Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(5), 9-22
Published Online May 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.145228

DC 型均匀凸优化问题的最优性条件和全对偶

陈泓烨

吉首大学数学与统计学院，湖南 吉首

收稿日期：2025年4月6日；录用日期：2025年4月28日；发布日期：2025年5月7日

摘 要

利用c-次微分概念，引入新的约束规范条件，给出了带DC型不等式的均匀凸优化问题的最优性条件，同时利用均匀凸函数的性质，定义了原问题的Lagrange对偶问题，利用函数的c-共轭上图性质，刻画了原问题与其Lagrange对偶问题之间的全对偶。

关键词

均匀凸优化问题，最优性条件，全对偶

Optimality Conditons and Total Dualities for DC Type Evenly Convex Optimization Problems

Hongye Chen

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Apr. 6^{th}, 2025; accepted: Apr. 28^{th}, 2025; published: May 7^{th}, 2025

Abstract

By using the concept of c-subdifferential and introducing new constraint qualification-

文章引用: 陈泓烨. DC型均匀凸优化问题的最优性条件和全对偶[J]. 应用数学进展, 2025, 14(5): 9-22.
DOI: 10.12677/aam.2025.145228

s, the optimality conditions for evenly convex optimization problems with DC type inequalities are given. At the same time, the Lagrange dual problem of the prime problem is defined by utilizing the properties of evenly convex functions. By utilizing the c-conjugate graph property of functions, the total dual problem between the prime problem and its Lagrange dual problem is depicted.

Keywords

Evenly Vonvex Optimization Problem, Optimality Condition, Total Duality

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

最优化问题是一个应用性非常强的研究课题, 也是现代科学计算的核心问题之一, 其广泛分布于经济计划、工程设计、运输交通、国防等领域, 受到了产业部门及科研机构的重点关注. 由于许多实际问题都可以看出或者转化为一个约束优化问题, 因此约束优化问题引起了学者们的高度重视. 学者们研究了如下带不等式约束的 DC优化问题

$$\begin{aligned} \inf \quad & f(x) - g(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in C, f_t(x) \leq 0, t \in T, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中， X是实局部凸 Hausdorff拓扑向量空间, $C \subseteq X$是一个非空闭集, T是一个非空(可能无限)指标集, $f, g, f_t : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $t \in T$ 是真下半连续凸函数. 学者们针对问题 (1.1), 分别引进相应的约束规范条件, 建立了 DC规划问题的 Farkas类引理、对偶理论和最优性条件等(参看文献 [1–10]). 例如, Dinh等人在文献 [4]中利用闭性条件 (CQC)得到了问题 (1.1)的 KKT类最优性条件成立的必要条件, Sun等人在文献 [6]中建立了问题 (1.1)的 Farkas类引理和其对偶问题, 并刻画了原问题和其对偶问题之间的弱对偶和强对偶.

注意到, 上述结论都是建立在函数具有凸性和下半连续性的假设下得到的, 这在一定程度上限制了约束优化问题在实际中的运用. 因此, 如何在函数不一定具有下半连续性的情况下建立数学优化问题的对偶理论和最优性条件, 成为了现代优化理论研究中的一个热点和难点问题. 而均匀凸集具有非闭性, 使得均匀凸函数(即上图为均匀凸集的函数)比下半连续凸函数更具一般性. 于是，有学者开始研究了一类特殊的广义凸优化问题——DC型均匀凸优化问题, 即目标函数为两个均匀凸

函数之差的优化问题. 例如, Fajordo等人研究了问题 (1.1)的对偶理论(参考文献 [11,12])以及带集合约束的DC型均匀凸优化问题的最优性条件(参考文献 [13]), 魏等人对 DC复合均匀凸优化问题进行了研究, 得出了一系列有意义的结论(参考文献 [14]).

据所掌握的文献可知, 目前对带 DC型不等式约束的 DC型均匀凸优化问题的最优性条件和全对偶理论的研究较少. 因此, 我们可以利用 c-次微分性质, 引入一系列约束规范条件, 研究如下带DC型不等式的 DC型均匀凸优化问题

$$\begin{aligned} &\inf \quad f(x)-g(x) \\ &\text{s.t.} \quad x\in C, f_t(x)-g_t(x)\leq 0, t\in T, \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中， X是实局部凸 Hausdorff拓扑向量空间, $C\subseteq X$是一个非空均匀集, T是一个非空(可能无限)指标集, $f,g,f_t,g_t: X\to\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $t\in T$是真均匀凸函数. 注意到, 当 $g_t=0$时, 问题 (1.2)就变成了问题 (1.1), 因此这部分的研究是前述问题的延伸和推广.

2. 预备知识

设 X是实局部凸拓扑向量空间, X^*是 X的共轭空间, 赋予弱 *拓扑 $\omega^*(X^*,X)$. $\langle x^*,x\rangle$表示泛函 $x^*\in X^*$在点 $x\in X$的值, 即 $\langle x^*,x\rangle=x^*(x)$. 设集合 D是 X的一个非空子集, 记 D的闭包, 凸包和锥包分别为 $\operatorname{cl}D$、$\operatorname{co}D$和 $\operatorname{cone}D$. 若对任意 $x_0\notin D$, 存在 $X^*\in X^*$, 使得对所有 $x\in D$有 $\langle x^*,x-x_0\rangle<0$成立, 则称集合 D是均匀凸集. 包含 D的最小均匀凸集称之为 D的均匀凸包, 记为 $\operatorname{econv}D$. $\mathbb{R}_+$表示所有非负实数组成的集合, $\mathbb{R}_{++}$表示所有正实数组成的集合. 设 T是任意(可能无限)指标集, $\mathbb{R}^{(T)}:=\{\lambda=(\lambda_t)_{t\in T}\in\mathbb{R}^T:$ 只有有限多个$\lambda_t\neq 0\}$, $\mathbb{R}_+^{(T)}$表示 $\mathbb{R}^{(T)}$上的非负锥, 即

$$\mathbb{R}_+^{(T)}:=\Big\{(\lambda_t)_{t\in T}\in\mathbb{R}^{(T)}:\lambda_t\geq 0,\ \forall t\in T\Big\}.$$

