在满足以下条件 (C) 的一些离散空间点 $\{x_i = a + ih, i = 1, 2, \dots, n\}$ 上被观测:

(C) $h \downarrow 0$ 且 $n \rightarrow \infty$ 时, $nh = b - a$ 。

记

$$\eta_i = u(t, x_i) - u(t, x_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t \in D,$$

则零均值高斯随机变量 η_i 满足:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\eta_i) &= E(\eta_i^2) = E(u(t, x_i) - u(t, x_{i-1}))^2 \\ &= 2\theta\sqrt{\frac{t}{\pi}}(1 - e^{-\frac{h^2}{4t}}) + \theta h - \theta h \operatorname{erf}\left(\frac{h}{2\sqrt{t}}\right) \\ &= \theta \left(h + 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{k!(2k-1)(4t)^k} \right) \\ &\equiv \theta\psi(h), \end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$ 。于是, 我们得到对数似然函数

$$\log L(\theta) = \frac{n}{2} \log(2\pi\psi(h)) - \frac{n}{2} \log(\theta) - \frac{\sum \eta_i^2}{2\psi(h)\theta}.$$

并由

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} = 0,$$

得到 θ 的拟似然估计量:

$$\tilde{\theta}_n = \frac{\sum \eta_i^2}{n\psi(h)} = \frac{\sum \eta_i^2}{n(h + 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{k!(2k-1)(4t)^k})}.$$

下面我们将研究该估计量, 证明其相合性并研究其渐进行为。

3.1. 估计量的收敛性

下面的定理给出了我们上述所得拟似然估计量的收敛性, 我们将证明其为弱相合的, 换言之, 即对于 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{\theta}_n - \theta \geq \varepsilon) = 0.$$

定理 3.1. 设 u 为方程(1.1)的适定解, 并假设空间过程 $u^t = \{u(t, x), x \in [0, X]\}$ 在某些离散

空间点 $\{x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ 上被观测, 其满足条件 (C)。则拟似然估计量

$$\tilde{\theta}_n = \frac{\sum \eta_i^2}{n\psi(h)}$$

是弱相合的, 并且为无偏估计量。

引理 3.1. 记

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{k!(4t)^k} (2(j-i)^{2k} - (j-i-1)^{2k} - (j-i+1)^{2k}), \\ \tau_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(2k+1)} \left(\frac{h}{2\sqrt{t}}\right)^{2k+1} (2(j-i)^{2k+2} - (j-i-1)^{2k+2} - (j-i+1)^{2k+2}),\end{aligned}$$

则 n 趋于无穷时, 有:

$$\sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \tau_1 = n(n-1)O(h^4),$$

$$\sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \tau_1^2 = n(n-1)O(h^8),$$

$$\sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \tau_2 = n(n-1)O(h^4),$$

$$\sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \tau_2^2 = n(n-1)O(h^8).$$

引理 3.1 的证明. 利用均值定理, 我们可得, $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \tau_1 &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{k!(4t)^k} (2(j-i)^{2k} - (j-i-1)^{2k} - (j-i+1)^{2k}) \\ &\sim n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{k!(4t)^k} (2(n-i)^{2k} - (n-i-1)^{2k} - (n-i+1)^{2k}) \\ &\sim n(n-1) \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{k!(4t)^k} (2-4^k) \\ &= n(n-1)O(h^4),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \tau_1^2 &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{k!(4t)^k} (2(j-i)^{2k} - (j-i-1)^{2k} - (j-i+1)^{2k}) \right\}^2 \\
 &\sim n \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{k!(4t)^k} (2(n-i)^{2k} - (n-i-1)^{2k} - (n-i+1)^{2k}) \right\}^2 \\
 &\sim n(n-1) \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{k!(4t)^k} (2-4k^2) \right\}^2 \\
 &= n(n-1)O(h^8).
 \end{aligned}$$

利用与上述证明类似的方法, 我们能够得到

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \tau_2 &= n(n-1)O(h^4), \\
 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \tau_2^2 &= n(n-1)O(h^8).
 \end{aligned}$$

并由此得到了引理结论。 $\square$

引理 3.2. 记 $J_3 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E\eta_i \eta_j)^2$, 则 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$J_3 = \frac{n(n-1)}{8t\pi} h^4 \theta^2 + n(n-1)O(h^6).$$

