Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(7), 189-196**
Published Online July 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.147356

Hans汉斯

次模性在极小图类结构研究中的应用

李珊珊 [1]，**张赞波** [1,2*]，**李天钥** [1]

[1] 广东财经大学，统计与数据科学学院，广东 广州
[2] 广东财经大学，人工智能与深度学习研究所，广东 广州

收稿日期：2025 年 6 月 17 日；录用日期：2025 年 7 月 9 日；发布日期：2025 年 7 月 18 日

摘 要

本文运用邻域函数的次模性，结合关键集、紧集等概念，构建了一种分析极小图类最小度的统一方法，并运用该方法证明了极小 k -可扩二部图中必然存在度数为 $k+1$ 的顶点，以及极小强 k-连通图中必然存在出度数/入度数为 k 的顶点。本研究提出的方法为极小图结构的分析提供了新的组合论视角，为极小临界图最小度的猜想提供了理论支撑。

关键词

极小 k-可扩二部图，极小 k-强连通图，次模性，最小度

Applications of Submodularity in the Structure Analysis of Minimal Graphs

Shanshan Li[1], **Zanbo Zhang**[1,2*], **Tianyue Li**[1]

[1]School of Statistics and Data Science, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou Guangdong
[2]Institute of Artificial Intelligence and Deep Learning, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou Guangdong

Received: Jun. 17th, 2025; accepted: Jul. 9th, 2025; published: Jul. 18th, 2025

* 通讯作者。

文章引用: 李珊珊, 张赞波, 李天钥. 次模性在极小图类结构研究中的应用 [J]. 应用数学进展, 2025, 14(7): 189-196.
DOI: 10.12677/aam.2025.147356

Abstract

In this paper, we use the submodularity of neighbourhood functions, combined with the concepts of key set and tight set, to develop a unified method for analysing the minimum degree of minimal graphs, and apply the method to prove the existence of vertices of degree $k+1$ in minimally k-extendable bipartite graphs as well as vertices of out-degree or in-degree k in minimally strongly k-connected graphs. The methods proposed in this work provide a new combinatorial perspective for the structure analysis of minimal graphs, and provide theoretical support for the conjecture on the minimum degree of minimal critical graphs.

Keywords

Minimally k-Extendable Bipartite Graphs, Minimally Strongly k-Connected Graphs, Submodularity, Minimum Degree

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言与符号定义

在结构图论的研究中, 时常考虑关于某个性质的极小图类. 一般而言, 假设 P 是图的某个性质, 如果一个图 G 具有性质 P, 但是对于 G 中任意一条边 e, $G-e$ 不满足性质 P, 则称 G 是关于性质 P 的**极小图**. 例如, 若 P 为 k-连通性, 则 G 称为极小 k-连通图.

极小图类在结构分析和网络设计中都有应用. 假设 G 具有某个图性质 P, 并假设 P 具有对于边的**单调性**, 即若 P 对于 G 成立, 则对于 $G+uv$ 也成立, 其中 u,v 是 G 中不相邻的两个顶点. 如果要对 G 作进一步的结构分析, 常常可以直接假设其为极小图. 而在网络设计中, 如果我们需要设计具有某种性质的网络, 则使用极小图作为网络拓扑结构无疑能够节省成本.

次模性（submodularity）是组合优化中运用广泛的一种性质. 令 S 为一个集合. 对于集合函数 $f:2^S\to\mathbb{R}$, 若对任意子集 $X,Y\subseteq S$ 满足

$$f(X)+f(Y)\geq f(X\cup Y)+f(X\cap Y), \tag{1.1}$$

则称 f 具有次模性.

本文运用次模性分析极小 k-可扩二部图和极小强 k-连通有向图的结构, 得到关于它们最小度的刻画. 这些结论是已知的, 但是现有的证明均基于纯结构方法. 基于次模性来证明这些结论, 是新

的方法, 其证明过程比原有的证明更简洁. 本文期望通过这些证明, 探索运用次模性处理极小图类度数的技术, 为其他极小图类上相应的未解决问题, 如极小 k-可扩一般图和极小 p-因子临界图的最小度猜想提供新的思路.