令 δ_D表示 D的示性函数, 定义为

$$\delta_D(x):=\begin{cases}0, & x\in D,\\ +\infty, & x\in X\setminus D.\end{cases}$$

设 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$是真函数, 分别定义 f的有效定义域、上图、共轭函数为

$$\operatorname{dom}f:=\{x\in X: f(x)<+\infty\},$$

$$\operatorname{epi}f:=\{(x,r)\in X\times\mathbb{R}:\ f(x)\leq r\},$$

$$f^*(x^*):=\sup\{\langle x^*,x\rangle-f(x):x\in X\},\ \forall x^*\in X^*.$$

定义 f在点 $x\in\operatorname{dom}f$处的次微分为

$$\partial f(x):=\{x^*\in X^*: f(x)+\langle x^*,y-x\rangle\leq f(y),\forall y\in X\},\ \forall x\in\operatorname{dom}f,$$

若 $f(x)\notin\mathbb{R}$, 则记 $\partial f(x)=\emptyset$. 若函数 f的上图 epi$f$为均匀凸集, 则称函数 f为均匀凸函数. 定义函数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$的均匀凸包为

$$\mathrm{econv}\, f:=\sup\{g:g\ \text{是均匀凸函数且}\ g\le f\}.$$

对于真函数 $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$, f和 g的下端卷积记作 $f\oplus g$, 定义为

$$(f\oplus g)(x):=\inf_{x_1+x_2=x}\{f(x_1)+g(x_2)\},\ \forall x\in X.$$

如果存在 $a\in X$使得 $(f\oplus g)(x)=f(a)+g(x-a)$, 则称函数 $f\oplus g$在点 x精确. 令 $W:=X^*\times X^*\times\mathbb{R}$, 耦合函数 $c:X\times W\to\overline{\mathbb{R}}$和 $c':W\times X\to\overline{\mathbb{R}}$定义为

$$c(x,(y^*,z^*,\alpha))=c'((y^*,z^*,\alpha),x):=\begin{cases}\langle x,y^*\rangle, & \text{如果}\ \langle x,z^*\rangle<\alpha,\\ +\infty, & \text{如果}\ \langle x,z^*\rangle\ge\alpha.\end{cases}$$

设 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$, $h:W\to\overline{\mathbb{R}}$, 分别定义 f的 c-共轭 $f^c:W\to\overline{\mathbb{R}}$ 和 h的 c'-共轭 $h^{c'}:X\to\overline{\mathbb{R}}$为

$$f^c(y^*,z^*,\alpha):=\sup_{x\in X}\{c(x,(y^*,z^*,\alpha))-f(x)\},\ \forall(y^*,z^*,\alpha)\in W,$$

$$h^{c'}(x):=\sup_{(y^*,z^*,\alpha)\in W}\{c'((y^*,z^*,\alpha),x)-h(y^*,z^*,\alpha)\},\ \forall x\in X.$$

约定 $(+\infty)+(-\infty)=(-\infty)+(+\infty)=(+\infty)-(+\infty)=(-\infty)-(-\infty)=-\infty$, $0\cdot\infty=0$.

文献 [15]表明, 一族从 X映到 $\mathbb{R}$且不恒等于 $-\infty$的真均匀凸函数, 实际上是一族 c-基本初等函数的逐点收敛的上确界的集合. 同理, 函数 $g:W\to\mathbb{R}$被称为次均匀凸的, 如果它是一族 c'-基本初等函数的逐点收敛的上确界的集合. 其中, c-基本初等函数是指具有 $x\in X\to c(x,(y^*,z^*,\alpha))-\beta\in\mathbb{R}$且 $(y^*,z^*,\alpha)\in W$, $\beta\in\mathbb{R}$形式的函数, c'-基本初等函数是指具有 $(y^*,z^*,\alpha)\in W\to c'((y^*,z^*,\alpha),x)-\beta\in\mathbb{R}$且 $x\in X$, $\beta\in\mathbb{R}$形式的函数. 函数 g最大的次均匀凸弱函数称为 g的次均匀凸包, 记为 e$'$conv$g$. 即 e$'$conv$g$:= $\sup\{h:h\ \text{是均匀凸函数且}\ h\le g\}$.

定义2.1. *[16] 设集合 $D\subseteq W\times\mathbb{R}$, 若存在次均匀凸函数 $k:W\to\mathbb{R}$使得 $D=\mathrm{epi}k$, 则称集合 D为次均匀凸集.*

定义2.2. *[13] 设函数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$为真函数, $x_0\in\mathrm{dom}f$. 若存在 $(x^*,u^*,\alpha)\in W$使得 $\langle x_0,u^*\rangle<\alpha$ 且对任意 $x\in X$有*

$$f(x)-f(x_0)\ge c(x,(x^*,u^*,\alpha))-c(x_0,(x^*,u^*,\alpha)),$$

则称向量 $(x^*,u^*,\alpha)\in W$是函数 f在点 x_0处的 c-次梯度. 函数 f在点 x_0 处的所有 c-次梯度组成的集合称为函数 f在点 x_0处的 c-次微分, 记为 $\partial_c f(x_0)$.

