

测度神经网络的同步问题

金凡

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2025 年 11 月 23 日; 录用日期: 2025 年 12 月 17 日; 发布日期: 2025 年 12 月 26 日

摘要

本文提出了一种创新框架, 用于分析神经网络中的同步问题。该框架采用测度微分方程 (MDEs), 能有效刻画实际系统固有的不连续特性和动态行为。由于测度函数的引入, 以及系统不连续点的存在, 传统的同步分析方法需重新审视, 并配以专门的计算手段。本研究的核心贡献在于, 在测度微分方程框架下建立了新的李雅普诺夫定理, 据此为系统构造了与之相适应的李雅普诺夫函数。这项工作不仅深化了对神经网络同步机理的理论认识, 也彰显了测度理论在复杂网络分析中的重要性。

关键词

同步, 李雅普诺夫定理, 测度

Measure Neural Network Synchronization

Fan Jin

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: November 23, 2025; accepted: December 17, 2025; published: December 26, 2025

Abstract

This paper proposes an innovative framework for analyzing synchronization in neu-

ral networks by employing measure differential equations (MDEs), which effectively capture discontinuities and dynamic behaviors inherent in real-world systems. The incorporation of measure functions necessitates a re-evaluation of traditional synchronization analysis, as the presence of discontinuity points demands specialized computational approaches. A key contribution of this work is the development of a new Lyapunov theorem within the MDE framework, which facilitates the construction of a tailored Lyapunov function for the system. This study advances the theoretical understanding of synchronization in neural networks and underscores the significance of integrating measure theory into the analysis of complex networks.

Keywords

Synchronization, Lyapunov Theorem, Measure

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

现实世界中的复杂网络（例如大脑神经网络）由众多交互实体构成，这些实体的动态行为同时受其内部状态与交互模式的影响。当前，复杂系统研究已越来越依赖网络分析方法。早期研究主要借助简化图模型，重点探究网络的拓扑结构。这类研究揭示了诸多全局特征，例如小世界特性 [1] 和无标度分布 [2]，以及被称为“网络模体”的特定子图的存在与否 [3]。这些成果从不同现实网络系统中提炼出了若干基本组织原则 [4]，为理解复杂网络的结构机制奠定了重要基础。

为实现对现实系统的更完整认知，仅研究相互作用拓扑是远远不够的。当前面临的核心挑战在于探索网络结构如何影响其内部的动力学过程。复杂系统中的众多元素均表现出振荡特性，这种特性会引发同步现象——该动力学行为在复杂网络研究中一直备受关注。与大脑动力学密切相关的同步研究 [5] 已成为当前研究的热点领域，特别是在复杂拓扑结构网络上神经元动力学同步这一方向（参见 [6]- [24]）。

另一方面，同步研究面临的核心挑战之一，在于如何准确刻画具有间断性或脉冲效应的复杂动力学行为。这类非连续动态在生物神经网络、电力系统等实际应用中广泛存在，其突变的相轨迹和不可微的特性对传统连续动力学理论构成了严峻挑战。测度微分方程凭借其独特的数学框架，成为描述此类间断动力学行为的理想工具。该理论由 Schmaedeke 于 1965 年提出 [25]，最初用于求解航天器轨道优化等最优控制问题 [26]- [35]，随后逐渐发展成为处理各类间断与混合动力系统

的普适性框架。测度微分方程的核心突破在于引入测度项作为基本分析单元，这一创新使其能够自然刻画状态突变、脉冲激励等非连续现象。相较于经典微分方程要求右端函数满足连续性条件，测度微分方程通过将微分算子推广至测度空间，实现了对更广泛动力学行为的统一描述。这一理论优势使其在混沌系统同步分析中展现出独特价值：当系统存在切换拓扑、脉冲控制等间断因素时，测度微分方程能够精确捕捉这些非连续性对同步过程的量化影响 [36]- [39]。近年来，该框架已在多智能体系统协同控制、神经网络脉冲同步等研究中取得显著成效，为复杂网络同步分析提供了新的理论基础。

总的来说，拓扑分析为我们理解复杂网络结构奠定了重要基础，但要真正把握系统的动态特性——特别是同步现象——就必须将结构分析与动力学研究深度融合。测度微分方程的应用进一步强化了这种交叉研究范式，为复杂系统的分析和控制提供了坚实的数学框架。值得关注的是，这一理论在同步控制领域已取得显著成果。最新研究表明 [40]- [42]，测度微分方程不仅能通过协调发电机组的同步运行来维持电网稳定，还能在生物医学领域通过心脏起搏器的精确控制来恢复正常心律。这些突破性进展不仅展示了该理论在解决实际问题中的强大能力，更凸显了其在工程和医疗等关键领域的重要价值。随着研究的深入，测度微分方程有望在更多复杂系统同步问题中发挥核心作用，为人类应对日益复杂的工程挑战提供新的数学工具。

在取得这些成果的基础上，测度微分方程还在推动复杂动力学系统的建模与分析方面发挥了关键作用。其中，测度神经网络作为一种能够更精确模拟生物神经网络的新型模型，正受到学界日益广泛的关注。

在文献 [43] 中，Lu 提出了一种无时滞的恒等神经网络模型：

$$\dot{y}(t) = -Qy(t) + Bg[y(t)] + I, \quad (1.1)$$

其中 $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ 表示神经元状态向量， $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n) > 0$ 为系统参数矩阵， $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 为连接权矩阵， $I = (I_1, I_2, \dots, I_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 为常值外部输入向量， $g(y(t)) = [g_1(y_1(t)), g_2(y_2(t)), \dots, g_n(y_n(t))]^T \in \mathbb{R}^n$ 为神经元激活函数。

