

具有随机初值的 Navier-Stokes Nernst-Planck-Poisson 方程在超临界 Sobolev 空间的适定性

祝振凯¹, 郑云涵¹, 杜利怀¹, 耿金波^{2*}

¹ 温州大学数理学院, 浙江 温州

² 浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2025 年 11 月 23 日; 录用日期: 2025 年 12 月 17 日; 发布日期: 2025 年 12 月 26 日

摘要

本文考虑 d 维全空间上 Navier-Stokes Nernst-Planck-Poisson 方程的适定性问题。经过适当的随机化后, 我们获得了初值在超临界 Sobolev 空间中解的局部存在性和唯一性。此外, 还建立了全局解存在的概率估计。

关键词

随机初值, 超临界 Sobolev 空间, Navier-Stokes Nernst-Planck-Poisson 方程

The Well-Posedness for the Navier-Stokes Nernst-Planck-Poisson Equations with Random Initial Data in Supercritical Sobolev Space

Zhenkai Zhu¹, Yunhan Zheng¹, Lihuai Du¹, Jinbo Geng^{2*}

¹ College of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang

² School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

* 通讯作者。

Received: November 23, 2025; accepted: December 17, 2025; published: December 26, 2025

Abstract

In this paper, we consider the problem of the Navier-Stokes Nernst-Planck-Poisson Equations on d -dimensional full space. After a suitable randomization, we obtain the local existence and uniqueness of the solution with the initial data in supercritical Sobolev space. Furthermore, the probability estimate of global existence is also established.

Keywords

Random Initial Data, Supercritical Sobolev Space, Navier-Stokes Nernst-Planck-Poisson Equations

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

回顾 Navier-Stokes Nernst-Planck-Poisson 方程:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla P = \Delta \phi \nabla \phi, \\ \partial_t v + \mathbf{u} \cdot \nabla v = \nabla \cdot (\nabla v - v \nabla \phi), \\ \partial_t w + \mathbf{u} \cdot \nabla w = \nabla \cdot (\nabla w - w \nabla \phi), \\ \Delta \phi = v - w, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ (\mathbf{u}, v, w)|_{t=0} = (\mathbf{u}_0, v_0, w_0). \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.1)$$

其中 \mathbf{u} 是 \mathbb{R}^d 中的向量, 表示流体的速度场, $P(t, x), \phi(t, x), v(t, x), w(t, x)$ 是标量, 分别表示流体内部压力、带电粒子引起的静电势、带负电和带正电粒子的电荷密度。该系统 (1.1) 由 Rubinstein 在文献 [1] 中引入, 能够模拟由大量带正电和带负电粒子组成的均匀且成分均一的等温、不可压缩、粘性牛顿流体的运动。关于系统(1.1)的更多应用, 我们建议读者参阅 [2, 3]。

令 $\phi = (-\Delta)^{-1}(v - w)$, $\mathbb{P} = I + \nabla(-\Delta)^{-1}\text{div}$, $\mathbf{v} = (v, w)$, $\mathbf{v}_0 = (v_0, w_0)$, $A = (1, -1)^\top$, 则系统(1.1)转化为

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + \mathbb{P} \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathbb{P}(\mathbf{v} \cdot A) \nabla (-\Delta)^{-1}(\mathbf{v} \cdot A), \\ \partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla (-\Delta)^{-1}(\mathbf{v} \cdot A)), \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})|_{t=0} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0). \end{cases} \tag{1.2}$$

系统(1.2)具有放缩不变性: 如果 $(\mathbf{u}, \mathbf{v})(x, t)$ 是(1.2)具有初值 $(\mathbf{u}_0(x), \mathbf{v}_0(x))$ 的解, 则放缩后三元数组 $(\lambda \mathbf{u}(\lambda^2 \cdot, \lambda \cdot), \lambda^2 \mathbf{v}(\lambda^2 \cdot, \lambda \cdot))$ 是(1.2)具有初值 $(\lambda \mathbf{u}_0(\lambda \cdot), \lambda^2 \mathbf{v}_0(\lambda \cdot))$ 的解. 空间 X 是临界的意味着 X 满足

$$\|(\lambda \mathbf{u}_0(\lambda \cdot), \lambda^2 \mathbf{v}_0(\lambda \cdot))\|_X = \|(\mathbf{u}_0(x), \mathbf{v}_0(x))\|_X.$$

Deng、Zhao 和 Cui 在文献 [4–7] 中得到了系统(1.2)在临界 Lebesgue 空间、Besov 空间和 Triebel-Lizorkin 空间中具有小初始数据的全局适定性.

特别地, 当考虑初值位于 Sobolev 空间 $\dot{H}^a \times \dot{H}^b$ 时,

$$\begin{aligned} & \|(\lambda \mathbf{u}_0(\lambda \cdot), \lambda^2 \mathbf{v}_0(\lambda \cdot))\|_{\dot{H}^a \times \dot{H}^b} \\ &= \lambda \|\mathbf{u}_0(\lambda \cdot)\|_{\dot{H}^a} + \lambda^2 \|\mathbf{v}_0(\lambda \cdot)\|_{\dot{H}^b} \\ &= \lambda^{1+a-\frac{d}{2}} \|\mathbf{u}_0(\lambda \cdot)\|_{\dot{H}^a} + \lambda^{2+b-\frac{d}{2}} \|\mathbf{v}_0(\lambda \cdot)\|_{\dot{H}^b} \end{aligned}$$

所以系统 (1.2) 的临界 Sobolev 空间是 $\dot{H}^{\frac{d}{2}-1} \times \dot{H}^{\frac{d}{2}-2}$. 为了处理超临界问题, Burq 和 Tzvetkov [8] 引入了随机化初始数据的方法. 通过使用这种方法, 对于不同系统有许多结果, 如薛定谔方程 [9–11], 波动方程 [12, 13], Navier-Stokes 方程 [14, 15] 以及 MHD 方程 [16–18]. 鉴于此, 我们打算通过采用“Wiener 随机化”来研究系统(1.2)关于初值在超临界 Sobolev 空间 $\dot{H}^a \times \dot{H}^b$ (其中 $a < \frac{d}{2} - 1, b < \frac{d}{2} - 2$) 中的适定性.