注2.1. *定义 $\mathbb{R}^p$到 $\mathbb{R}^{|J|}$上的投射 $\mathrm{Proj}_p^J:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^{|J|}$为 $\mathrm{Proj}_p^J(x):=(x_j)_{j\in J}$, 其中 $p\in\mathbb{N}$, $\emptyset\ne J\subsetneqq\{1,...,p\}$. 设 $u^*\in X^*$, $\alpha\in\mathbb{R}$, 定义 $H^<_{u^*,\alpha}:=\{x\in X:\langle x,u^*\rangle<\alpha\}$. 由文献 [13] 和 [15] 可知,*

$$f^c(x^*,u^*,\alpha)=\begin{cases}f^*(x^*), & \text{如果}\ \mathrm{dom}f\subseteq H^<_{u^*,\alpha},\\ +\infty, & \text{其他},\end{cases}$$

$$\partial_c f(x) = \partial f(x) \times \{(u^*, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R} : \mathrm{dom} f \subseteq H^{<}_{u^*,\alpha}\},$$

且有 $\partial f(x) = \mathrm{Proj}_3^1 \partial_c f(x)$, 其中 $x \in \mathrm{dom} f$.

由 c-共轭函数的定义可知, 以下不等式成立:

$$f(x) + f^c(y^*, z^*, \alpha) \geq c(x, (y^*, z^*, \alpha)),\ \forall (x, (y^*, z^*, \alpha)) \in X \times W.$$

同时, 由 c-次微分的定义可知, 对任意 $x \in \mathrm{dom} f$有

$$f(x) + f^c(y^*, z^*, \alpha) = c(x, (y^*, z^*, \alpha)),\ \forall (y^*, z^*, \alpha) \in \partial_c f(x). \tag{2.1}$$

引理2.1. *[17]* 给定函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$和 $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, 有下列命题成立

(i) f^c是均匀凸函数; $g^{c'}$是次均匀凸函数.

(ii) $\mathrm{econv} f = f^{cc'}$; $\mathrm{e'conv} g = g^{c'c}$.

(iii) 若函数 $f \neq -\infty$, 则 f是均匀凸函数当且仅当 $f = f^{cc'}$; 函数 g是次均匀凸函数当且仅当 $g = g^{c'c}$.

(iv) $f^{cc'} \leq f$; $g^{c'c} \leq g$.

3. 最优性条件

设 $p \in X^*$, 本章考虑如下带线性扰动的均匀凸优化问题:

$$(P_p) \qquad \begin{array}{ll} \inf & f(x) - g(x) - \langle p, x\rangle \\ \text{s.t.} & f_t(x) - g_t(x) \leq 0,\ t \in T, \\ & x \in C, \end{array}$$

其中, X是实局部拓扑向量空间, 函数 $f, g, f_t, g_t : X \to \overline{\mathbb{R}}$是定义在 X上的真均匀凸函数, C是 X中的非空均匀凸子集, T是任意指标集. 记 $\partial_c H(x) = \partial_c g(x) \times \prod_{t \in T} \partial_c g_t(x)$, $x \in X$. 设 A表示问题 (P_p)的可行解集, 即

$$A := \{x \in C : f_t(x) - g_t(x) \leq 0,\ t \in T\}.$$

为方便讨论, 本章约定 $\mathrm{dom}(f - g) \cap A \neq \emptyset$, 当 $x \notin \mathrm{dom} f$时有 $f(x) - g(x) = +\infty$. 为研究问题 (P_p)的最优性条件, 先给出如下命题和定义.

命题3.1. 设 $p \in X^*$, $a \in \mathbb{R}$. 对任意 $x \in \mathrm{dom} f$有

$$\partial_c (f + p + a)(x) = \partial_c f(x) + (p, 0, 0).$$

证 取 $(x^*, u^*, \alpha) \in \partial_c (f + p + a)(x)$, 由 c-次微分定义知 $\langle x, u^*\rangle < \alpha$且对任意 $\overline{x} \in X$有

$$(f + p + a)(\overline{x}) - (f + p + a)(x) \geq c(\overline{x}, (x^*, u^*, \alpha)) - c(x, (x^*, u^*, \alpha)). \tag{3.1}$$

注意到, $c(x,(x^*,u^*,\alpha))=\langle x,x^*\rangle$且上式左边为有限值. 为使 (3.1)式成立, $c(\overline{x},(x^*,u^*,\alpha))$也必为有限值, 故有 $\langle x,x^*\rangle<\alpha$且 $c(\overline{x},(x^*,u^*,\alpha))=\langle \overline{x},x^*\rangle$. 因此, 对任意 $\overline{x}\in X$有

$$(f+p)(\overline{x})-(f+p)(x)\geq \langle \overline{x},x^*\rangle-\langle x,x^*\rangle,$$

整理得

$$\begin{aligned}f(\overline{x})-f(x)&\geq \langle \overline{x},x^*-p\rangle-\langle x,x^*-p\rangle\\&=c(\overline{x},(x-p,u^*,\alpha))-c(x,(x-p,u^*,\alpha)).\end{aligned}$$

因此， $(x^*-p,u^*,\alpha)\in\partial_c f(x)$, 即 $(x^*,u^*,\alpha)\in\partial_c f(x)+(p,0,0)$.