引理 3.2 的证明. 将引理 3.1 的结果应用于以下计算过程中, 我们有:

$$\begin{aligned}
 J_3 &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \{E(u(t, x_j) - u(t, x_{j-1}))(u(t, x_i) - u(t, x_{i-1}))\}^2 \\
 &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \left\{ \theta \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(2e^{-\frac{1}{4}(j-i)^2 h^2} - e^{-\frac{1}{4}(j-i-1)^2 h^2} - e^{-\frac{1}{4}(j-i+1)^2 h^2} \right) + \frac{1}{2} \theta h \left[2(j-i) \operatorname{erf} \left(\frac{(j-i)h}{2\sqrt{t}} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \theta h \left[(j-i-1) \operatorname{erf} \left(\frac{(j-i-1)h}{2\sqrt{t}} \right) + (j-i+1) \operatorname{erf} \left(\frac{(j-i+1)h}{2\sqrt{t}} \right) \right] \right\}^2 \\
 &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \left[-\frac{h^2 \theta}{2\sqrt{t\pi}} + \theta \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{k!(4t)^k} (2(j-i)^{2k} - (j-i-1)^{2k} - (j-i+1)^{2k}) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\theta h}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(2k+1)} \left(\frac{h}{2\sqrt{t}} \right)^{2k+1} (2(j-i)^{2k+2} - (j-i-1)^{2k+2} - (j-i+1)^{2k+2}) \right) \right]^2 \\
 &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \left(-\frac{h^2 \theta}{2\sqrt{t\pi}} + \theta \sqrt{\frac{t}{\pi}} \tau_1 + \frac{\theta h}{\sqrt{\pi}} \tau_2 \right)^2 \\
 &= \frac{n(n-1)}{8t\pi} h^4 \theta^2 + n(n-1)O(h^6).
 \end{aligned}$$

$\square$

定理 3.1 的证明. 无偏性的说明是简单的. 显然,

$$E(\tilde{\theta}_n - \theta) = \frac{\sum E\eta_i^2}{n\psi(h)} - \theta = 0,$$

这也就是说, 估计量 $\tilde{\theta}_n$ 是无偏的. 进一步, 为了研究相合性, 我们需要证明在条件 (C) 下, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$E(\tilde{\theta}_n - \theta)^2 \rightarrow 0.$$

我们首先计算 $E(\tilde{\theta}_n)^2$.

$$\begin{aligned} E(\tilde{\theta}_n)^2 &= E\left(\frac{\sum \eta_i^2}{n\psi(h)}\right)^2 = \frac{1}{n^2\psi(h)^2} E\left(\sum_{i=1}^n \eta_i^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2\psi(h)^2} E\left(\sum_{i=1}^n \eta_i^4 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \eta_i^2 \eta_j^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2\psi(h)^2} \left(\sum_{i=1}^n E\eta_i^4 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E\eta_i^2 \eta_j^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2\psi(h)^2} (J_1 + 2J_2), \end{aligned}$$

其中

$$J_1 = \sum_{i=1}^n E\eta_i^4 = \sum_{i=1}^n 3(E\eta_i^2)^2,$$

且

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} E\eta_i^2 \eta_j^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} [E\eta_i^2 E\eta_j^2 + 2(E\eta_i \eta_j)^2] \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \theta^2 \psi(h)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E\eta_i \eta_j)^2 \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \theta^2 \psi(h)^2 + 2J_3. \end{aligned}$$

由引理 3.2, 我们得到

$$\begin{aligned} E(\tilde{\theta}_n)^2 &= \frac{1}{n^2\psi(h)^2} (3n\theta^2\psi(h)^2 + n(n-1)\theta^2\psi(h)^2 + \frac{n(n-1)}{2t\pi} h^4\theta^2 + n(n-1)O(h^6)) \\ &= \left(1 + \frac{2}{n}\right)\theta^2 + \frac{n-1}{2nt\pi\psi(h)^2} h^4\theta^2 + \frac{n-1}{n\psi(h)^2} O(h^6), \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} \psi(h) &= h - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} h^2 + O(h^4), \\ \psi(h)^2 &= h^2 - \frac{1}{4\pi t} h^4 + O(h^5). \end{aligned}$$