2. 预备知识

2.1. 记号

我们使用 $\mathcal{F}f$ 表示 f 的傅里叶变换. 给定 $1 \leq p \leq \infty$, L^p 表示通常的 Lebesgue 空间. 我们定义齐次 Sobolev 空间

$$\dot{W}^{s,p} := \{f \in \mathcal{S}' \mid \|f\|_{\dot{W}^{s,p}} := \|\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \mathcal{F}f)\|_{L^p} < +\infty\},$$

其中 \mathcal{S}' 是缓增分布空间, 并记 $H^s := \dot{W}^{s,2}$. 对于一个函数空间 X , 我们使用缩写 X_T, X_ω 和 X_x 分别表示 $X(0, T), X(\Omega)$ 和 $X(\mathbb{R}^d)$. 我们定义一个时间加权空间 $L^p_{\zeta, T}$, 其范数为:

$$\|f\|_{L^p_{\zeta, T}} = \|t^\zeta f\|_{L^p(0, T)}.$$

给定两个 Banach 空间 X 和 Y , 这两个空间的乘积 $X \times Y$ 将赋通常的范数 $\|(f, g)\|_{X \times Y} = \|f\|_X + \|g\|_Y$. 在下文中, C 表示一个正常数, 其值可能不同. 此外, $x \lesssim y$ 意味着 $x \leq Cy$.

2.2. Wiener 分解

我们现在介绍文献 [8, 19] 使用的“Wiener 分解”的光滑版本。定义一个非负偶函数 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 且

$$\psi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d, \\ 0, & \xi \in ([-1, 1]^d)^c. \end{cases}$$

令

$$\varphi(\xi) = \frac{\psi(\xi)}{\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \psi(\xi - n)}.$$

定义

$$\varphi(D - n)f = \mathcal{F}_\xi^{-1}(\mathcal{F}f(\xi)\varphi(\xi - n)).$$

设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ 是一个概率空间, $h_n(\omega)$ 是一列独立的标准实高斯随机变量。那么, 对于任意函数 f , 我们通过下式定义其随机化 f^ω :

$$f^\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} h_n(\omega)\varphi(D - n)f. \quad (2.1)$$

需要指出的是, 上述随机化并不能提升 f 的正则性, 即对于任意 $s \in \mathbb{R}$:

$$f \notin H_x^s(\mathbb{R}^d), \text{ 则几乎必然地有 } f^\omega \notin H_x^s(\mathbb{R}^d).$$

但是我们有以下关于 $\varphi(D - n)f$ 的 Bernstein 型估计, 它提供了所需的光滑效应。

引理 2.1 ([19], 引理 2.4, $L^p - L^2$ 估计). 设 $p \geq 2$, 则对于任意 $n \in \mathbb{Z}^d$

$$\|\varphi(D - n)f\|_{L_x^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|\varphi(D - n)f\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)}.$$

注解 2.2. [19] 中仅给出了 $d = 3$ 的情形证明, 事实上, 证明的过程与 d 的取值无关。

2.3. 一些用到的引理

引理 2.3 ([8], 大偏差估计). 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ 是一个概率空间, $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ 是一列实值、独立、零均值的随机变量, 其在 Ω 上具有相关的分布 $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ 。假设 $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ 满足存在 $c > 0$, 使得对于所有 $\gamma \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{N}^+$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x} d\mu_k(x) \right| \leq e^{c\gamma^2}, \quad (2.1)$$

则存在 $C > 0$, 使得对于任何实值序列 $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}^+} \in \ell_k^2$, 我们有

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k I_k(\omega) \right\|_{L_\omega^r} \leq C\sqrt{r} \|c_k\|_{\ell_k^2}.$$

注意到条件 (2.1) 对高斯变量和伯努利变量都成立。

引理 2.4 ([15,20]). 设 F 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的实值可测函数。假设存在常数 $C_0 > 0$, $K > 0$ 以及 $p_0 \geq 1$, 使得对任意 $p \geq p_0$, 均有

$$\|G\|_{L_x^\infty} \leq C_0 \sqrt{r} K.$$

那么, 存在常数 $C > 0$ (依赖于 C_0 和 p_0 , 但与 K 无关), 使得对任意 $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |G(\omega)| \leq \lambda\}) \geq 1 - Ce^{-C\lambda^2 K^{-2}}.$$

最后, 我们引入三个引理, 用于非线性算子的估计。

引理 2.5 ([21], 引理 3.1). 定义分数热核算子 S_t^α 为

$$\begin{cases} \partial_t(S_t^\alpha f) + (-\Delta)^\alpha(S_t^\alpha f) = 0, \\ S_0^\alpha f = f. \end{cases}$$

设 $1 \leq r \leq p \leq \infty$, $v > 0$ 且 $f \in L^r(\mathbb{R}^d)$, 则有

$$\|(-\Delta)^{v/2} S_t^\alpha f\|_{L_x^p} \leq Ct^{-\frac{v}{2\alpha} - \frac{d}{2\alpha}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})} \|f\|_{L_x^r}.$$