反之, 取 $(x^*,u^*,\alpha)\in\partial_c f(x)$, 由 c-次微分定义知 $\langle x,u^*\rangle<\alpha$且对任意 $\overline{x}\in X$有

$$f(\overline{x})-f(x)\geq c(\overline{x},(x,u^*,\alpha))-c(x,(x,u^*,\alpha)).$$

即

$$f(\overline{x})-f(x)\geq \langle \overline{x},x^*\rangle-\langle x,x^*\rangle. \tag{3.2}$$

在 (3.2) 式左右两边同时加上 $\langle p,\overline{x}-x\rangle$, 得

$$\begin{aligned}(f+p+a)(\overline{x})-(f+p+a)(x)&\geq \langle \overline{x},x^*+p\rangle-\langle x,x^*+p\rangle\\&=c(\overline{x},(x+p,u^*,\alpha))-c(x,(x+p,u^*,\alpha)).\end{aligned}$$

所以 $(x^*+p,u^*,\alpha)\in\partial_c(f+p+a)(x)$, 故 $\partial_c f(x)+(p,0,0)\subseteq\partial_c(f+p+a)(x)$. ∎

定义3.1. 设 $p\in X^*$, $x_0\in\mathrm{dom}(f-g)\cap A$. 考虑下面命题

(i) x_0是问题 (P_p)的最小值点;

(ii) 对任意 $((x^*,u^*,\alpha),(y^*,v^*,\beta))\in\partial_c H(x)$, 存在 $\lambda=(\lambda_t)_{t\in T}\in\mathbb{R}_+^{(T)}$使得对任意 $\gamma>0$有

$$(p,0,\gamma)+(x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t)\in\partial_c f(x_0)+\partial_c\delta_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\partial_c f_t(x_0). \tag{3.3}$$

若 (i) $\Leftrightarrow$ (ii) 则称系统 $\{f-p,g,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$在点 x_0满足 KKT 条件. 若其在 $\mathrm{dom}(f-g)\cap A$上每一点都满足 KKT 条件, 则称系统 $\{f-p,g,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$满足 KKT 条件.

定义3.2. 设 $p\in X^*$, $x_0\in\mathrm{dom}(f-g)\cap A$. 若

$$\begin{aligned}\partial_c(f-g-p+\delta_A)(x_0)=&\bigcap_{((x^*,u^*,\alpha),(y^*,v^*,\beta))\in\partial_c H(x)}\ \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}}(\partial_c(f-p)(x_0)+\partial_c\delta_c(x_0)\\&+\sum_{t\in T(x)}\lambda_t(\partial_c f_t(x_0)-(y_t^*,v_t^*,\beta_t))-(x^*,u^*,\alpha)).\end{aligned} \tag{3.4}$$

则称系统 $\{f-p,g,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$在点 x_0满足 $F-(ECQ)$条件. 此外, 若其在 $x\in\mathrm{dom}(f-g)\cap A$上每一点都满足 $F-(ECQ)$条件, 则称系统 $\{f-p,g,\delta_C;f_t,g_t:t\in T\}$满足 $F-(ECQ)$条件.

注3.1. 当 $p=0$ 时, 将 (3.4)式中左右两边同时作 $\mathbb{R}^3$到 $\mathbb{R}$上的投射, $F-(ECQ)$条件即转化为文

献 [18]中的 (BCQ)条件.

定理3.1. 设 $p \in x^*$, $x_0 \in \mathrm{dom}(f-g) \cap A$.以下命题等价

(i) x_0是问题 (P_p)的最优解;

(ii) 对任意 $\alpha > 0$, $(0,0,\alpha) \in \partial_c(f-g-p+\delta_A)(x_0)$;

(iii) 对任意 $\alpha > 0$, $(p,0,\alpha) \in \partial_c(f-g+\delta_A)(x_0)$.

证 (i) $\Rightarrow$ (ii) 设 x_0是问题 (P_p)的最优解, 则对任意 $x \in X$, $\alpha > 0$有

$$(f-g-p+\delta_A)(x) - (f-g-p+\delta_A)(x_0) \geq 0 = c(x,(0,0,\alpha)) - c(x_0,(0,0,\alpha)).$$

因此, $(0,0,\alpha) \in \partial_c(f-g-p+\delta_A)(x_0)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 假设 (ii)成立. 任取 $\alpha > 0$使得 $(0,0,\alpha) \in \partial_c(f-g-p+\delta_A)(x_0)$, 则由命题 3.1得 $(0,0,\alpha) \in \partial_c(f-g+\delta_A)(x_0) + (-p,0,0)$, 整理得 $(p,0,\alpha) \in \partial_c(f-g+\delta_A)(x_0)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 假设 (iii)成立. 任取 $\alpha > 0$使得 $(p,0,\alpha) \in \partial_c(f-g+\delta_A)(x_0)$, 则对任意 $x \in X$有

$$\begin{aligned}(f-g+\delta_A)(x) - (f-g+\delta_A)(x_0) \geq & c(x,(p,0,\alpha)) - c(x_0,(p,0,\alpha)) \\ = & \langle x,p\rangle - \langle x_0,p\rangle,\end{aligned}$$

即对任意 $x \in A$有 $(f-g-p)(x) - (f-g-p)(x_0) \geq 0$, 因此, x_0是问题 (P_p)的最优解. ∎

由定理 3.1可知下面推论成立.

推论3.1. 设 $x_0 \in \mathrm{dom} f \cap A$. 则 x_0是问题 (P)的最优解当且仅当对任意 $\alpha > 0$有 $(0,0,\alpha) \in \partial_c(f-g+\delta_A)(x_0)$.

下面给出问题 (P_p)的 KKT类最优性条件成立的充分条件.