基于上述研究（尤其是 Lu 的工作），为深入探索测度神经网络的潜力，本文提出如下模型：

$$Dy_i(t) = \left(-q_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j[y_j(t)] + I_i \right) Du, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.2)$$

其紧凑形式为：

$$Dy(t) = (-Qx(t) + Bg[y(t)] + I) Du. \quad (1.3)$$

该模型结合了测度微分方程的理论优势，能够更准确地描述忆阻系统中固有的复杂动力学行为与间断特性，从而为理解和控制测度神经网络中的同步现象提供了更有效的理论工具。在生物神经系统中，神经元的电活动表现为连续的子阈值电位波动与离散的动作电位（脉冲）交替出现的混合动力学行为。传统的连续微分方程模型主要描述神经元的连续整合过程，但难以精确刻画动作电位发放的瞬时性和不连续性。本模型中的测度项 Du 通过引入 Dirac 测度，能够自然地描述这种连续演化与离散跳跃共存的现象。具体而言：

- 当 $u(t)$ 的连续部分主导时，系统描述神经元膜电位的连续变化过程；

- 当 $u(t)$ 出现跳跃时，对应神经元产生动作电位的瞬时放电过程;
- 权重系数 a_k 反映了脉冲的强度，模拟不同神经元的放电幅度差异.

除了神经元活动本身，本模型在描述神经网络的器件与结构层面也具有适用性，具体体现在以下两个方面：

1. 忆阻系统的状态突变特性 在忆阻神经网络中，忆阻器的阻值变化具有典型的非连续特性。当通过忆阻器的电荷量达到特定阈值时，其阻值会发生突变，这种突变行为无法用传统的连续动力学充分描述。测度微分方程框架通过测度项 Du 中的原子测度，能够精确捕捉忆阻器状态的瞬时切换，为忆阻神经网络的建模提供了更合适的数学工具。

2. 网络中的突触传递机制 生物神经网络中的突触传递本质上是量子化的脉冲过程，神经递质的释放是离散事件。测度项 Du 中的跳跃部分恰当地模拟了这种脉冲式的信息传递模式，使得模型能够更真实地反映神经网络的信息处理机制。

在本论文中，我们假设测度函数 $u(t)$ 及涉及 g_i (i 取 1 至 n) 的连接项具有以下性质：

$$(i) \quad u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k H_k(t) + t, \quad a_k \geq 0, \quad H_k(t) = \begin{cases} 1, & t \geq t_k, \\ 0, & t < t_k. \end{cases}$$

(ii) 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, $u(t)$ 在区间 $(n, n+1]$ 内的间断点数目不超过 G (密度累积条件)。

(iii) 激活函数 g_i ($1 \leq i \leq n$) 满足 Lipschitz 条件，即存在 Lipschitz 常数 γ_i ($1 \leq i \leq n$) 使得：

$$|g_i(y) - g_i(z)| \leq \gamma_i |y - z|, \quad \forall y, z \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

其中函数 $u(t)$ 被构造为一个标准的、右连续的有界变差函数，其核心组成部分解析如下：

- **线性连续部分** (t): 此项模拟了系统在脉冲时刻之间的连续时间演化动力学，描述了神经元膜电位的自然漏电、输入信号的连续整合等平滑过程。
- **离散跳跃部分** ($\sum_{k=1}^{\infty} a_k H_k(t)$): 此项通过一系列 Heaviside 阶跃函数 $H_k(t)$ 及其权重 a_k ，精确地刻画了发生在离散时间点 $\{t_k\}$ 上的瞬时状态跳跃 (脉冲)。权重 a_k 量化了在 t_k 时刻脉冲作用的强度。

因此， $u(t)$ 的导数 Du 在测度意义下可分解为 $Du = dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{t_k}$ ，其中 dt 是 Lebesgue 测度 (描述连续流)， δ_{t_k} 是集中在 t_k 的 Dirac 点测度 (描述离散脉冲)。这种结构使得模型能够在在一个统一的框架内，同时容纳连续的渐变过程与离散的突变事件。

与脉冲微分方程对比：传统的脉冲微分方程通常将系统表述为“微分方程 + 跳跃映射”的耦合形式，即 $\dot{y}(t) = f(t, y)$, $t \neq t_k$ 与 $\Delta y(t_k) = I_k(y(t_k^-))$, $t = t_k$ 。这种表述人为地将连续流与离散映射分离开，在理论分析 (如稳定性证明) 时常需分别处理，过程繁琐。相比之下，本文的 MDE 模型通过引入测度 Du ，将这两种演化模式统一在一个紧凑的微分形式中，极大地简化了系统的数学描述，并为同步性分析提供了更直接、更统一的 Lyapunov 框架。

在文献 [43] 中, Lu 运用不变原理构造了如下 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2}e^T(t)e(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}(\varepsilon_i + l)^2. \quad (1.5)$$

通过动态增强耦合强度, 成功实现了两个耦合神经网络的同步。

本研究主要探讨测度神经网络中的同步问题。目前学界尚未系统研究该类系统的同步机制, 在引入测度函数后, 系统的不连续性体现为参数 $a_k, (k = 1, 2, \dots)$ 的引入, 需要采用适用于测度微分方程的计算方法处理间断点。现有针对无时滞恒等神经网络建立的 Lyapunov 函数及计算方法, 由于未考虑测度方程特有的间断特性, 难以直接应用于本研究模型。