我们将一般无向图记为 $G=(V;E)$, 二部无向图记为 $G=(B,W;E)$, 有向图记为 $D=(V;A)$, 其中 V 是顶点集, 在二部图中 V 分为两个部 B 和 W, E 为无向图的边集, A 为有向图的弧集.

2. 邻域势函数的次模性

对无向图 $G=(V;E)$ 以及顶点的子集合 $X\subseteq V$, 定义 $N(X)$ 为 X 中顶点的所有不属于 X 的邻居的集合. 将 $N(X)$ 的势 $|N(X)|$ 视为 X 上的函数.

对于有向图 $D=(V;A)$ 以及顶点的子集合 $X\subseteq V$, 定义 $N^+(X)$ 为 X 中顶点的所有不属于 X 的出邻居的集合. 同样将 $N^+(X)$ 的势 $|N^+(X)|$ 视为 X 上的函数.

引理 2.1. *$|N(X)|$ 是次模函数, 即对任意 $X,Y\subseteq V$, 有:*

$$|N(X)|+|N(Y)|\geq|N(X\cap Y)|+|N(X\cup Y)|. \tag{2.2}$$

证明. 令 $Z=X\cap Y$，$X_1=X\setminus Z$，$Y_1=Y\setminus Z$，那么 $X=X_1\cup Z$ 与 $Y=Y_1\cup Z$，并且：

$$\begin{aligned}
|N(X)| &= |N(X_1)\setminus N(Z)|+|N(Z)|,\\
|N(Y)| &= |N(Y_1)\setminus N(Z)|+|N(Z)|,\\
|N(X\cup Y)| &= |N(X_1)\cup N(Y_1)\setminus N(Z)|+|N(Z)|,\\
|N(X\cap Y)| &= |N(Z)|.
\end{aligned}$$

由集合运算规则可知，

$$\begin{aligned}
&N(X_1)\cup N(Y_1)\setminus N(Z)\\
&=(N(X_1)\cup N(Y_1))\cap\overline{N(Z)}\\
&=(N(X_1)\cap\overline{N(Z)})\cup(N(Y_1)\cap\overline{N(Z)})\\
&=(N(X_1)\setminus N(Z))\cup(N(Y_1)\setminus N(Z))
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&|(N(X_1)\cup N(Y_1))\setminus N(Z)|\\
&=|(N(X_1)\setminus N(Z))\cup((N(Y_1)\setminus N(Z))|\\
&\leq|N(X_1)\setminus N(Z)|+|N(Y_1)\setminus N(Z)|
\end{aligned}$$

从而，

$$|N(X_1)\setminus N(Z)|+|N(Y_1)\setminus N(Z)|-|(N(X_1)\cup N(Y_1))\setminus N(Z)|\geq 0$$

故 (2.2) 式成立. □

在上述证明中用 $N^+(X)$ 代替 $N(X)$, 可以推导出有向图中出邻域的势也是次模函数.

引理 2.2. $|N^+(X)|$ 是次模函数，即对任意 $X,Y \subseteq V$，有：

$$|N^+(X)| + |N^+(Y)| \geq |N^+(X \cap Y)| + |N^+(X \cup Y)|. \tag{2.3}$$

3. 极小 k-可扩二部图的最小度

匹配理论中对匹配结构的一种基本分析方法是基于图的最大匹配对其进行分解 (即 Gallai-Edmonds 分解, 见 [1]), 得到若干个基本的子图类, 并将研究重点聚焦于这些图类. 这些图类包括了因子临界图, 双因子临界图和 1-可扩图. 为了深入研究这些图类, Plummer([2]) 定义了一般的 k-可扩图, Favaron([3]) 和于青林 ([4]) 独立地定义了一般的 p-因子临界图. 具体定义如下.