定理3.2. 设 $p \in X^*$, $x_0 \in \mathrm{dom}(f-g) \cap A$. 若系统 $\{f-p, g, \delta_C; f_t, g_t : t \in T\}$在点 x_0满足 $F-(ECQ)$条件, 则其在点 x_0满足 KKT条件.

证 假设系统 $\{f-p, g, \delta_C; f_t, g_t : t \in T\}$在点 x_0满足 $F-(ECQ)$条件, 则 (3.4)式成立. 若点 x_0是问题 (P_p)的最小值. 由定理 3.1可知当且仅当对任意 $\gamma > 0$有

$$(0,0,\gamma) \in \partial_c(f-g-p+\delta_A)(x_0).$$

结合 (3.4)式可得

$$\begin{aligned}(0,0,\gamma) \in \bigcap_{((x^*,u^*,\alpha),(y^*,v^*,\beta)) \in \partial_c H(x)} \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} & (\partial_c(f-p)(x_0) + \partial_c \delta_c(x_0) \\ & + \sum_{t \in T(x)} \lambda_t(\partial_c f_t(x_0) - (y_t^*, v_t^*, \beta_t)) - (x^*,u^*,\alpha)),\end{aligned}$$

当且仅当对任意 $((x^*,u^*,\alpha),(y^*,v^*,\beta)) \in \partial_c H(x)$, 存在 $\lambda = (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$使得对任意 $\gamma > 0$有

$$(0,0,\gamma)+(x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t)\in\partial_c(f-p)(x_0)+\partial_c\delta_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\partial_c f_t(x_0). \tag{3.5}$$

由命题 3.1可知 (3.5)式等价于

$$(p,0,\gamma)+(x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t)\in\partial_c f(x_0)+\partial_c\delta_C(x_0)+\sum_{t\in T(x_0)}\lambda_t\partial_c f_t(x_0).$$

∎

4. Langrange 稳定全对偶

为了定义问题 (P_p)的Lagrange对偶问题, 我们先给出如下命题.

命题4.1. 对任意 $\lambda\geq 0$有

$$\lambda c(x,(y^*,z^*,\alpha))\leq c(x,\lambda(y^*,z^*,\alpha)). \tag{4.1}$$

证 当 $\lambda=0$时,

$$0\cdot c(x,(y^*,z^*,\alpha))=0,\ c(x,0\cdot(y^*,z^*,\alpha))=c(x,(0,0,0))=+\infty.$$

当 $\lambda>0$时

$$\lambda c(x,(y^*,z^*,\alpha))=\begin{cases}\lambda\langle x,y^*\rangle, & \text{如果 } \langle x,z^*\rangle<\alpha,\\ +\infty, & \text{如果 } \langle x,z^*\rangle\geq\alpha.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}c(x,\lambda(y^*,z^*,\alpha))=c(x,(\lambda y^*,\lambda z^*,\lambda\alpha))=&\begin{cases}\langle x,\lambda y^*\rangle, & \text{如果 } \langle x,\lambda z^*\rangle<\lambda\alpha,\\ +\infty, & \text{如果 } \langle x,\lambda z^*\rangle\geq\lambda\alpha.\end{cases}\\ =&\lambda c(x,(y^*,z^*,\alpha)).\end{aligned}$$

故对任意 $\lambda\geq 0$有 (4.1)式成立. ∎

当函数 $g,g_t:t\in T$为真均匀凸函数时, 结合引理 2.1和命题 4.1得

$$\begin{aligned}&\inf_{x\in C}\{f(x)-g(x)-\langle p,x\rangle+\sum_{t\in T}\lambda_t(f_t(x)-g_t(x))\}\\ =&\inf_{x\in X}\{f(x)+\delta_c(x)-g^{cc'}(x)-\langle p,x\rangle+\sum_{t\in T}\lambda_t(f_t(x)-g_t^{cc'}(x))\}\\ =&\inf_{x\in X}\{(f-p+\delta_c+\sum_{t\in T}\lambda_t f_t)(x)-\sup_{(x^*,u^*,\alpha)\in\mathrm{dom}g^c}(c(x,(x^*,u^*,\alpha))-g^c(x^*,u^*,\alpha))\\ &-\sum_{t\in T}\lambda_t\sup_{(y_t^*,v_t^*,\beta_t)\in\mathrm{dom}g_t^c}(c(x,(y_t^*,v_t^*,\beta_t))-g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t))\}\\ =&\inf_{x\in X}\inf_{(x^*,u^*,\alpha)\in\mathrm{dom}g^c}\inf_{(y_t^*,v_t^*,\beta_t)\in\mathrm{dom}g_t^c}\{(f-p+\delta_c+\sum_{t\in T}\lambda_t f_t)(x)+g^c(x^*,u^*,\alpha)\\ &-c(x,(x^*,u^*,\alpha))+\sum_{t\in T}\lambda_t g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t)-\sum_{t\in T}\lambda_t c(x,(y_t^*,v_t^*,\beta_t))\}\end{aligned}$$

$$\geq \inf_{x\in X}\inf_{(x^*,u^*,\alpha)\in \mathrm{dom}g^c}\inf_{(y_t^*,v_t^*,\beta_t)\in \mathrm{dom}g_t^c}\{(f-p+\delta_c+\sum_{t\in T}\lambda_t f_t)(x)+g^c(x^*,u^*,\alpha)$$

$$-c(x,(x^*,u^*,\alpha))+\sum_{t\in T}\lambda_t g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t)-c(x,\sum_{t\in T}\lambda_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t))\}$$

$$\leq \inf_{x\in X}\inf_{(x^*,u^*,\alpha)\in \mathrm{dom}g^c}\inf_{(y_t^*,v_t^*,\beta_t)\in \mathrm{dom}g_t^c}\{(f-p+\delta_c+\sum_{t\in T}\lambda_t f_t)(x)+g^c(x^*,u^*,\alpha)$$