为此, 我们将在提出新模型的基础上, 尝试建立适用于测度神经网络系统的分析方法。具体而言, 拟在测度微分方程框架下构建相应的 Lyapunov 函数, 并探索系统的同步条件。这项工作旨在为理解测度神经网络的同步特性提供新的分析思路。

2. 初步结果

下面将介绍证明过程中需要使用的若干关键符号与核心理论框架。这些基础性内容为后续论证的展开提供了必要的理论支撑。

测度微分方程通常表示为 (参见文献 [44])

$$Dz = f_1(z, t) + f_2(z, t)Du, \quad (2.1)$$

其中 $t \in (a, b)$, Dy 与 Du 表示分布导数。该具有初始条件 $z(t_0) = z_0$ 的方程组在数学上等价于:

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t f_1(z(s), s)ds + \int_{t_0}^t f_2(z(s), s)du(s),$$

对任意 $t \in (a, b)$.

Lemma 2.1. (P153, 定理 2, [45]) 设 $z^*(\cdot, t, z)$ 为通过 (t, z) 的 (2.1) 的解, 则

$$z^*(t, t_0, z_0) - z^*(t^-, t_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{t-h}^t f_1(s, z^*(s, t_0, z_0))ds + \int_{t-h}^t f_2(s, z^*(s, t_0, z_0))du(s) \right\}.$$

我们首先考虑由下式定义的正集函数 μ :

$$\mu(F) = \left| \int_F f_2(s, z^*(s, t_0, z_0))du(s) \right|.$$

令 $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \dots > 0$, 且设 $F_k = [t - h_k, t]$, 其中 $h_k \rightarrow 0$ 当 $k \rightarrow \infty$ 。此时有 $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ 且

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = F_0,$$

其中 $F_0 = \{t\}$ 。因此, $\mu(F_k) \rightarrow \mu(F_0)$ (Rudin [46], 定理 1.19(e)), $\mu(F_0) = |f_2(t, y^*(t, t_0, y_0))(u(t) -$

$u(t^-)|$ 。第一项收敛于零可得：

$$|z^*(t, t_0, z_0) - z^*(t^-, t_0, z_0)| = |f_2(t, z^*(t, t_0, z_0))(u(t) - u(t^-))|. \quad (2.2)$$

在通过引理2.1完成必要理论准备的基础上，我们现在可以展开主要定理的证明工作。

3. 基于测度微分方程的 Lyapunov 定理

动力学系统的稳定性分析理论，历来是微分方程研究的重要基石。李雅普诺夫方法作为该领域最具影响力的核心工具之一，在实践中获得了广泛应用。在常微分方程体系下，李雅普诺夫定理构建了一个强有力的分析框架，使研究者无需求解系统显式解即可判定平衡点的稳定性。为与经典理论建立对比基准，我们首先阐述常微分方程系统中的李雅普诺夫定理。

Theorem 3.1. (常微分方程的李雅普诺夫定理) 考虑由以下常微分方程描述的自治系统：

$$\frac{dy}{dt} = g(y), g(0) = 0,$$

其中 $y \in \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续可微函数。

李雅普诺夫定理： 若存在标量函数 $\mathcal{V}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (称为李雅普诺夫函数) 满足：

1. \mathcal{V} 满足正定性条件；
2. 沿系统轨迹， $\dot{\mathcal{V}}$ 为负定函数。

则该平衡点具有渐近稳定性。

该定理的详细证明可参考常微分方程标准文献，包括 [47] 中的论述。

将李雅普诺夫稳定性理论拓展至测度微分方程具有重要意义，因为传统的常微分方程方法在处理具有间断动态的系统时往往存在不足。尽管测度微分方程的李雅普诺夫稳定性理论尚处于发展初期，但建立该理论框架将极大推动对复杂动力系统的理解与控制 [48]- [52]。填补这一理论空白，必将深化我们对动力系统及其应用的认识。

为更好刻画函数在间断点处的行为，我们引入一个仅在间断点处有定义的函数 $l(\cdot)$ ，进而给出如下形式的测度微分方程李雅普诺夫定理：

Theorem 3.2. 若满足以下条件，则系统

$$Dy = g(y, t)Du \quad (3.1)$$

具有渐近稳定性：

1. $\mathcal{V}(y)$ 满足正定性条件；
2. $\dot{\mathcal{V}}(y)$ 在 $t \neq t_k$ 时为负定函数；
3. $\mathcal{V}(y(t_k^-)) > l(a_k) \cdot \mathcal{V}(y(t_k))$ ，其中 $l(a_k) \geq 1$ 。

证明. 采用反证法，假设系统(3.1)不能渐近收敛于平衡点，则存在始于原点 δ 邻域内的解 $y(t)$ ，满

足 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \neq 0$ 。

由条件 (H3) 可得:

$$\mathcal{V}(y(t_k)) - \mathcal{V}(y(t_k^-)) = \left(\frac{1}{l(a_k)} - 1\right) \cdot \mathcal{V}(y(t_k^-)).$$

结合条件 (H3) 可知:

$$\mathcal{V}(y(t_k)) - \mathcal{V}(y(t_k^-)) < 0.$$

联立条件 (H2) 可得 $\mathcal{V}(y(t))$ 为单调递减函数。由单调收敛定理可知:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{V}(y(t)) = \mathcal{V}^*.$$