在下文中, 我们将 S_t^1 简记为 S_t 。

引理 2.6 ([7], 引理 2.5). 设 $1 \leq p < d$, $f \in L_x^p$, 则

$$\|\nabla(-\Delta)^{-1} f\|_{L_x^{\frac{dp}{d-p}}} \leq \|f\|_{L_x^p}.$$

引理 2.7 ([22], 定理 1.7). 设 $K(x) = |x|^{-\xi}$, 其中 $x \in \mathbb{R}^d$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ 。则有

$$\|K * g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

其中 $1 < p < q < \infty$ 且 $\xi = d(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})$ 。

3. 主要结果

在本文中, 我们研究所谓的“温和解”。

定义 3.1. 区间 $[0, T]$ 上具有初值 $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$ 的(1.2)的温和解 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) 定义为以下积分方程的解

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathcal{S}_t \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathcal{S}_{t-\tau} (-\mathbb{P}\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \mathbb{P}\mathbf{v} \cdot A\nabla(-\Delta)^{-1}(\mathbf{v} \cdot A)) d\tau, \\ \mathbf{v} = \mathcal{S}_t \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathcal{S}_{t-\tau} (-\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{v}) - \nabla \cdot (\mathbf{v}\nabla(-\Delta)^{-1}(\mathbf{v} \cdot A))) d\tau, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中算子 \mathcal{S}_t 是引理2.5中定义的热核算子。

现在, 我们陈述主要的结果:

定理 3.2. 给定 $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \in \dot{H}_x^{-\frac{1}{2}+\delta} \times \dot{H}_x^{-1+\delta}$, 其中 δ 是一个足够小的正常数. 则对于几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 存在 $T_\omega > 0$, 使得具有随机化初值 $(\mathbf{u}_0^\omega, \mathbf{v}_0^\omega)$ 的 Navier-Stokes Nernst-Planck-Poisson 方程(1.2)在定义3.1的意义下存在唯一的温和解 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , 且满足

$$\begin{aligned} \mathbf{u} - \mathcal{S}_t \mathbf{u}_0^\omega &\in L_{T_\omega}^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}} \cap C([0, T_\omega]; \dot{H}_x^{2\delta}), \\ \mathbf{v} - \mathcal{S}_t \mathbf{v}_0^\omega &\in L_{T_\omega}^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}} \cap C([0, T_\omega]; \dot{H}_x^{-1+2\delta}). \end{aligned}$$

此外, 存在 $C > 0$ 使得

$$\mathbf{P}(T_\omega = \infty) \geq 1 - C \exp(-C \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)\|_{\dot{H}_x^{-\frac{1}{2}+\delta} \times \dot{H}_x^{-1+\delta}}^{-2}).$$

注解 3.3. 事实上, 我们可以考虑更一般的情形: $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \in \dot{H}_x^{-\frac{1}{2}+\delta} \times \dot{H}_x^{-1+\gamma}$, 那么

$$(\mathbf{u} - \mathcal{S}_t \mathbf{u}_0^\omega, \mathbf{v} - \mathcal{S}_t \mathbf{v}_0^\omega) \in L_{T_\omega}^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}} \times L_{T_\omega}^{\frac{2}{1-\gamma}} L_x^{\frac{d}{1+\gamma}} \cap C([0, T_\omega]; \dot{H}_x^{2\min(\delta, \gamma)} \times \dot{H}_x^{-1+\gamma+\min(\delta, \gamma)}).$$

我们只需要在压缩映射中考虑更复杂的空间, 整体的证明与本文中的证明没有本质区别. 因此, 为了文章的简洁性, 我们省略这部分的证明.

4. $S_t(\mathbf{u}_0^\omega, \mathbf{v}_0^\omega)$ 的光滑化效应以及非线性算子的估计

对于线性解 $S_t f^\omega$, 我们有以下随机光滑化效应, 类似的证明可参见文献 [19].

命题 4.1. 假设 f^ω 是由(2.1)给出的 f 的随机化. 给定任意 $2 \leq p, q < \infty$, $0 \leq \gamma < \infty$, 对任意 $r \geq \max\{p, q\}$, 有

$$\|S_t f^\omega\|_{L_v^r L_{\gamma, T}^q L_x^p} \leq \sqrt{r} \|f\|_{\dot{H}_x^{-\frac{2}{q}-\gamma}}, \tag{4.1}$$

以及

$$\lim_{T \rightarrow 0} \|S_t f^\omega\|_{L_v^r L_{\gamma, T}^q L_x^p} = 0. \tag{4.2}$$

证明. 由 Minkowski 不等式以及引理2.3, 我们有

$$\begin{aligned} \|S_t f^\omega\|_{L_v^r L_{\gamma, T}^q L_x^p} &\lesssim \sqrt{r} \|S_t f^\omega\|_{L_{\gamma, T}^q L_x^p L_v^r} \\ &\lesssim \sqrt{r} \|\varphi(D-n) S_t f\|_{L_{\gamma, T}^q L_x^p \ell_n^2} \\ &\lesssim \sqrt{r} \|\varphi(D-n) S_t f\|_{\ell_n^2 L_{\gamma, T}^q L_x^p} \\ &\lesssim \sqrt{r} \|\varphi(D-n) S_t f\|_{\ell_n^2 L_{\gamma, T}^q L_x^2} \\ &\lesssim \sqrt{r} \|e^{-t|\xi|^2} \varphi(\xi-n) \hat{f}(\xi)\|_{\ell_n^2 L_{\gamma, T}^q L_\xi^2} \\ &\lesssim \sqrt{r} \|\xi|^{-\frac{2}{q}-\gamma} \varphi(\xi-n) \hat{f}(\xi)\|_{\ell_n^2 L_n^2} \\ &\lesssim \sqrt{r} \|\xi|^{-\frac{2}{q}-\gamma} \hat{f}(\xi)\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim \sqrt{r} \|f\|_{\dot{H}_x^{-\frac{2}{q}-\gamma}}. \end{aligned}$$