进一步, $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\tilde{\theta}_n - \theta)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} \theta^2 + \frac{n-1}{2nt\pi\psi(h)^2} h^4 \theta^2 + \frac{n-1}{n\psi(h)^2} O(h^6) \right) = 0,$$

并由此证明了相合性。 $\square$

3.2. 估计量误差过程的稳定性

在下面的讨论中, 我们考虑估计量 $\hat{\theta}_n$ 误差分布的渐进分布。我们将证明, 样本量趋于无穷大时, 拟似然估计量误差的极限分布受到噪声的影响被控制为正态性, 也就是说, 误差的极限分布依概率收敛于一正态分布。我们引入 Kolmogorov 距离:

$$d_{\text{Kol}}(X, Y) = \sup_{z \in \mathbb{R}} |P(X \leq z) - P(Y \leq z)|.$$

Kolmogorov 距离将在下文中用于衡量估计量误差过程与正态分布之间的距离。我们知道, d_{Kol} 有以下结论: 如果 F 的累积分布函数是连续的, 则 F_n 依分布收敛于 F 当且仅当 n 趋于无穷时,

$$d_{\text{Kol}}(F_n, F) \rightarrow 0.$$

为此, 我们引入下面的引理。该引理为 Nourdin 及 Peccati [11] 的结果 (另见 [11] 中的定理 5.2.6)。

引理 3.3. 设 $I_p(f)$ 是关于空间过程 $u^t = \{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}$ 的 $p \geq 1$ 阶多重积分, 且满足 $E[I_p(f)^2] = \sigma^2$ 非零且有限。则对于所有 $x \in \mathbb{R}$, 有:

$$d_{\text{Kol}}(I_p(f), N(0, \sigma^2)) \leq C \sqrt{\text{Var}(\|DI_p(f)\|_{\mathcal{H}_t}^2)},$$

其中 $\mathcal{H}_t$ 是空间过程 $u^t = \{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}$ 的再生核希尔伯特空间。

定理 3.2. 设定理 3.1 的条件成立。则当 n 趋于无穷大时, $\tilde{\theta}_n$ 的误差过程 $\tilde{\theta}_n - \theta$ 满足:

$$n^{\frac{1}{2}}(\tilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, 2\theta^2).$$

证明. 记

$$\hat{\Psi}_n = n^{\frac{1}{2}}(\tilde{\theta}_n - E\tilde{\theta}_n),$$

其中 $n \geq 1$ 。则

$$n^{\frac{1}{2}}(\tilde{\theta}_n - \theta) = \hat{\Psi}_n + n^{\frac{1}{2}}(E\tilde{\theta}_n - \theta).$$

由定理 3.1 的证明可知,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\Psi}_n^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} nE(\tilde{\theta}_n - E\tilde{\theta}_n)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{2}{n} \theta^2 = 2\theta^2. \end{aligned}$$

另一方面, 对于 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_n &= n^{-\frac{1}{2}}\psi(h)^{-1} \sum_{i=1}^n \left[(u(t, x_i) - u(t, x_{i-1}))^2 - E(u(t, x_i) - u(t, x_{i-1}))^2 \right] \\ &= n^{-\frac{1}{2}}\psi(h)^{-1} \sum_{i=1}^n \left[I_1(1_{[x_{i-1}, x_i]})I_1(1_{[x_{i-1}, x_i]}) - E(u(t, x_i) - u(t, x_{i-1}))^2 \right] \\ &= n^{-\frac{1}{2}}\psi(h)^{-1} \sum_{i=1}^n I_2(1_{[x_{i-1}, x_i]}^{\otimes 2}) \\ &= n^{-\frac{1}{2}}\psi(h)^{-1} I_2\left(\sum_{i=1}^n 1_{[x_{i-1}, x_i]}^{\otimes 2}\right).\end{aligned}$$

此外,

$$D_t \hat{\Psi}_n = 2n^{-\frac{1}{2}}\psi(h)^{-1} \sum_{i=1}^n I_1(1_{[x_{i-1}, x_i]})1_{[x_{i-1}, x_i]},$$