定义 3.1. 设 $G = (V;E)$ 为一个图. 若 G 的任意大小为 k 的匹配均可扩展为完美匹配，则称 G 为**k-可扩图**. 若 G 是 k-可扩图并且任意去掉一条边其 k-可扩性不成立, 则称 G 为**极小 k-可扩图**. 若在上述定义中限制 G 为二部图, 则 G 分别称为**k-可扩二部图**和 **极小 k-可扩二部图**.

定义 3.2. 设 $G = (V;E)$ 为一个具有 n 个顶点的图. 给定正整数 $p \leq n$, 若对于任意大小为 p 的顶点集合 $X \subseteq V$, $G - X$ 均有完美对集, 则 G 称为一个 **p-因子临界图**. 若 G 是 p-因子临界图并且任意去掉一条边其 p-因子临界性不成立, 则称 G 为**极小 p-因子临界图**.

本节利用邻域势函数的次模性证明极小 k-可扩二部图中具有 $k+1$ 度点. 为了利用 $|N(X)|$ 的次模性, 以下对于 k-可扩二部图的刻画非常重要.

定理 3.3 (Plummer [5])**.** 二部图 $G = (B,W;E)$ 是 k-可扩的当且仅当 G 满足:

1. $|B| = |W|$;
2. 对任意非空子集 $X \subseteq B$ 且 $|X| \leq |B| - k$, 有 $|N(X)| \geq |X| + k$.

其中，若 $X \subseteq B$ 使得 $|N(X)| = |X| + k$ 成立, 则称 X 为**紧集**.

在一个极小 k-可扩二部图 G 中, 如果我们删除任意一条边 uv, 那么 G 就不再是 k-可扩的. 因此由定理3.3可知，

引理 3.4. 设 $G = (B,W;E)$ 为极小 k-可扩二部图. 对任意边 $uv \in E(G)$, 其中 $u \in B$ 和 $v \in W$, 存在 $X_{uv} \subseteq B$ 满足:

1. $|N_G(X_{uv})| = |X_{uv}| + k$;
2. $|N_{G-uv}(X_{uv})| = |X_{uv}| + k - 1$.

这意味着 v 和 u 相邻, 但不与 $X_{uv}\backslash\{u\}$ 相邻, 把这样的集合 X_{uv} 称为 uv 的**关键集**. 对每一条边 uv 都存在至少一个关键集, 而且关键集一定是紧集.

证明. 由 G 为极小 k-可扩二部图可以知道 $G - uv$ 不是 k-可扩的. 由定理3.3, 存在集合 X_{uv} 使得 $|N_{G-uv}(X_{uv})| \leq |X_{uv}| + k - 1$, 因此 $|N_G(X_{uv})| \leq |X_{uv}| + k$. 但是 G 为 k-可扩二部图, 再由定理3.3知道 $|N_G(X_{uv})| \geq |X_{uv}| + k$, 因此等号成立即 $|N_G(X_{uv})| = |X_{uv}| + k$, 并且 $|N_{G-uv}(X_{uv})| = |X_{uv}| + k - 1$. 故 X_{uv} 是紧集. 去掉边 uv 以后, X_{uv} 的邻居大小减少 1, 这意味着 u 在 X_{uv} 中, 并且在 X_{uv} 的所有顶点中, 仅有 u 与 v 相邻. □

定理 3.5. 令 $G = (B,W;E)$ 是一个极小 k-可扩二部图, 则 G 中至少有一个度为 $k+1$ 的顶点.

证明. 考虑 G 中一个最小的紧集 S. 如果 $|S| = 1$, 即 S 只含一个顶点, 那么这个顶点的度数为 $k+1$, 结论得证. 假设 $|S| \geq 2$, 并不妨设 $S \subseteq B$ (假如 $S \subseteq W$, 则更换 B 和 W 的记号即可).

取 S 中的点 u_0，考虑与 u_0 关联的某一条边 u_0v_0. 因为 S 是一个最小的紧集, 所以 $S\setminus\{u_0\}$ 不再是紧集, 那么便有

$$|N(S\setminus\{u_0\})|>|S\setminus\{u_0\}|+k=|S|+k-1=|N(S)|-1.$$

然而 $|N(S\setminus\{u_0\})|\leq|N(S)|$, 因此等号成立即 $|N(S\setminus\{u_0\})|=|N(S)|$, 而且 v_0 与 $S\setminus\{u_0\}$ 相邻. 由引理3.4可知 S 不可能是 u_0v_0 的关键集.