等式(4.2)可由积分的绝对连续性和 *Minkowski* 不等式推得。 □

定义

$$\|f\|_{X_T} := \|f\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} + \|f\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{d-2\delta-1}}} + \|f\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}},$$

$$\|g\|_{Y_T} := \|g\|_{L_T^{\frac{2}{1-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} + \|g\|_{L_T^{\frac{2}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{d-2\delta}}} + \|g\|_{L_T^{\frac{8}{3-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}}.$$

我们有以下关于非线性算子估计的命题。

命题 4.2. 存在常数 C 使得

$$\left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_1(f_1, f_2, g_1, g_2) d\tau \right\|_{X_T} \leq C (\|f_1\|_{X_T} \|f_2\|_{X_T} + \|g_1\|_{Y_T} \|g_2\|_{Y_T}),$$

其中

$$\begin{aligned} B_1(f_1, f_2, g_1, g_2) &:= B_1^1(f_1, f_2) + B_1^2(g_1, g_2), \\ B_1^1(f_1, f_2) &:= -\mathbb{P}\nabla \cdot (f_1 \otimes f_2), \\ B_1^2(g_1, g_2) &:= \mathbb{P}(g_1 \cdot A)\nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A). \end{aligned}$$

证明. • $L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}} \cap L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{d-2\delta-1}}$ 的估计。

对于 $1 \leq p < 2d$, 根据定义, 我们有

$$\left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_1^1(f_1, f_2) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^p} \lesssim \left\| \int_0^t \|S_{t-\tau} \mathbb{P}\nabla \cdot (f_1 \otimes f_2)\|_{L_x^p} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}}}. \quad (*)$$

在引理2.5中取 $v = \alpha = 1, r = \frac{2dp}{2d+2p\delta+p}$, 则

$$\begin{aligned} -\frac{v}{2\alpha} - \frac{d}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) &= -\frac{1}{2} - \frac{d}{2} \left(\frac{2d+2p\delta+p}{2dp} \right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{2\delta+1}{4} \\ &= -\frac{3+2\delta}{4}. \end{aligned}$$

所以我们有

$$(*) \lesssim \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3+2\delta}{4}} \|f_1 \otimes f_2\|_{L_x^{\frac{2dp}{2d+2p\delta+p}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}}}. \quad (**)$$

在引理2.7中取 $q = \frac{4}{1-2\delta}, p = \frac{2}{1-2\delta}$, 则 $\xi = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{3+2\delta}{4}$, 我们得到

$$(**) \lesssim \|f_1 \otimes f_2\|_{L_T^{\frac{2}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2dp}{2d+2p\delta+p}}}. \quad (***)$$

最后, 在时空 Hölder 不等式

$$\|fg\|_{L_T^s L_x^t} \lesssim \|f\|_{L_T^{s_1} L_x^{t_1}} \|g\|_{L_T^{s_2} L_x^{t_2}}, \frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}, \frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$$

中取 $s = \frac{2}{1-2\delta}, s_1 = s_2 = \frac{4}{1-2\delta}, t = \frac{2dp}{2d+2p\delta+p}, t_1 = p, t_2 = \frac{2d}{1+2\delta}$ 推出

$$(***) \lesssim \|f_1\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^p} \|f_2\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}}.$$

为了简洁起见, 在之后的证明中, 我们将省略详细的指标的取法。类似地, 由引理 2.5、2.6、2.7 和 Hölder 不等式, 我们得到

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_1^2(g_1, g_2) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^p} \\ & \lesssim \left\| \int_0^t \|S_{t-\tau}(g_1 \cdot A) \cdot \nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_x^p} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}}} \\ & \lesssim \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1+2\delta}{4}} \|(g_1 \cdot A) \cdot \nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_x^{\frac{2pd}{2d+p(1+2\delta)}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}}} \\ & \lesssim \|(g_1 \cdot A) \cdot \nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_T^{\frac{1}{1-\delta}} L_x^{\frac{2pd}{2d+p(1+2\delta)}}} \\ & \lesssim \|g_1 \cdot A\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|\nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{2pd}{2d+p}}} \\ & \lesssim \|g_1\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|g_2\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{2pd}{2d+p}}}. \end{aligned}$$

分别取 $p = \frac{2d}{1+2\delta}$ 和 $\frac{2d}{d-2\delta-1}$, 我们得到

$$\left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_1^1(f_1, f_2) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}} \cap L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{d-2\delta-1}}} \lesssim \|f_1\|_{X_T} \|f_2\|_{X_T} + \|g_1\|_{Y_T} \|g_2\|_{Y_T}.$$

• $L_{\frac{1-2\delta}{8}, T}^{\frac{8}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}$ 的估计。

对于 B_1^1 , 我们有

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_1^1(f_1, f_2) d\tau \right\|_{L_{\frac{1-2\delta}{8}, T}^{\frac{8}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} \\ & \lesssim \left\| t^{\frac{1-2\delta}{8}} \int_0^t \|S_{t-\tau} \mathbb{P} \nabla \cdot (f_1 \otimes f_2)\|_{L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}}} \\ & \lesssim I_1^1 + I_1^2, \end{aligned}$$