根据系统零解非渐近稳定的假设, 有:

$$\mathcal{V}(y(t)) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{V}(y(t)) = \mathcal{V}^* > 0. \tag{3.2}$$

由 $\mathcal{V}(y)$ 关于 y 的连续性, 存在正常数 η 满足 $0 < \eta < \varepsilon$, 使得当 $t > t_0$ 时 $\|y(t)\| > \eta$ 。因此, 对所有满足 $\eta \leq \|y\| \leq \varepsilon$ 的 y , 由 $\dot{\mathcal{V}}$ 的负定性可得:

$$\dot{\mathcal{V}}(y(t)) < -\eta < 0, (t \neq t_k). \tag{3.3}$$

当 $t \in [t_0, t_1)$ 时:

$$\mathcal{V}(y(t)) - \mathcal{V}(y(t_0)) < -\eta(t - t_0), t \in [t_0, t_1), \tag{3.4}$$

当 $t = t_1$ 时, 由条件 (H3) 可得:

$$\mathcal{V}(y(t_1)) < \frac{1}{l(a_1)} \cdot \mathcal{V}(y(t_1^-)).$$

显然 $t_1^- \in [t_0, t_1)$, 结合不等式(3.4)可得:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(y(t_1)) &< \frac{1}{l(a_1)} \cdot \mathcal{V}(y(t_1^-)) < -\eta(t_1^- - t_0) \cdot \frac{1}{l(a_1)} + \mathcal{V}(y(t_0)) \cdot \frac{1}{l(a_1)} \\ &= -\eta(t_1 - t_0) \cdot \frac{1}{l(a_1)} + \mathcal{V}(y(t_0)) \cdot \frac{1}{l(a_1)}. \end{aligned}$$

对 $t \in [t_1, t_2)$ 有:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(y(t)) &< -\eta(t - t_1) + \mathcal{V}(y(t_1)) \\ &< -\eta(t - t_1) - \eta(t_1 - t_0) \cdot \frac{1}{l(a_1)} + \mathcal{V}(y(t_0)) \cdot \frac{1}{l(a_1)} \end{aligned}$$

类似地, 对 $t \in [t_2, t_3)$ 有:

$$\mathcal{V}(y(t)) < -\eta(t - t_2) + \mathcal{V}(y(t_2)) < -\eta(t - t_2) + \frac{1}{l(a_2)} \cdot \mathcal{V}(y(t_2^-)).$$

$$\text{由此可得: } \mathcal{V}(y(t_2^-)) < -\eta(t_2^- - t_1) - \eta(t_1 - t_0) \cdot \frac{1}{l(a_1)} + \mathcal{V}(y(t_0)) \cdot \frac{1}{l(a_1)}, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \text{故有 } \mathcal{V}(y(t)) &< -\eta(t - t_2) + \frac{1}{l(a_2)} \cdot \left[-\eta(t_2^- - t_1) - \eta(t_1 - t_0) \cdot \frac{1}{l(a_1)} + \mathcal{V}(y(t_0)) \cdot \frac{1}{l(a_1)} \right] \\ &< -\eta(t - t_2) + \frac{1}{l(a_2)} \cdot \left[-\eta(t_2 - t_1) - \eta(t_1 - t_0) \cdot \frac{1}{l(a_1)} + \mathcal{V}(y(t_0)) \cdot \frac{1}{l(a_1)} \right] \\ &= -\eta(t - t_2) + \frac{1}{l(a_2)} \cdot [-\eta(t_2 - t_1)] - \eta(t_1 - t_0) \cdot \frac{1}{l(a_1)l(a_2)} + \frac{\mathcal{V}(y(t_0))}{l(a_1)l(a_2)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

通过数学归纳法可知, 对 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 有:

$$\mathcal{V}(y(t)) < -\eta(t - t_k) - \eta(t_k - t_{k-1}) \cdot \frac{1}{l(a_k)} - \dots - \eta(t_1 - t_0) \cdot \prod_{n=1}^k \frac{1}{l(a_n)} + \mathcal{V}(y(t_0)) \cdot \prod_{n=1}^k \frac{1}{l(a_n)}.$$

由 $l(a_k) \geq 1, k = 1, 2, \dots$ 可知 $\prod_{k=1}^k \frac{1}{l(a_k)}$ 有界。

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 若间断点 $t = t_k, (k = 1, 2, \dots)$ 为有限个 (设共有 M 个), 则:

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{V}(y(t)) \\ &< \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\eta(t - t_M) - \eta(t_M - t_{M-1}) \cdot \frac{1}{l(a_M)} \dots - \eta(t_1 - t_0) \cdot \prod_{n=1}^M \frac{1}{l(a_n)} + \mathcal{V}(y(t_0)) \cdot \prod_{n=1}^M \frac{1}{l(a_n)} \right] \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

此结果与 $\mathcal{V}(y)$ 的正定性矛盾。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 若间断点无限, 则有:

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{V}(y(t)) \\ &< \lim_{k \rightarrow \infty} \left[-\eta(t - t_k) - \eta(t_k - t_{k-1}) \cdot \frac{1}{l(a_k)} \dots - \eta(t_1 - t_0) \cdot \prod_{n=1}^k \frac{1}{l(a_n)} + \mathcal{V}(y(t_0)) \cdot \prod_{n=1}^k \frac{1}{l(a_n)} \right] \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