现在取另一个紧集 S_0, 使 S_0 为 u_0v_0 的关键集. 由引理3.4可知, 这样的 S_0 总是存在的. 由于 $u_0\in S_0$，$S_0\cap S\neq\phi$. 又由于 S 是最小的紧集, 不能有 $S_0\subseteq S$. 另一方面，也不能有 $S\subseteq S_0$, 这是因为 v_0 与 $S\setminus u_0$ 相邻, 即 v_0 在 $S\setminus u_0$ 中有一个邻居, 但 v_0 并不与 $S_0\setminus u_0$ 相邻, 即这个邻居不在 $S_0\setminus u_0$ 中.

现在对于 S 与 S_0, 有 $S_0\cap S\neq\phi$，$S\nsubseteq S_0$, 以及 $S_0\nsubseteq S$. 所以 $S_0\cap S$ 是一个比 S 小的非空集合. 由 $|N(X)|$ 函数的次模性, 可以得

$$\begin{aligned}k+|S|+k+|S_0|&=|N(S)|+|N(S_0)|\\&\geq|N(S\cap S_0)|+|N(S\cup S_0)|\\&\geq k+|S\cap S_0|+k+|S\cup S_0|\end{aligned}$$

但是 $|S|+|S_0|=|S\cap S_0|+|S\cup S_0|$, 故此所有的等号成立. 特别是 $|N(S\cap S_0)|=k+|S\cap S_0|$, 这就意味着 $S\cap S_0$ 是个比 S 更小的紧集, 矛盾.

因此假设 $|S|\geq2$ 不能成立. 故 $|S|=1$，即 S 恰包含一个 $(k+1)$-度点. □

4. 极小强 k-连通有向图的最小度

一个有向图 D 称为是**强连通**的, 如果对于 D 中任意的两个顶点 u 和 v, 存在从 u 到 v 的有向路径和从 v 到 u 的有向路径. 一个有向图 $D=(V;A)$ 称为是**强k-连通**的, 如果 $|V|\geq k+1$, 并且对于任意使得 $D-S$ 非强连通的顶点子集 $S\subset V$ 均有 $|S|\geq k$. 如果 D 是强 k-连通的, 并且任意去掉一条弧, D 不再是强 k-连通的, 那么称 D 为**极小强k-连通**的.

令 X 和 Y 是有向图 D 中两个不相交的顶点子集. 如果没有弧从 X 指向 Y, 那么称 (X,Y) 为一个**单向对**. 对于单向对 (X,Y), 令 $h(X,Y)=|V-X-Y|$. Frank 和 Jordán 对于强 k-连通有向图有如下的刻画.

定理 4.1 (Frank 和 Jordán [6])**.** 假设 D 是有向图, 则 D 是强 k-连通的当且仅当对于 D 中任意的单向对 (X,Y), $h(X,Y)\geq k$.

我们证明上述刻画实际上等价于下面的定理, 以便于运用次模性来证明 k-度点的存在性.

定理 4.2. D 是有向图, 则 D 是强 k-连通的当且仅当 $N^+(X)\geq k$ 对于任意的 $X\subseteq V(D)$ 和 $|X|\leq|V|-k$ 成立.

证明. 由定理4.1, 只需要证明对于 D 中任意的单向对 (X,Y), $h(X,Y)\geq k$ 当且仅当 $N^+(X)\geq k$ 对于任意的 $X\subseteq V(D)$ 和 $|X|\leq|V|-k$ 成立.