其中

$$I_1^1 = \left\| \int_0^t \|(t-\tau)^{\frac{1-2\delta}{8}} S_{t-\tau} \mathbb{P} \nabla \cdot (f_1 \otimes f_2)\|_{L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}}},$$

$$I_1^2 = \left\| \int_0^t \left\| \tau^{\frac{1-2\delta}{8}} S_{t-\tau} \mathbb{P} \nabla \cdot (f_1 \otimes f_2) \right\|_{L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}}}.$$

由引理 2.5、2.7 和 Hölder 不等式，我们得到

$$\begin{aligned} I_1^1 &\lesssim \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{5+6\delta}{8}} \|f_1 \otimes f_2\|_{L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}}} \\ &\lesssim \|f_1 \otimes f_2\|_{L_T^{\frac{2}{1-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} \\ &\lesssim \|f_1\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} \|f_2\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} \\ &\lesssim \|f_1\|_{X_T} \|f_2\|_{X_T}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

类似地，对于 I_1^2 ，我们得到

$$\begin{aligned} I_1^2 &\lesssim \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3+2\delta}{4}} \left\| \tau^{\frac{1-2\delta}{8}} f_1 \otimes f_2 \right\|_{L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}}} \\ &\lesssim \left\| \tau^{\frac{1-2\delta}{8}} f_1 \otimes f_2 \right\|_{L_T^{\frac{8}{3(1-2\delta)}} L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} \\ &\lesssim \left\| \tau^{\frac{1-2\delta}{8}} f_1 \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} \|f_2\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} \\ &\lesssim \|f_1\|_{X_T} \|f_2\|_{X_T}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

结合(4.3)和(4.4)，我们有

$$\left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_1^1(f_1, f_2) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}}, T L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} \lesssim \|f_1\|_{X_T} \|f_2\|_{X_T}. \tag{4.5}$$

对于 B_1^2 ，我们得到

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_1^2(g_1, g_2) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}}, T L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} \\ &\lesssim \left\| t^{\frac{1-2\delta}{8}} \int_0^t \|S_{t-\tau}((g_1 \cdot A) \nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A))\|_{L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}}} \\ &\lesssim I_2^1 + I_2^2, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_2^1 &= \left\| \int_0^t \left\| (t-\tau)^{\frac{1-2\delta}{8}} S_{t-\tau}((g_1 \cdot A) \cdot \nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)) \right\|_{L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}}}, \\ I_2^2 &= \left\| \int_0^t \left\| \tau^{\frac{1-2\delta}{8}} S_{t-\tau}((g_1 \cdot A) \cdot \nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)) \right\|_{L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}}}. \end{aligned}$$

引理2.5、2.6、2.7和 Hölder 不等式表明

$$\begin{aligned}
 I_2^1 &\lesssim \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1+6\delta}{8}} \|(g_1 \cdot A)\nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}}} \\
 &\lesssim \|(g_1 \cdot A) \cdot \nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_T^{\frac{1}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} \\
 &\lesssim \|g_1 \cdot A\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|\nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{\delta}}} \\
 &\lesssim \|g_1\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|g_2\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \\
 &\lesssim \|g_1\|_{Y_T} \|g_2\|_{Y_T}.
 \end{aligned}$$

类似地, 对于 I_2^2 , 我们有

$$\begin{aligned}
 I_2^2 &\lesssim \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1+2\delta}{4}} \left\| \tau^{\frac{1-2\delta}{8}} (g_1 \cdot A)\nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A) \right\|_{L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}}} \\
 &\lesssim \left\| \tau^{\frac{1-2\delta}{8}} (g_1 \cdot A)\nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A) \right\|_{L_T^{\frac{8}{7-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} \\
 &\lesssim \left\| \tau^{\frac{1-2\delta}{8}} (g_1 \cdot A) \right\|_{L_T^{\frac{8}{3-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|\nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{\delta}}} \\
 &\lesssim \|g_1\|_{L_T^{\frac{8}{3-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|g_2\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \\
 &\lesssim \|g_1\|_{Y_T} \|g_2\|_{Y_T}.
 \end{aligned}$$

因此, 我们得到

$$\left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_1^2(g_1, g_2) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} \lesssim \|g_1\|_{Y_T} \|g_2\|_{Y_T}. \tag{5.4}$$

结合(4.5)和(5.4), 我们有

$$\left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_1(f_1, f_2, g_1, g_2) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} \lesssim \|f_1\|_{X_T} \|f_2\|_{X_T} + \|g_1\|_{Y_T} \|g_2\|_{Y_T}. \tag{5.5}$$

□

命题 4.3. 存在常数 C 使得

$$\left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_2(f, g_1, g_2) d\tau \right\|_{Y_T} \leq C \|f\|_{X_T} \|g_1\|_{Y_T} + \|g_1\|_{Y_T} \|g_2\|_{Y_T},$$

其中

$$\begin{aligned}
 B_2(f, g_1, g_2) &:= B_2^1(f, g_1) + B_2^2(g_1, g_2), \\
 B_2^1(f, g_1) &:= -\nabla \cdot (fg_1), \\
 B_2^2(g_1, g_2) &:= -\nabla \cdot (g_1 \nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)).
 \end{aligned}$$

证明. • $L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}} \cap L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{2d}{d+2-2\delta}}$ 的估计。

对于 $1 \leq p < d$, 由引理 2.5、2.6、2.7 和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_2^1(f, g_1) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^p} \\ & \lesssim \left\| \int_0^t \|S_{t-\tau} \nabla \cdot (fg_1)\|_{L_x^p} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}}} \\ & \lesssim \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3+2\delta}{4}} \|fg_1\|_{L_x^{\frac{dp}{d+p(1+2\delta)}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}}} \\ & \lesssim \|fg_1\|_{L_T^{\frac{4}{3-4\delta}} L_x^{\frac{dp}{d+p(1+2\delta)}}} \\ & \lesssim \|f\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} \|g_1\|_{L_T^{\frac{2}{1-2\delta}} L_x^p}. \end{aligned}$$