此矛盾表明原假设不成立, 故证得系统的渐近稳定性。 □

4. 测度神经网络的自适应同步

接下来我们将讨论两个耦合恒等测度神经网络的自适应同步问题。

我们引入如下两个测度神经网络系统:

$$Dy(t) = (-Qy(t) + Bg[y(t)] + I)Du \tag{4.1}$$

和

$$Dz(t) = (-Qz(t) + Bg[z(t)] + I + \varepsilon \odot [z(t) - y(t)])Du. \tag{4.2}$$

符号 \odot 表示逐元素乘法运算: $\varepsilon \odot y(t) = [\varepsilon_1 \cdot y_1, \varepsilon_2 \cdot y_2, \dots, \varepsilon_n \cdot y_n]$ 。

令 $m(t) = z(t) - y(t)$ 表示误差信号。通过将式(4.2)与式(4.1)相减, 可得误差动力系统:

$$Dm(t) = (-Qm(t) + Bg[m(t)] + \varepsilon \odot m(t))Du, \tag{4.3}$$

其离散形式为:

$$Dm_i(t) = \left[-q_i m_i(t) + \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(m_j(t)) \right) + \varepsilon_i(t) \cdot m_i(t) \right] Du. \tag{4.4}$$

下文将采用如下耦合强度自适应律:

$$\dot{\varepsilon}_i = -\alpha_i m_i^2(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{4.5}$$

其中 $\alpha_i > 0$ 。因此存在正常数 ε_0 使得:

$$\varepsilon_i(t) \leq \varepsilon_0. \tag{4.6}$$

基于引言中条件 (iii) 的 Lipschitz 条件, 可得:

$$g_j(m_j(t)) \leq \gamma_j \cdot (m_j(t)), \quad (j = 1, 2, 3 \dots).$$

令 $h = \max\{\gamma_j | j = 1, 2 \dots\}$, 表示所有 $\gamma_j (j = 1, 2 \dots n)$ 中的最大 Lipschitz 常数。为简化后续证明, 设定:

$$\beta = \sum_{i=1}^n \left(q_i - \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \cdot h - \varepsilon_0 \right).$$

Theorem 4.1. 若系统(4.3)满足以下条件:

(H1) $\beta > 0$.

(H2) $\left(G \cdot \ln \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k} \right) - \beta \right) < 0. (k = 1, 2, \dots)$

则可确保两个耦合的测度神经网络实现同步。

证明. 取李雅普诺夫函数为:

$$\mathcal{V}(m(t)) = \sum_{i=1}^n |m_i(t)| = \sum_{i=1}^n \text{sgn}(m_i(t)) \cdot m_i(t).$$

当 $t \neq t_k$ 时, 其上侧 Dini 导数 $D^+\mathcal{V}$ 由 Lipschitz 条件可得:

$$\frac{D^+\mathcal{V}}{Dt} \leq \sum_{i=1}^n \left[-q_i |m_i(t)| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \cdot h_j \cdot |m_j(t)| \right] + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) \cdot |m_i(t)|.$$

根据(4.6)可得:

$$\begin{aligned} \frac{D^+\mathcal{V}}{Dt} &\leq \sum_{i=1}^n \left[-q_i |m_i(t)| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \cdot h_j \cdot |m_j(t)| \right] + \sum_{i=1}^n \varepsilon_0 \cdot |m_i(t)|. \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-q_i + \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \cdot h_i + \varepsilon_0 \right) \cdot |m_i(t)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(-q_i + \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \cdot h + \varepsilon_0 \right) \cdot |m_i(t)| \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-q_i + \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \cdot h + \varepsilon_0 \right) \cdot \mathcal{V}(t) \quad (t \neq t_k) \end{aligned}$$

简化为:

$$\dot{\mathcal{V}}(m(t)) \leq -\beta \cdot \mathcal{V}(m(t)) \quad (t \neq t_k, \beta > 0). \tag{4.7}$$

接下来考虑 $t = t_k$ 的情形, 由公式(2.2)可得:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(m(t_k)) - \mathcal{V}(m(t_k^-)) &= \sum_{i=1}^n (|m_i(t_k)| - |m_i(t_k^-)|) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |m_i(t_k) - m_i(t_k^-)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(q_i - \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \cdot h - \varepsilon_0 \right) \cdot a_k \cdot |m_i(t_k)| \\ &= (\beta \cdot a_k) \cdot \mathcal{V}(m(t_k)) \end{aligned} \tag{4.8}$$

经简单整理可得:

$$\mathcal{V}(m(t_k)) \leq \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k} \right) \cdot \mathcal{V}(m(t_k^-)). \tag{4.9}$$

因此, 由(4.7)、(4.9)及密度累积条件可得:

(C1) $\dot{\mathcal{V}}(m(t)) \leq -\beta \cdot \mathcal{V}(m(t)) \quad (t \neq t_k, \beta > 0)$

(C2) $\mathcal{V}(m(t_k)) \leq \frac{1}{1 - \beta \cdot a_k} \cdot \mathcal{V}(m(t_k^-))$

(C3) 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, $u(t)$ 在区间 $(n, n + 1]$ 内的间断点数目不超过 G 由条件 (C1) 和 (C2) 通过直接计算可得: 当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(m(t)) &\leq \exp(-\beta(t - t_k)) \cdot \mathcal{V}(m(t_k)) \\ &\leq \exp(-\beta(t - t_k)) \cdot \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k} \right) \cdot \mathcal{V}(m(t_k^-)) \end{aligned}$$