$$+\sum_{t\in T}\lambda_t g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t)-c(x,((x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T}\lambda_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t)))\}$$

$$=\inf_{((x^*,u^*,\alpha),(y^*,v^*,\beta))\in H}\{g^c(x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T}\lambda_t g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t)-\sup_{x\in X}(c(x,((x^*,u^*,\alpha)$$

$$+\sum_{t\in T}\lambda_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t)))-(f-p+\delta_c+\sum_{t\in T}\lambda_t f_t)(x))\}$$

$$=\inf_{((x^*,u^*,\alpha),(y^*,v^*,\beta))\in H}\{g^c(x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T}g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t)-(f-p+\delta_C+\sum_{t\in T}\lambda_t f_t)^c$$

$$((x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T}\lambda_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t))\}.$$

因此，问题 (P_p)的Lagrange对偶问题 (D_p)为

$$(D_p)\qquad \sup_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}}\inf_{((x^*,u^*,\alpha),(y^*,v^*,\beta))\in H}L_p(h,\lambda),$$

其中， Lagrange函数 $L_p: H\times\mathbb{R}_+^{(T)}\to\overline{\mathbb{R}}$定义为

$$\begin{aligned}L_p(h,\lambda):=&g^c(x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T}g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t)\\&-(f-p+\delta_C+\sum_{t\in T}\lambda_t f_t)^c((x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T}\lambda_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t)),\end{aligned}$$

其中， $H:=\mathrm{dom}g^c\times\prod_{t\in T}\mathrm{dom}g_t^c$. $v(\overline{P}_p)$和 $S(\overline{P}_p)$分别表示问题 (P_p)的最优值和解集, 定义为

$$v(\overline{P}_p):=\inf\{f(x)-g(x)-\langle p,x\rangle : x\in \mathrm{dom}f\cap\mathrm{dom}g\cap A\}(\geq-\infty),$$

$$S(\overline{P}_p):=\{x\in\mathrm{dom}f\cap A: f(x)-g(x)-\langle p,x\rangle=v(\overline{P}_p)\}.$$

类似地, 分别定义问题 $(\overline{D}_p)$的最优值 $v(\overline{D}_p)$和解集 $S(\overline{D}_p)$为

$$v(\overline{D}_p):=\sup_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}}\inf_{((x^*,u^*,\alpha),(y^*,v^*,\beta))\in H}L_p(h,\lambda),$$

$$S(\overline{D}_p):=\{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(T)}:\inf_{((x^*,u^*,\alpha),(y^*,v^*,\beta))\in H}L_p(h,\lambda)=v(\overline{D}_p)\}.$$

为简便, 分别记 $v(\overline{D}_0)$、$v(\overline{P}_0)$、$S(\overline{P}_0)$、$v(\overline{D}_0)$、$S(\overline{D}_0)$为 $v(\overline{D})$、$v(\overline{P})$、$S(\overline{P})$、$v(\overline{D})$、$S(\overline{D})$.

接下来，我们研究问题 $(\overline{P})$与问题 $(\overline{D})$之间的全对偶, 为此, 先给出如下定义.

定义4.1. (i) 若 $v(\overline{D}) \le v(\overline{P})$, 则称问题 $(\overline{P})$与问题 $(\overline{D})$之间的弱对偶成立;

(ii) 若 $v(\overline{D}) = v(\overline{P})$ 且 $S(\overline{D}) \neq \emptyset$, 则称问题 $(\overline{P})$与问题 $(\overline{D})$之间的强对偶成立;

(iii) 若 $S(\overline{P}) \cap X_0 \neq \emptyset$ 时, 问题 $(\overline{P})$与问题 $(\overline{D})$之间的强对偶成立, 则称问题 $(\overline{P})$与问题 $(\overline{D})$之间的 X_0-全对偶成立;

(iv) 若对任意 $p \in X^*$, 问题 (P_p)与问题 $(\overline{D}_p)$之间的全对偶成立, 则称问题 $(\overline{P})$与问题 $(\overline{D})$之间的 X_0-稳定全对偶成立.

集合 Ω_0定义为

$$\Omega_0 := \{x \in X \mid \partial_c g(x) \neq \emptyset\}.$$

集合定义 $N_0'(x)$为

$$N_0'(x) := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}} \Big(\bigcap_{((x^*,u^*,\alpha),(y^*,v^*,\beta)) \in \partial_c H(x)} (\partial_c(f + \delta_C + \sum_{t \in T(x)} \lambda_t f_t)(x) - (x^*, u^*, \alpha) - \sum_{t \in T(x)} \lambda_t (y_t^*, v_t^*, \beta_t))\Big).$$

定义4.2. 称系统 $\{f, g, \delta_C; f_t, g_t : t \in T\}$

(i) 在 $x \in A$处满足拟 $(WECQ)$条件, 若

$$\partial_c(f - g + \delta_A)(x) \subseteq N_0'(x); \tag{4.2}$$

(ii) 满足拟 $(WECQ)_f$条件, 若该系统在任意 $x \in A$处都满足拟 $(WECQ)_f$ 条件.

注4.1. 将 (4.2)式中左右两边同时作 $\mathbb{R}^3$到 $\mathbb{R}$上的投射, 则定义 4.2中的拟 $(WECQ)$条件即转化为文献 [19]中的拟 $(WBCQ)$条件.