其中 $n \geq 1$ 。因此

$$\begin{aligned}\|D_t \hat{\Psi}_n\|_{\mathcal{H}_t}^2 &= 4n^{-1}\psi(h)^{-2} \sum_{i,j=1}^n I_1(1_{[x_{i-1}, x_i]})I_1(1_{[x_{j-1}, x_j]})\langle 1_{[x_{i-1}, x_i]}, 1_{[x_{j-1}, x_j]} \rangle_{\mathcal{H}_t} \\ &= 4n^{-1}\psi(h)^{-2} \sum_{i,j=1}^n I_2(1_{[x_{i-1}, x_i]} \otimes 1_{[x_{j-1}, x_j]})\langle 1_{[x_{i-1}, x_i]}, 1_{[x_{j-1}, x_j]} \rangle_{\mathcal{H}_t} \\ &\equiv R_n + E(\|D_t \hat{\Psi}_n\|_{\mathcal{H}_t}^2).\end{aligned}$$

接下来我们将证明: 当 n 趋于无穷大时, R_n 在 L^2 中收敛于零。

首先, $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned}E(R_n)^2 &= 16n^{-2}\psi(h)^{-4} \sum_{i,j,k,l=1}^n E\left[I_2(1_{[x_{i-1}, x_i]} \otimes 1_{[x_{j-1}, x_j]})I_2(1_{[x_{k-1}, x_k]} \otimes 1_{[x_{l-1}, x_l]})\right. \\ &\quad \left. \cdot \langle 1_{[x_{i-1}, x_i]}, 1_{[x_{j-1}, x_j]} \rangle_{\mathcal{H}_t} \langle 1_{[x_{k-1}, x_k]}, 1_{[x_{l-1}, x_l]} \rangle_{\mathcal{H}_t} \right] \\ &= 16n^{-2}\psi(h)^{-4} \sum_{i,j,k,l=1}^n E[(u(t, x_j) - u(t, x_{j-1}))(u(t, x_i) - u(t, x_{i-1}))] \\ &\quad \times E[(u(t, x_r) - u(t, x_{r-1}))(u(t, x_l) - u(t, x_{l-1}))] \\ &\quad \times E[(u(t, x_r) - u(t, x_{r-1}))(u(t, x_j) - u(t, x_{j-1}))] \\ &\quad \times E[(u(t, x_i) - u(t, x_{i-1}))(u(t, x_l) - u(t, x_{l-1}))] \\ &= 16n^{-2}\psi(h)^{-4} \sum_{i,j,k,l=1}^n \left(\frac{1}{4t\pi}h^4\theta^2 + O(h^6)\right)^2 \\ &= \frac{1}{t^2\pi^2\psi(h)^4}(nh)^2h^6\theta^4 + n^2\psi(h)^{-4}O(h^{10}) \rightarrow 0.\end{aligned}$$

由此可知,

$$\text{Var}\|D_t\hat{\Psi}_n\|_{\mathcal{H}_t}^2 = E(R_n^2) \rightarrow 0.$$

于是由引理3.3我们可以得到, $n \rightarrow \infty$ 时,

$$d(\hat{\Psi}_n, N(0, 2\theta^2)) \leq C\sqrt{\text{Var}\|D_t\hat{\Psi}_n\|_{\mathcal{H}_t}^2} \rightarrow 0.$$

进一步地, 结合 Slutsky 定理, 下述依分布收敛成立:

$$n^{\frac{1}{2}}(\tilde{\theta}_n - \theta) = \hat{\Psi}_n + n^{\frac{1}{2}}(E\tilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, 2\theta^2), \quad n \rightarrow \infty.$$

由此, 我们证明了拟似然估计量误差过程的稳定性。□

4. 数值模拟

将本文得到的估计量应用于本文研究的随机热方程。我们分别设定 $\theta_0 = 2, 3, 4$, 并在区间 $[0, X]$ ($X = 100$) 上对过程进行模拟。

我们绘制了 $\theta_X = \tilde{\theta}$ 随 X 变化的函数图 ($h = 0.05$, $X = nh$)。从图 1, 图 2, 图 3可以看出, X 的值越大, 估计量与 θ_0 的差异越小。表 1描述了不同 h 值下估计量 $\tilde{\theta}(20), \tilde{\theta}(40), \dots, \tilde{\theta}(100)$ 的情况。从表 1可以看出, 仅固定 h 时, 估计量可能不会收敛, 而当 $h \rightarrow 0$ 且 $X \rightarrow \infty$ 时, 估计量会很好地收敛。模拟的结果表明, 用拟似然方法估计参数的结果是显著的。