其中 $t_k^- \in [t_{k-1}, t_k)$, 依此类推可得:

$$\mathcal{V}(m(t)) \leq \exp(-\beta(t - t_k)) \cdot \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right) \cdot \exp(-\beta(t_k^- - t_{k-1})) \cdot \mathcal{V}(m(t_{k-1})).$$

使用数学归纳法可证, 当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(m(t)) &\leq \exp(-\beta(t - t_k)) \cdot \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right) \cdot \exp(-\beta(t_k^- - t_{k-1})) \cdot \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right) \\ &\quad \cdots \cdot \exp(-\beta(t - t_0)) \cdot \mathcal{V}(m(t_0)) \\ &= \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right) \cdot \exp(-\beta(t - t_0)) \cdot \mathcal{V}(m(t_0)). \end{aligned}$$

根据条件 (C3):

$$\begin{aligned} \prod_{t \geq t_0} \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right) &\leq \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right)^{G([t-t_0]+1)} \\ &= \exp\left(G([t - t_0] + 1) \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right)\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right)^G \cdot \exp\left(G(t - t_0) \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right)\right). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{V}(m(t)) &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right)^G \cdot \exp\left(G(t - t_0) \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right)\right) \\ &\quad \cdot \exp(-\beta(t - t_0)) \cdot \mathcal{V}(m(t_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right)^G \cdot \exp\left\{\left(G \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - \beta \cdot a_k}\right) - \beta\right) \cdot (t - t_0)\right\} \cdot \mathcal{V}(m(t_0)). \end{aligned}$$

由条件 (H2) 可得最终结论:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{V}(m(t)) = 0.$$

这表明 $m(t)$ 是全局指数稳定的。 □

Example 4.2. 我们考虑一个一维 MDE 的情况:

$$\begin{cases} Dy(t) = \left[-y(t) + \frac{\sin y(t)}{3 + \cos(y(t))}\right] Du(t), \\ Dz(t) = \left[-z(t) + \frac{\sin z(t)}{3 + \cos(z(t))} + \varepsilon \odot [y(t) - z(t)]\right] Du(t) \end{cases} \quad (4.10)$$

$$u(t) = t + \sum_{i=1}^{\infty} H_i(t) \text{ 且 } H_i(t) = \begin{cases} 1, & t \geq i, \\ 0, & t < i. \end{cases}$$

那么，误差动力系统为

$$Dm(t) = \left[-m(t) + \frac{\sin m(t)}{3 + \cos m(t)} + \varepsilon \odot [m(t)] \right] Du(t)$$

耦合强度 ε 的自适应律如下： $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{3 \cdot m(t)}$ ，这等价于

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \ln(m(t)). \quad (4.11)$$

数值仿真实验验证：

如图 1 所示，在 MATLAB 仿真环境中，我们通过系统地配置满足定理约束条件的参数集，对测度神经网络系统的动力学轨迹进行了高精度数值模拟。仿真实验设置了多组对照参数，分别考察了系统在连续阶段与脉冲时刻的同步演化特性。数值结果清晰展示了状态误差随时间收敛的动态过程，这不仅验证了理论分析中关于渐近稳定性的结论，还揭示了系统在不同脉冲强度下的同步收敛速率变化规律，为理论框架提供了有力的数据支撑图。

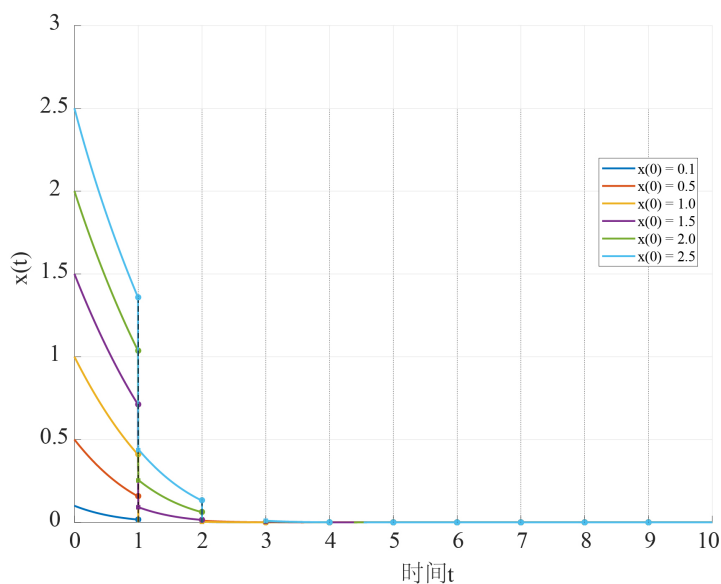


Figure 1. Numerical simulation verification results

图 1. 数值仿真实验验证结果

参考文献

- [1] Barabási, A. and Albert, R. (1999) Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, **286**, 509-512. <https://doi.org/10.1126/science.286.5439.509>