若对于 D 中任意的单向对 (X,Y), 均有 $h(X,Y)\geq k$. 假设 $X\subseteq V(D)$ 满足 $|X|\leq|V|-k$. 若 $N^+(X)=V-X$, 则 $|N^+(X)\geq|V|-(|V|-k)=k$. 否则 $V-X-N^+(X)$ 非空, 考虑单向对 $(X,V-X-N^+(X))$, 有 $|N^+(X)|=h(X,V-X-N^+(X))\geq k$.

反之设 $N^+(X) \geq k$ 对于任意的 $X \subseteq V(D)$ 和 $|X| \leq |V| - k$ 成立. 对于一个单向对 (X, Y) 而言, X 中顶点的所有不在 X 中的出邻居都在 $V - X - Y$ 中, 因此 $h(X, Y) = |V - X - Y| \geq N^+(X) \geq k$. □

类似于匹配可扩图的情况, 我们把满足 $N^+(X) = k$ 的 X 称为**紧集**, 其中 $X \subseteq V(D)$ 和 $|X| \leq |V| - k$. 可以得到以下引理.

引理 4.3. 对于一个极小强 k-连通有向图和图中任意一条弧 uv, 存在一个集合 $X_{uv} \subseteq V$ 使得 $N_D^+(X_{uv}) = k$ 但是 $N_{D-uv}^+(X_{uv}) = k - 1$. 其中 $u \in X_{uv}$, $v \notin X_{uv}$, X_{vu} 中仅有 u 点有发向 v 的出弧. X_{uv} 称为 uv 的**关键集**.

证明. 由 D 的极小性可知道 $D - uv$ 不是强 k-连通有向图, 由定理4.2, 存在一个集合 $X_{uv} \subseteq V$ 使得 $N_{D-uv}^+(X_{uv}) \leq k - 1$. 但由于 D 是强 k-连通有向图, 再由定理4.2知道 $N_D^+(X_{uv}) \geq k$, 从而 $N_{D-uv}^+(X_{uv}) \geq k - 1$, 故等号成立即 $N_{D-uv}^+(X_{uv}) = k - 1$, 以及 $N_D^+(X_{uv}) = k$. 并且 $u \in X_{uv}$, $v \notin X_{uv}$, X_{vu} 中仅有 u 点有发向 v 的出弧. □

定理 4.4. 令 $D = (V; A)$ 是一个极小强 k-连通有向图, 则 D 中至少有一个出度为 k 的顶点.

证明. 考虑 D 中最小的一个紧集 X, 使得 $N^+(X) = k$. 如果 X 只包含一个顶点 x, 则 x 的出度为 k, 结论成立.

假设 X 中至少有两个点. 取 X 中的一个顶点 u_0, 使得 u_0 有一个出邻居 v_0 不在 X 中. 由于 X 是最小的紧集, $X - \{u_0\}$ 不是紧集, $|N^+(X - \{u_0\})| \geq k + 1$, 这意味着 $N^+(X - \{u_0\})$ 包含 v_0 和 u_0. 因此有 $|N_{D-u_0v_0}^+(X)| = |N_D^+(X)| = k$, X 不能是 u_0v_0 的关键集.

取 u_0v_0 的一个关键集 Y. 则 Y 是一个紧集. 由于 X 是最小的紧集, $Y \nsubseteq X$. 另一方面 $X \nsubseteq Y$, 这是因为 $N^+(X - \{u_0\})$ 包含 v_0, 即 v_0 在 $N^+(X - \{u_0\})$ 中有一个入邻居 w, 然而根据引理4.3, Y 中只有 u_0 指向 v_0, 从而 $w \notin Y$.

于是 X 和 Y 互相不包含但它们有公共顶点 u_0, 从而 $X \cap Y$ 非空并且严格小于 X. 并且

$$\begin{aligned} 2k &= |N^+(X)| + |N^+(Y)| \\ &\geq |N^+(X \cap Y)| + |N^+(X \cup Y)| \\ &\geq 2k, \end{aligned}$$

因此所有等号成立, 特别地 $|N^+(X \cap Y)| = k$, 则 $X \cap Y$ 是一个比 X 小的紧集, 这与 X 的选取矛盾, 因此 X 不可能包含两个以上的顶点. □

由对称性可以知道以下结论成立.