同时, 我们有

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_2^2(g_1, g_2) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^p} \\ & \lesssim \left\| \int_0^t \|S_{t-\tau} \nabla \cdot (g_1 \nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A))\|_{L_x^p} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}}} \\ & \lesssim \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1+\delta}{2}} \|g_1 \nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_x^{\frac{pd}{d+p\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}}} \\ & \lesssim \|g_1 \nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_T^{\frac{1}{1-\delta}} L_x^{\frac{pd}{d+p\delta}}} \\ & \lesssim \|g_1\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|\nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_T^{\frac{2}{1-2\delta}} L_x^{\frac{pd}{d-p}}} \\ & \lesssim \|g_1\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|g_2\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^p}. \end{aligned}$$

结合上述估计, 我们有

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_2(f, g_1, g_2) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^p} \\ & \lesssim \|f\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} \|g_1\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^p} + \|g_1\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|g_2\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^p}. \end{aligned}$$

分别取 $p = \frac{d}{1+\delta}$ 和 $\frac{2d}{d+2-2\delta}$, 我们得到

$$\left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_2(f, g_1, g_2) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}} \cap L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{2d}{d+2-2\delta}}} \lesssim \|f\|_{X_T} \|g_1\|_{Y_T} + \|g_1\|_{Y_T} \|g_2\|_{Y_T}.$$

• $L_{\frac{1-2\delta}{8}, T}^{\frac{8}{3-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}$ 的估计。

我们有

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_2^1(f, g_1) d\tau \right\|_{L^{\frac{8}{3-2\delta}}_{\frac{1-2\delta}{8}, T} L^{\frac{d}{1+\delta}}_x} \\ & \lesssim \left\| \int_0^t t^{\frac{1-2\delta}{8}} \|S_{t-\tau} \nabla \cdot (fg_1)\|_{L^{\frac{d}{1+\delta}}_x} d\tau \right\|_{L^{\frac{8}{3-2\delta}}_T} \\ & \lesssim J_1^1 + J_1^2, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} J_1^1 &= \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1-2\delta}{8}} \|S_{t-\tau} \nabla \cdot (fg_1)\|_{L^{\frac{d}{1+\delta}}_x} d\tau \right\|_{L^{\frac{8}{3-2\delta}}_T}, \\ J_1^2 &= \left\| \int_0^t \tau^{\frac{1-2\delta}{8}} \|S_{t-\tau} \nabla \cdot (fg_1)\|_{L^{\frac{d}{1+\delta}}_x} d\tau \right\|_{L^{\frac{8}{3-2\delta}}_T}. \end{aligned}$$

对于 J_1^1 , 由引理 2.5、2.7 和 Hölder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} J_1^1 &\lesssim \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{5+6\delta}{8}} \|fg_1\|_{L^{\frac{2d}{3+4\delta}}_x} d\tau \right\|_{L^{\frac{8}{3-2\delta}}_T} \\ &\lesssim \|fg_1\|_{L^{\frac{2}{3-4\delta}}_T L^{\frac{2d}{3+4\delta}}_x} \\ &\lesssim \|f\|_{L^{\frac{4}{1-2\delta}}_T L^{\frac{2d}{1+2\delta}}_x} \|g_1\|_{L^{\frac{2}{1-\delta}}_T L^{\frac{d}{1+\delta}}_x}. \end{aligned}$$

另外, 对于 J_1^2 , 我们得到

$$\begin{aligned} J_1^2 &\lesssim \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3+2\delta}{4}} \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} fg_1\|_{L^{\frac{2d}{3+4\delta}}_x} d\tau \right\|_{L^{\frac{8}{3-2\delta}}_T} \\ &\lesssim \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} fg_1\|_{L^{\frac{8}{5-6\delta}}_T L^{\frac{2d}{3+4\delta}}_x} \\ &\lesssim \|f\|_{L^{\frac{4}{1-2\delta}}_T L^{\frac{2d}{1+2\delta}}_x} \|g_1\|_{L^{\frac{8}{3-2\delta}}_{\frac{1-2\delta}{8}, T} L^{\frac{d}{1+\delta}}_x}. \end{aligned}$$

因此, 我们得到

$$\left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_2^1(f, g_1) d\tau \right\|_{L^{\frac{8}{3-2\delta}}_{\frac{1-2\delta}{8}, T} L^{\frac{d}{1+\delta}}_x} \lesssim \|f\|_{X_T} \|g_1\|_{Y_T}. \tag{4.6}$$

现在, 我们着手处理 B_2^2 . 首先我们有

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_2^2(f, g_1, g_2, h_1, h_2) d\tau \right\|_{L^{\frac{8}{3-2\delta}}_{\frac{1-2\delta}{8}, T} L^{\frac{d}{1+\delta}}_x} \\ & \lesssim \left\| \int_0^t t^{\frac{1-2\delta}{8}} \|S_{t-\tau} \nabla \cdot (g_1 \nabla(-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A))\|_{L^{\frac{d}{1+\delta}}_x} d\tau \right\|_{L^{\frac{8}{3-2\delta}}_T} \\ & \lesssim J_2^1 + J_2^2, \end{aligned}$$

其中

$$J_2^1 = \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1-2\delta}{8}} \|S_{t-\tau} \nabla \cdot (g_1 \nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A))\|_{L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{3-2\delta}}},$$

$$J_2^2 = \left\| \int_0^t \tau^{\frac{1-2\delta}{8}} \|S_{t-\tau} \nabla \cdot (g_1 \nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A))\|_{L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{3-2\delta}}}.$$