-
- [2] Chen, G. and Dong, X. (1998) From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/3033>
- [3] Milo, R., Shen-Orr, S., Itzkovitz, S., Kashtan, N., Chklovskii, D. and Alon, U. (2002) Network Motifs: Simple Building Blocks of Complex Networks. *Science*, **298**, 824-827. <https://doi.org/10.1126/science.298.5594.824>
- [4] Watts, D.J. and Strogatz, S.H. (1998) Collective Dynamics of ‘Small-World’ Networks. *Nature*, **393**, 440-442. <https://doi.org/10.1038/30918>
- [5] Moreno, Y. and Pacheco, A.F. (2004) Synchronization of Kuramoto Oscillators in Scale-Free Networks. *Europhysics Letters (EPL)*, **68**, 603-609. <https://doi.org/10.1209/epl/i2004-10238-x>
- [6] Yang, L. and Jiang, J. (2014) Adaptive Synchronization of Drive-Response Fractional-Order Complex Dynamical Networks with Uncertain Parameters. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **19**, 1496-1506. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.09.021>
- [7] Wang, Y., Lu, J., Liang, J., Cao, J. and Perc, M. (2019) Pinning Synchronization of Nonlinear Coupled Lur’e Networks under Hybrid Impulses. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, **66**, 432-436. <https://doi.org/10.1109/tcsii.2018.2844883>
- [8] Yang, X., Cao, J. and Liang, J. (2017) Exponential Synchronization of Memristive Neural Networks with Delays: Interval Matrix Method. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **28**, 1878-1888. <https://doi.org/10.1109/tnnls.2016.2561298>
- [9] Rulkov, N.F., Sushchik, M.M., Tsimring, L.S. and Abarbanel, H.D.I. (1995) Generalized Synchronization of Chaos in Directionally Coupled Chaotic Systems. *Physical Review E*, **51**, 980-994. <https://doi.org/10.1103/physreve.51.980>
- [10] Restrepo, J.G., Ott, E. and Hunt, B.R. (2005) Onset of Synchronization in Large Networks of Coupled Oscillators. *Physical Review E*, **71**, Article 036151. <https://doi.org/10.1103/physreve.71.036151>
- [11] Pecora, L.M. and Carroll, T.L. (1990) Synchronization in Chaotic Systems. *Physical Review Letters*, **64**, 821-824. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.64.821>
- [12] Cao, J. and Li, R. (2017) Fixed-Time Synchronization of Delayed Memristor-Based Recurrent Neural Networks. *Science China Information Sciences*, **60**, Article No. 032201. <https://doi.org/10.1007/s11432-016-0555-2>
- [13] Wang, H., Liu, P.X. and Liu, S. (2017) Adaptive Neural Synchronization Control for Bilateral Teleoperation Systems with Time Delay and Backlash-Like Hysteresis. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **47**, 3018-3026. <https://doi.org/10.1109/tycb.2016.2644656>
- [14] Li, G. and Liu, H. (2016) Stability Analysis and Synchronization for a Class of Fractional-Order Neural Networks. *Entropy*, **18**, Article 55. <https://doi.org/10.3390/e18020055>
- [15] Liu, S. and Zhou, L. (2015) Network Synchronization and Application of Chaotic Lur’e Systems Based on Event-Triggered Mechanism. *Nonlinear Dynamics*, **83**, 2497-2507. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2498-y>

- [16] Liu, H., Chen, Y., Li, G., Xiang, W. and Xu, G. (2017) Adaptive Fuzzy Synchronization of Fractional-Order Chaotic (Hyperchaotic) Systems with Input Saturation and Unknown Parameters. *Complexity*, **2017**, Article 6853826. <https://doi.org/10.1155/2017/6853826>
- [17] Chen, X., Cao, J., Park, J.H., Huang, T. and Qiu, J. (2018) Finite-Time Multi-Switching Synchronization Behavior for Multiple Chaotic Systems with Network Transmission Mode. *Journal of the Franklin Institute*, **355**, 2892-2911. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2018.01.027>
- [18] Boulkroune, A., Bouzeriba, A., Hamel, S. and Bouden, T. (2014) A Projective Synchronization Scheme Based on Fuzzy Adaptive Control for Unknown Multivariable Chaotic Systems. *Nonlinear Dynamics*, **78**, 433-447. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1450-x>
- [19] Huang, C. and Cao, J. (2017) Active Control Strategy for Synchronization and Anti-Synchronization of a Fractional Chaotic Financial System. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **473**, 262-275. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.01.009>
- [20] Chen, X., Qiu, J., Cao, J. and He, H. (2016) Hybrid Synchronization Behavior in an Array of Coupled Chaotic Systems with Ring Connection. *Neurocomputing*, **173**, 1299-1309. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.09.003>
- [21] Chen, X., Park, J.H., Cao, J. and Qiu, J. (2017) Sliding Mode Synchronization of Multiple Chaotic Systems with Uncertainties and Disturbances. *Applied Mathematics and Computation*, **308**, 161-173. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.03.032>
- [22] Yu, W., Chen, G., Lü, J. and Kurths, J. (2013) Synchronization via Pinning Control on General Complex Networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **51**, 1395-1416. <https://doi.org/10.1137/100781699>
- [23] Yang, X. and Cao, J. (2009) Stochastic Synchronization of Coupled Neural Networks with Intermittent Control. *Physics Letters A*, **373**, 3259-3272. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.07.013>
- [24] Cheng, L., Chen, X., Qiu, J., Lu, J. and Cao, J. (2018) Aperiodically Intermittent Control for Synchronization of Switched Complex Networks with Unstable Modes via Matrix ω -Measure Approach. *Nonlinear Dynamics*, **92**, 1091-1102. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4110-8>
- [25] Schmaedeke, W.W. (1965) Optimal Control Theory for Nonlinear Vector Differential Equations Containing Measures. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, **3**, 231-280. <https://doi.org/10.1137/0303019>
- [26] Yang, T. (2001) Impulsive Systems and Control: Theory and Applications. New York Nova Science Publishers, Inc.
- [27] Liu, J., Hu, J. and Yuen, P. (2020) Extinction and Permanence of the Predator-Prey System with General Functional Response and Impulsive Control. *Applied Mathematical Modelling*, **88**, 55-67. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.033>