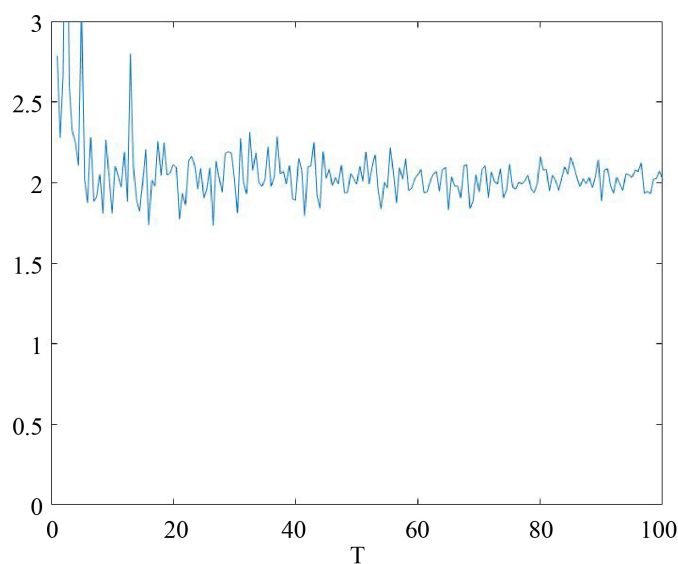


Figure 1. The function of $\tilde{\theta}_n$ varying with X (when $\theta_0 = 2$)

图 1. $\theta_0 = 2$ 时估计量随 X 变化的函数

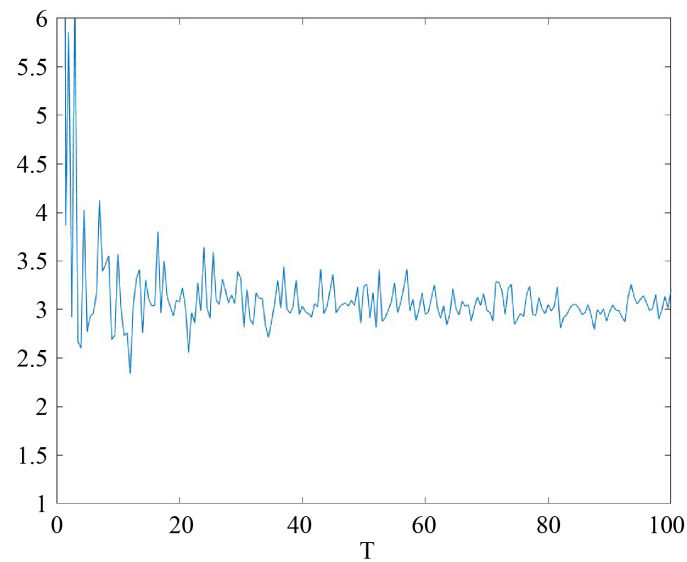


Figure 2. The function of $\tilde{\theta}_n$ varying with X (when $\theta_0 = 3$)
图 2. $\theta_0 = 3$ 时估计量随 X 变化的函数

Table 1. The numerical values of $\tilde{\theta}_n$
表 1. 估计量 $\tilde{\theta}_n$ 的数值

h	T				
	20	40	60	80	100
0.1000	2.1866	2.0488	2.1904	1.8755	1.8429
0.0500	2.0248	2.0095	1.9308	1.7512	2.1005
0.0250	2.0958	2.0022	1.8299	1.9696	2.0435
0.0200	1.8384	1.9404	2.0018	1.9770	2.0866
0.0125	1.9660	2.0205	1.9955	2.0165	2.0061

5. 总结

本文通过方程解的性质，利用其拟似然函数得到参数的拟似然估计量，并且证明了估计量的相合性和渐近有效性。拟似然估计是一种模仿极大似然方法求得参数估计量的方法，该方法在方程解分布已知的情况下，能够通过解过程的概率密度函数简洁地求得参数的一个无偏估计。相较于基于 p -变分的参数估计方法，拟似然估计在方程解的变差不存在，但条件特征函数已知时也可以使用。另外，本文使用的拟似然的方法也可以推广到其他噪声如分数噪声、 $\alpha - stable$ 过程驱动的随机热方程的参数估计。我们将会在以后的工作中对其进行讨论。