使用引理 2.5、2.6、2.7 和 Hölder 不等式，我们有

$$\begin{aligned} J_2^1 &\lesssim \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3+2\delta}{8}} \|g_1 \nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{3-2\delta}}} \\ &\lesssim \|g_1 \nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_T^{\frac{1}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} \\ &\lesssim \|g_1\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|\nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{\delta}}} \\ &\lesssim \|g_1\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|g_2\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \\ &\lesssim \|g_1\|_{Y_T} \|g_2\|_{Y_T}. \end{aligned}$$

类似地，对于 J_2^2 ，我们得到

$$\begin{aligned} J_2^2 &\lesssim \left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\delta+1}{2}} \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} g_1 \nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{3-2\delta}}} \\ &\lesssim \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} g_1 \nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_T^{\frac{8}{7-6\delta}} L_x^{\frac{d}{1+2\delta}}} \\ &\lesssim \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} g_1\|_{L_T^{\frac{8}{3-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|\nabla (-\Delta)^{-1}(g_2 \cdot A)\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{\delta}}} \\ &\lesssim \|g_1\|_{L_T^{\frac{8}{3-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|g_2\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \\ &\lesssim \|g_1\|_{Y_T} \|g_2\|_{Y_T}. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_2^2(f, g_1, g_2) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}, T} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \lesssim \|g_1\|_{Y_T} \|g_2\|_{Y_T}. \tag{4.7}$$

合并 (4.6) 和 (4.7)，我们得到

$$\left\| \int_0^t S_{t-\tau} B_2(f, g_1, g_2) d\tau \right\|_{L_T^{\frac{8}{3-2\delta}, T} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \lesssim \|f\|_{X_T} \|g_1\|_{Y_T} + \|g_1\|_{Y_T} \|g_2\|_{Y_T}.$$

□

命题 4.4. 如果 $(f, g) \in X_T \times Y_T$ ，则

$$\int_0^t S_{t-\tau} \mathcal{B}_1(f, g) d\tau \in C([0, T]; \dot{H}_x^{2\delta}),$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(f, g) &= \mathcal{B}_1^1(f) + \mathcal{B}_1^2(g), \\ \mathcal{B}_1^1(f) &= B_1^1(f, f), \\ \mathcal{B}_1^2(g) &= B_2^1(g, g). \end{aligned}$$

证明. 由算子 S_t 的连续性, 我们只需证明

$$\int_0^t S_{t-\tau} \mathcal{B}_1(f, g) d\tau \in L_T^\infty \dot{H}_x^{2\delta}.$$

使用引理 2.5、2.7 和 Hölder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t S_{t-\tau} \mathcal{B}_1^1(f) d\tau \right\|_{\dot{H}_x^{2\delta}} \\ & \lesssim \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \|S_{t-\tau}(f \otimes f)\|_{\dot{H}_x^{2\delta+1}} d\tau \\ & \lesssim \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t (t-\tau)^{-\delta-\frac{1}{2}} \|f \otimes f\|_{L_x^2} d\tau \\ & \lesssim \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t (t-\tau)^{-\delta-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1-2\delta}{8}} \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} f \otimes f\|_{L_x^2} d\tau \\ & \lesssim \left(\int_0^T (t-\tau)^{-\frac{8\delta+4}{5+6\delta}} \tau^{-\frac{1-2\delta}{5+6\delta}} d\tau \right)^{\frac{5+6\delta}{8}} \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} f \otimes f\|_{L_T^{\frac{8}{3-6\delta}} L_x^2} \\ & \lesssim \|f\|_{L_T^{\frac{4}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{d-2\delta-1}}} \|f\|_{L_T^{\frac{8}{1-2\delta}} L_x^{\frac{2d}{1+2\delta}}} \\ & \lesssim \|f\|_{X_T}^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

引理 2.5、2.6、2.7 和 Hölder 不等式表明

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t S_{t-\tau} \mathcal{B}_1^2(g) d\tau \right\|_{\dot{H}^{2\delta}} \\ & \lesssim \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \|S_{t-\tau}(g \nabla(-\Delta)^{-1}(g \cdot A))\|_{\dot{H}^{2\delta}} d\tau \\ & \lesssim \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t (t-\tau)^{-\delta} \|g \nabla(-\Delta)^{-1}(g \cdot A)\|_{L_x^2} d\tau \\ & \lesssim \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t (t-\tau)^{-\delta} \tau^{-\frac{1-2\delta}{8}} \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} g \nabla(-\Delta)^{-1}(g \cdot A)\|_{L_x^2} d\tau \\ & \lesssim \left(\int_0^T (t-\tau)^{-\frac{8\delta}{1+6\delta}} \tau^{-\frac{1-2\delta}{1+6\delta}} d\tau \right)^{\frac{1+6\delta}{8}} \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} g \nabla(-\Delta)^{-1}(g \cdot A)\|_{L_T^{\frac{8}{7-6\delta}} L_x^2} \\ & \lesssim \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} g\|_{L_T^{\frac{8}{3-2\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|\nabla(-\Delta)^{-1}(g \cdot A)\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{2d}{d-2\delta-2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lesssim \|g\|_{L^{\frac{8}{3-2\delta}}_{\frac{1-\delta}{8}, T} L^{\frac{d}{1+\delta}}_x} \|g\|_{L^{\frac{2}{1-\delta}}_T L^{\frac{2d}{d-2\delta}}_x} \\ &\lesssim \|g\|_{Y_T}^2. \end{aligned}$$