定理 4.5. 令 $D = (V; A)$ 是一个极小强 k-连通有向图, 则 D 中至少有一个入度为 k 的顶点.

5. 结语

我们运用了集合势函数 $|N(X)|$ 的次模性证明了本文的结论. 我们指出以下用结构化方法证明的结论.

娄定俊 ([7]) 证明了极小 k-可扩二部图中具有 $k + 1$ 度点, 并且对于 $k + 1$ 度点的数目做出了估算. 其具体的结论如下.

定理 5.1 (娄定俊 [7]). 令 $G=(B,W;E)$ 是一个极小 k-可扩二部图，则 B 中至少有 $k+2$ 个度为 $k+1$ 的顶点.

在极小强 k-连通图中也有类似的结论.

定理 5.2 (Mader [8]). 每一个极小强 k-连通有向图包含至少 $k+1$ 个出度为 k 的顶点和至少 $k+1$ 个入度为 k 的顶点.

可见, 这个结论并不优于用结构化方法证明的结论. 但我们的目标是运用本文的思路，通过找到其他满足次模性的函数，为以下两个未解决的猜想的解答提供方法.

猜想 5.1 ([9]). 极小 k-因子临界图必定有一个 $(k+1)$-度点.

猜想 5.2 ([10]). 极小 k-可扩一般图的最小度为 $k+1$, $2k$ 或者 $2k+1$.

k-可扩一般图和 k-因子临界图的刻画多为 Tutte 类型定理, 例如下述对于 k-因子临界图的刻画. 注意其中当 $k=0$ 时即为图中完美匹配存在性的经典 Tutte 条件.

定理 5.3 ([3]). 以 $c_o(H)$ 代表一个图 H 中奇分支的数目. 一个有 n 个顶点的图 G 是 k-因子临界的当且仅当 n 与 k 具有相同的奇偶性, 且

$$c_o(G-S)\leq |S|-k$$

对于所有的 $S\subseteq V(G)$ 和 $|S|\geq k$ 成立.

要运用次模性研究极小 k-可扩一般图和极小 k-因子临界图, 可以从两方面考虑. 一方面, 可以探索如何给出这两个图类运用顶点邻集的刻画; 另一方面, 可以考虑如何从 Tutte 类型刻画中找出具有次模性的结构.

基金项目

获广东省基础与应用基础研究基金 (2024A1515012286) 资助。

参考文献

[1] Plummer, M.D. and Lovász, L. (1986) Matching Theory (Vol. 29). Elsevier.

[2] Plummer, M.D. (1980) On n-Extendable Graphs. *Discrete Mathematics*, **31**, 201-210. https://doi.org/10.1016/0012-365x(80)90037-0

[3] Favaron, O. (1996) On k-Factor-Critical Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **16**, 41-51. https://doi.org/10.7151/dmgt.1022

[4] Yu, Q. (1993) Characterizations of Various Matching Extensions in Graphs. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **7**, 55-64.

[5] Plummer, M.D. (1986) Matching Extension in Bipartite Graphs. *Congressus Numerantium*, **54**, 245-258.

[6] Frank, A. and Jordan, T. (1995) Minimal Edge-Coverings of Pairs of Sets. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **65**, 73-110. https://doi.org/10.1006/jctb.1995.1044

[7] Lou, D. (1999) On the Structure of Minimally n-Extendable Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **202**, 173-181. https://doi.org/10.1016/s0012-365x(98)00291-x

[8] Mader, W. (2002) On Vertices of Outdegree n in Minimally n-Connected Digraphs. *Journal of Graph Theory*, **39**, 129-144. https://doi.org/10.1002/jgt.10018

[9] Favaron, O. and Shi, M. (1998) Minimally k-Factor-Critical Graphs. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **17**, 89-97.

[10] Lou, D. and Yu, Q. (2004) Connectivity of k-Extendable Graphs with Large k. *Discrete Applied Mathematics*, **136**, 55-61. https://doi.org/10.1016/s0166-218x(03)00198-7