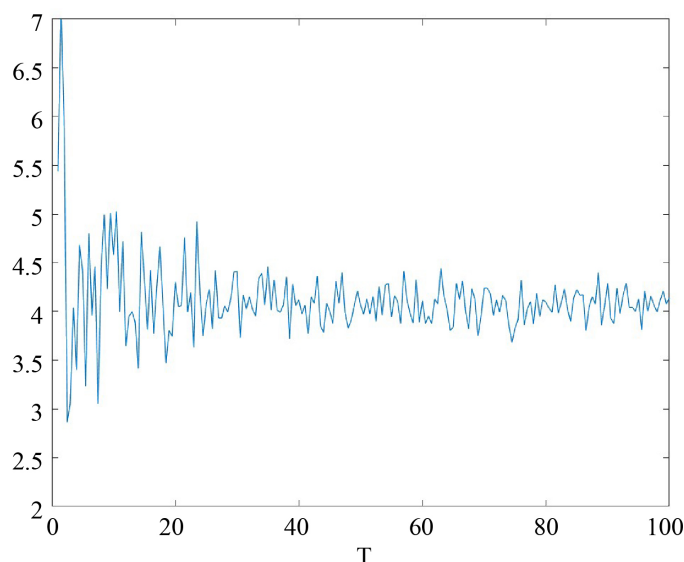


Figure 3. The function of $\tilde{\theta}_n$ varying with X (when $\theta_0 = 4$)

图 3. $\theta_0 = 4$ 时估计量随 X 变化的函数

参考文献

- [1] Cialenco, I. and Glatt-Holtz, N. (2011) Parameter Estimation for the Stochastically Perturbed Navier-Stokes Equations. *Stochastic Processes and their Applications*, **121**, 701-724.
<https://doi.org/10.1016/j.spa.2010.12.007>
- [2] Cialenco, I. and Huang, Y. (2019) A Note on Parameter Estimation for Discretely Sampled SPDEs. *Stochastics and Dynamics*, **20**, Article 2050016.
<https://doi.org/10.1142/s0219493720500161>
- [3] Torres, S., Tudor, C. and Viens, F. (2014) Quadratic Variations for the Fractional-Colored Stochastic Heat Equation. *Electronic Journal of Probability*, **19**, 1-51.
<https://doi.org/10.1214/ejp.v19-2698>
- [4] Gamain, J. and Tudor, C.A. (2023) Exact Variation and Drift Parameter Estimation for the Nonlinear Fractional Stochastic Heat Equation. *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, **6**, 381-406. <https://doi.org/10.1007/s42081-023-00188-0>
- [5] Hu, Y. and Nualart, D. (2010) Parameter Estimation for Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Statistics Probability Letters*, **80**, 1030-1038. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2010.02.018>
- [6] Cialenco, I., Lototsky, S.V. and Pospíšil, J. (2009) Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimator for Stochastic Parabolic Equations with Additive Fractional Brownian Motion. *Stochastics and Dynamics*, **9**, 169-185. <https://doi.org/10.1142/s0219493709002610>
- [7] Markussen, B. (2003) Likelihood Inference for a Discretely Observed Stable Process. *Bernoulli*, **9**, 745-762. <https://doi.org/10.3150/bj/1066418876>

- [8] Alòs, E., Mazet, O. and Nualart, D. (2001) Stochastic Calculus with Respect to Gaussian Processes. *The Annals of Probability*, **29**, 766-801. <https://doi.org/10.1214/aop/1008956692>
- [9] Nualart, D. (1995) The Malliavin Calculus and Related Topics. Springer.
- [10] Pospíšil, J. and Tribe, R. (2007) Parameter Estimates and Exact Variations for Stochastic Heat Equations Driven by Space-Time White Noise. *Stochastic Analysis and Applications*, **25**, 593-611. <https://doi.org/10.1080/07362990701282849>
- [11] Nourdin, I. and Peccati, G. (2012) Normal Approximations with Malliavin Calculus. From Stein's Method to Universality. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/cbo9781139084659>