- [28] Ning, C., He, Y., Wu, M. and Zhou, S. (2018) Indefinite Lyapunov Functions for Input-to-State Stability of Impulsive Systems. *Information Sciences*, **436**, 343-351. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.01.016>
- [29] Liu, B. (2008) Stability of Solutions for Stochastic Impulsive Systems via Comparison Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **53**, 2128-2133. <https://doi.org/10.1109/tac.2008.930185>
- [30] Huang, T., Li, C., Duan, S. and Starzyk, J.A. (2012) Robust Exponential Stability of Uncertain Delayed Neural Networks with Stochastic Perturbation and Impulse Effects. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **23**, 866-875. <https://doi.org/10.1109/tnnls.2012.2192135>
- [31] Heydari, A. (2021) Optimal Impulsive Control Using Adaptive Dynamic Programming and Its Application in Spacecraft Rendezvous. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **32**, 4544-4552. <https://doi.org/10.1109/tnnls.2020.3021037>
- [32] Hui Ye., Michel, A.N. and Ling Hou, (1998) Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**, 461-474. <https://doi.org/10.1109/9.664149>
- [33] Wu, C.W. (2007) Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/6570>
- [34] Jiang, B., Lou, J., Lu, J. and Shi, K. (2022) Synchronization of Chaotic Neural Network: Average-Delay Impulsive Control. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **33**, 6007-6012. <https://doi.org/10.1109/tnnls.2021.3069830>
- [35] Li, Y., Niu, B., Zong, G., Zhao, J. and Zhao, X. (2021) Command Filter-Based Adaptive Neural Finite-Time Control for Stochastic Nonlinear Systems with Time-Varying Full-State Constraints and Asymmetric Input Saturation. *International Journal of Systems Science*, **53**, 199-221. <https://doi.org/10.1080/00207721.2021.1943562>
- [36] Zhang, G., Liu, Z. and Ma, Z. (2007) Synchronization of Complex Dynamical Networks via Impulsive Control. *Chaos*, **17**, 043126.
- [37] Lu, J., Ho, D.W.C. and Cao, J. (2010) A Unified Synchronization Criterion for Impulsive Dynamical Networks. *Automatica*, **46**, 1215-1221. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.04.005>
- [38] Li, X.D., Bohner, M. and Wang, C.-K. (2015) Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. *Automatica*, **52**, 173-178. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.11.009>
- [39] Ballinger, G. and Liu, X. (2000) Existence, Uniqueness and Boundedness Results for Impulsive Delay Differential Equations. *Applicable Analysis*, **74**, 71-93. <https://doi.org/10.1080/00036810008840804>

- [40] Acary, V., Brogliato, B. and Orlov, Y.V. (2012) Chattering-Free Digital Sliding-Mode Control with State Observer and Disturbance Rejection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**, 1087-1101. <https://doi.org/10.1109/tac.2011.2174676>
- [41] Hespanha, J.P. and Morse, A.S. (2002) Switching between Stabilizing Controllers. *Automatica*, **38**, 1905-1917. [https://doi.org/10.1016/s0005-1098\(02\)00139-5](https://doi.org/10.1016/s0005-1098(02)00139-5)
- [42] Zhou, J. and Chen, T. (2006) Synchronization in General Complex Delayed Dynamical Networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, **53**, 733-744. <https://doi.org/10.1109/tcsi.2005.859050>
- [43] Cao, J. and Lu, J. (2006) Adaptive Synchronization of Neural Networks with or without Time-Varying Delay. *Chaos*, **16**, Article 013133. <https://doi.org/10.1063/1.2178448>
- [44] Xu, Y. (1988) Functional Differential Equation and Measure Differential Equation. Zhongshan University Press.
- [45] Das, P.C. and Sharma, R.R. (1972) Existence and Stability of Measure Differential Equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **22**, 145-158. <https://doi.org/10.21136/cmj.1972.101082>
- [46] Rudin, W. (1966) Real and Complex Analysis. McGraw-Hill.
- [47] Hale, J. (1969) Ordinary Differential Equations. Wiley-Interscience.
- [48] Hespanha, J.P., Liberzon, D. and Teel, A.R. (2008) Lyapunov Conditions for Input-to-State Stability of Impulsive Systems. *Automatica*, **44**, 2735-2744. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.03.021>
- [49] Wan, X. and Sun, J. (2012) Complete Controllability for Abstract Measure Differential Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **23**, 807-814. <https://doi.org/10.1002/rnc.2785>
- [50] Antunes Monteiro, G. and Slavík, A. (2016) Extremal Solutions of Measure Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **444**, 568-597. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.035>
- [51] Cao, Y. and Sun, J. (2017) Controllability of Measure Driven Evolution Systems with Nonlocal Conditions. *Applied Mathematics and Computation*, **299**, 119-126. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.11.037>
- [52] Cao, Y. and Sun, J. (2018) Practical Stability of Nonlinear Measure Differential Equations. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **30**, 163-170. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2018.05.010>