定理4.1. 若问题 $(\overline{P})$与问题 $(\overline{D})$之间的 Ω_0-稳定全对偶成立, 则系统 $\{f, g, \delta_C; f_t, g_t : t \in T\}$ 满足拟 $(WECQ)_f$条件.

证 取 $(p, w^*, \gamma) \in \partial_c(f - g + \delta_A)(x_0)$, 由 c-次微分定义知 $\langle x_0, w^* \rangle < \gamma$且对任意 $x \in \mathrm{dom}(f - g) \cap A$有

$$(f - g)(x) - (f - g)(x_0) \ge c(x, (p, w^*, \gamma)) - c(x_0, (p, w^*, \gamma)). \tag{4.3}$$

注意到, $c(x_0, (p, w^*, \gamma)) = \langle p, x_0 \rangle$且上式左边为有限值. 为使 (4.3)式成立, $c(x, (p, w^*, \gamma))$也必为有限值, 故有 $\langle x, w^* \rangle < \gamma$且 $c(x, (p, w^*, \gamma)) = \langle p, x \rangle$. 因此, 对任意 $x \in \mathrm{dom}(f - g) \cap A$有

$$(f - g)(x) - (f - g)(x_0) \ge \langle p, x_0 \rangle - \langle p, x \rangle.$$

即 $x_0 \in S(\overline{P}_p)$. 因此， $x_0 \in S(\overline{P}_p) \cap \Omega_0$. 又问题 $(\overline{P})$与问题 $(\overline{D})$之间的 Ω_0-稳定全对偶成立, 故存在 $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$对任意 $((x^*, u^*, \alpha), (y^*, v^*, \beta)) \in \partial_c H(x_0)$有

$$
\begin{aligned}
&g^c(x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t)-(f-p+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)^c((x^*,u^*,\alpha)\\
&+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t))\geq v(\overline{P}_p).
\end{aligned}
$$

其中， $v(\overline{P}_p)=f(x_0)-g(x_0)-\langle p,x_0\rangle$, 整理得

$$
\begin{aligned}
&(f-p+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)^c((x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t))+f(x_0)-\langle p,x_0\rangle\\
&\leq g^c(x^*,u^*,\alpha)+g(x_0)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t).
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

由 c-共轭函数的定义得

$$
\begin{aligned}
&(f-p+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)^c((x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t))\\
&\geq-(f-p+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)(x_0)+c(x_0,((x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t)));
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

由 c-次微分的定义得

$$
\begin{aligned}
&g^c(x^*,u^*,\alpha)+g(x_0)=c(x_0,(x^*,u^*,\alpha))\\
&g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t)+g_t(x_0)=c(x_0,(y_t^*,v_t^*,\beta_t))\text{ 对任意 }t\in T,
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
v(\overline{P}_p)&=f(x_0)-g(x_0)-\langle p,x_0\rangle\\
&\leq g^c(x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t)-(f-p+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)^c((x^*,u^*,\alpha)\\
&\quad+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t))\\
&\leq(c(x_0,(x^*,u^*,\alpha))-g(x_0))+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(c(x_0,(y_t^*,v_t^*,\beta_t))-g_t(x_0))\\
&\quad+(f-p+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)(x_0)-c(x_0,((x^*,u^*,\alpha)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t)))\\
&=(\langle x_0,x^*\rangle-g(x_0))+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(\langle x_0,y_t^*\rangle-g_t(x_0))\\
&\quad+(f-p+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)(x_0)-\langle x_0,x^*+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t y_t^*\rangle\\
&=f(x_0)-g(x_0)-\langle p,x_0\rangle+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(f_t(x_0)-g_t(x_0))\\
&\leq f(x_0)-g(x_0)-\langle p,x_0\rangle,
\end{aligned}
$$

上述最后一个不等式成立是因为 $x_0 \in A$, 因此

$$\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(f_t(x_0)-g_t(x_0))=0. \tag{4.7}$$

结合 (4.4) 式、(4.5) 式、(4.6) 式和 (4.7) 式得

$$\begin{aligned}
0 \le{}& (f+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)^c((x^*+p,u^*+w^*,\alpha+\gamma)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t))\\
&+(f+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)(x_0)-c(x_0,(x^*+p,u^*+w^*,\alpha+\gamma)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t))\\
\le{}& g^c(x^*,u^*,\alpha)+g(x_0)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t(x_0)-\langle x_0,x^*\rangle\\
&-c(x_0,\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t))\\
={}& g^c(x^*,u^*,\alpha)+g(x_0)-\langle x_0,x^*\rangle+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(g_t^c(y_t^*,v_t^*,\beta_t)+g_t(x_0)\\
&-c(x_0,(y_t^*,v_t^*,\beta_t)))+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(f_t(x_0)-g_t(x_0))\\
={}& 0.
\end{aligned}$$

这说明

$$\begin{aligned}
&(f+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)^c((x^*+p,u^*+w^*,\alpha+\gamma)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t))\\
&+(f+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)(x_0)-c(x_0,((x^*+p,u^*+w^*,\alpha+\gamma)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t)))\\
&=0.
\end{aligned}$$

由 c-次微分的定义得

$$(p+x^*,u^*+w^*,\alpha+\gamma)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t)\in\partial_c(f+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)(x_0).$$

因此

$$\begin{aligned}
(p,w^*,\gamma)={}&(x^*+p,u^*+w^*,\alpha+\gamma)+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t)-(x^*,u^*,\alpha)\\
&-\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t)\\
\in{}&\partial_c(f+\delta_C+\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t f_t)(x_0)-(x^*,u^*,\alpha)-\sum_{t\in T}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t).
\end{aligned}$$

所以对任意 $((x^*,u^*,\alpha),(y^*,v^*,\beta))\in\partial_c H(x)$有

$$(p,w^*,\gamma)\in\bigcap_{((x^*,u^*,\alpha),(y^*,v^*,\beta))\in\partial_c H(x)}(\partial_c(f+\delta_C+\sum_{t\in T(x)}\lambda_t f_t)(x)$$
$$-(x^*,u^*,\alpha)-\sum_{t\in T(x)}\overline{\lambda}_t(y_t^*,v_t^*,\beta_t))).$$

即

$$\partial_c(f-g+\delta_A)(x)\subseteq N_0'(x).$$

▌

注4.2. 因为拟 $(WECQ)$条件可以转化为拟 $(WBCQ)$条件，故由定理 4.1即可得到文献 [19]中定理3.1的(ii) $\Rightarrow$ (iii).

参考文献

[1] Dinh, N., Mordukhovich, B.S. and Nghia, T.T.A. (2009) Qualification and Optimality Conditions for DC Programs with Infinite Constraints. *Acta Mathematica Vietnamica*, **34**, 125-155.

[2] Dinh, N., Nghia, T.T.A. and Vallet, G. (2010) A Closedness Condition and Its Applications to DC Programs with Convex Constraints. *Optimization*, **59**, 541-560. https://doi.org/10.1080/02331930801951348

[3] Dinh, N., Vallet, G. and Nghia, T.T.A. (2008) Farkas-Type Results and Duality for DC Programs with Convex Constraints. *Journal of Convex Analysis*, **15**, 235-262.

[4] Dinh, N., Mordukhovich, B. and Nghia, T.T.A. (2009) Subdifferentials of Value Functions and Optimality Conditions for DC and Bilevel Infinite and Semi-Infinite Programs. *Mathematical Programming*, **123**, 101-138. https://doi.org/10.1007/s10107-009-0323-4

[5] Hiriart-Urruty, J.-B. (1989) From Convex Optimization to Nonconvex Optimization. Necessary and Sufficient Conditions for Global Optimality. In: Clarke, F.H., Dem'yanov, V.F. and Giannessi, F., Eds., *Nonsmooth Optimization and Related Topics*, Springer, 219-239. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6019-4_13

[6] Sun, X., Li, S. and Zhao, D. (2013) Duality and Farkas-Type Results for DC Infinite Programming with Inequality Constraints. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **17**, 1227-1244. https://doi.org/10.11650/tjm.17.2013.2675

[7] Correa, R., López, M.A. and Pérez-Aros, P. (2021) Necessary and Sufficient Optimality Conditions in DC Semi-Infinite Programming. *SIAM Journal on Optimization*, **31**, 837-865. https://doi.org/10.1137/19m1303320

[8] Martínez-Legaz, J.E. and Seeger, A. (1992) A Formula on the Approximate Subdifferential of the Difference of Convex Functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **45**, 37-41. https://doi.org/10.1017/s0004972700036984

[9] Urruty, J.B.H. and Lemaréchal, C. (1993) Convex Analysis and Minimization Algorithms. Springer-Verlag.

[10] An, L.T.H. and Tao, P.D. (2005) The DC (Difference of Convex Functions) Programming and DCA Revisited with DC Models of Real World Nonconvex Optimization Problems. *Annals of Operations Research*, **133**, 23-46. https://doi.org/10.1007/s10479-004-5022-1

[11] Fajardo, M.D. and Vidal, J. (2023) On Fenchel c-Conjugate Dual Problems for DC Optimization: Characterizing Weak, Strong and Stable Strong Duality. *Optimization*, **73**, 2473-2500. https://doi.org/10.1080/02331934.2023.2230988

[12] Fajardo, M.D. and Vidal-Nunez, J. (2024) Lagrange Duality on DC Evenly Convex Optimization Problems via a Generalized Conjugation Scheme. *Optimization Letters*. https://doi.org/10.1007/s11590-024-02167-0

[13] Fajardo, M.D. and Vidal, J. (2022) On Subdifferentials via a Generalized Conjugation Scheme: An Application to DC Problems and Optimality Conditions. *Set-Valued and Variational Analysis*, **30**, 1313-1331. https://doi.org/10.1007/s11228-022-00644-1

[14] 魏俊林, 游曼雪. 一类DC复合优化问题的Fenchel C-conjugate对偶理论[J]. 内江师范学院学报, 2024, 39(8): 28-34.

[15] Martínez-Legaz, J.E. and Vicente-Pérez, J. (2011) The E-Support Function of an E-Convex Set and Conjugacy for E-Convex Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **376**, 602-612. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.10.058

[16] Fajardo, M.D., Vicente-Pérez, J. and Rodríguez, M.M.L. (2011) Infimal Convolution, c-Subdifferentiability, and Fenchel Duality in Evenly Convex Optimization. *TOP*, **20**, 375-396. https://doi.org/10.1007/s11750-011-0208-6

[17] Martínez-Legaz, J.E. (2005) Generalized Convex Duality and Its Economic Applications. In: Hadjisavvas, N., Komlósi, S. and Schaible, S., Eds., *Nonconvex Optimization and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, 237-292. https://doi.org/10.1007/0-387-23393-8_6

[18] Fang, D.H. and Zhao, X.P. (2014) Local and Global Optimality Conditions for DC Infinite Optimization Problems. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **18**, 817-834. https://doi.org/10.11650/tjm.18.2014.3888

[19] Fang, D. and Chen, Z. (2013) Total Lagrange Duality for DC Infinite Optimization Problems. *Fixed Point Theory and Applications*, **2013**, Article No. 269. https://doi.org/10.1186/1687-1812-2013-269