□

命题 4.5. 如果 $(f, g) \in X_T \times Y_T$, 则

$$\int_0^t S_{t-\tau} \mathcal{B}_2(f, g) d\tau \in C([0, T]; \dot{H}_x^{-1+2\delta}),$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2(f, g) &= \mathcal{B}_2^1(f, g) + \mathcal{B}_2^2(g), \\ \mathcal{B}_2^1(f, g) &= B_2^1(f, g, g), \\ \mathcal{B}_2^2(f, g) &= B_2^2(f, g, g). \end{aligned}$$

证明. 类似于(4.8), 我们有

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t S_{t-\tau} \mathcal{B}_2^1(f, g) d\tau \right\|_{\dot{H}_x^{-1+2\delta}} \\ &\lesssim \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \|S_{t-\tau}(fg)\|_{\dot{H}_x^{2\delta}} d\tau \\ &\lesssim \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t (t-\tau)^{-\delta-\frac{1}{4}} \|fg\|_{L^{\frac{2d}{d+1}}_x} d\tau \\ &\lesssim \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t (t-\tau)^{-\delta-\frac{1}{4}} \tau^{-\frac{1-2\delta}{8}} \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} fg\|_{L^{\frac{2d}{d+1}}_x} d\tau \\ &\lesssim \left(\int_0^T (t-\tau)^{-\frac{8\delta+2}{3+6\delta}} \tau^{-\frac{1-2\delta}{3+6\delta}} d\tau \right)^{\frac{3+6\delta}{8}} \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} fg\|_{L^{\frac{8}{5-6\delta}}_T L^{\frac{2d}{d+1}}_x} \\ &\lesssim \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} f\|_{L^{\frac{8}{1-2\delta}}_T L^{\frac{2d}{1+2\delta}}_x} \|g\|_{L^{\frac{2}{1-\delta}}_T L^{\frac{2d}{d-2\delta}}_x} \\ &\lesssim \|f\|_{X_T} \|g\|_{Y_T}. \end{aligned}$$

再次使用引理 2.5、2.6、2.7 和 Hölder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t S_{t-\tau} \mathcal{B}_2^2(g) d\tau \right\|_{\dot{H}_x^{-1+2\delta}} \\ &\lesssim \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \|S_{t-\tau}(g \nabla(-\Delta)^{-1}(g \cdot A))\|_{\dot{H}_x^{2\delta}} d\tau \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t (t-\tau)^{-\delta} \|g \nabla(-\Delta)^{-1}(g \cdot A)\|_{L_x^2} d\tau \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t (t-\tau)^{-\delta} \tau^{-\frac{1-2\delta}{8}} \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} g \nabla(-\Delta)^{-1}(g \cdot A)\|_{L_x^2} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\int_0^T (t-\tau)^{-\frac{8\delta}{1+6\delta}} \tau^{-\frac{1-2\delta}{1+6\delta}} d\tau \right)^{\frac{1+6\delta}{8}} \|\tau^{\frac{1-\delta}{4}} g \nabla(-\Delta)^{-1}(g \cdot A)\|_{L_T^{\frac{8}{7-6\delta}} L_x^2} \\
 &\leq \|\tau^{\frac{1-2\delta}{8}} g\|_{L_T^{\frac{3-2\delta}{8}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|\nabla(-\Delta)^{-1}(g \cdot A)\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{2d}{d-2-2\delta}}} \\
 &\leq \|\tau^{\frac{1-2\delta}{4}} g\|_{L_T^{\frac{4}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{1+\delta}}} \|g\|_{L_T^{\frac{2}{1-\delta}} L_x^{\frac{d}{d-2\delta}}} \\
 &\leq \|g\|_{Y_T}^2.
 \end{aligned}$$

□

5. 解关于 $(S_t \mathbf{u}_0^\omega, S_t \mathbf{v}_0^\omega)$ 的存在性

令 $\bar{\mathbf{u}}_0^\omega = S_t \mathbf{u}_0^\omega$, $\bar{\mathbf{v}}_0^\omega = S_t \mathbf{v}_0^\omega$ 以及 $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_0^\omega$, $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_0^\omega$, 则 $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}} = \int_0^t S_{t-\tau} \mathcal{B}_1(\tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega) d\tau, \\ \tilde{\mathbf{v}} = \int_0^t S_{t-\tau} \mathcal{B}_2(\tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega) d\tau. \end{cases} \tag{5.1}$$

我们有如下的命题:

命题 5.1. 存在常数 λ , 使得当 $\|(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)\|_{X_T \times Y_T} \leq \lambda$ 时, 系统(5.1)在 $X_T \times Y_T$ 中存在唯一解。

证明. 我们定义

$$\begin{cases} K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^1(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \int_0^t S_{t-\tau} \mathcal{B}_1(\tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega) d\tau, \\ K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^2(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \int_0^t S_{t-\tau} \mathcal{B}_2(\tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega) d\tau. \end{cases}$$

由命题4.2和4.3, 我们有

$$\begin{aligned}
 \|K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^1(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})\|_{X_T} &\lesssim \|\tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega\|_{X_T}^2 + \|\tilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega\|_{Y_T}^2 \\
 &\lesssim \|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})\|_{X_T \times Y_T}^2 + \|(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)\|_{X_T \times Y_T}^2,
 \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
 \|K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^2(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})\|_{Y_T} &\lesssim \|\tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega\|_{X_T} \|\tilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega\|_{Y_T} + \|\tilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega\|_{Y_T}^2 \\
 &\lesssim \|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})\|_{X_T \times Y_T}^2 + \|(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)\|_{X_T \times Y_T}^2.
 \end{aligned}$$

因此, 存在常数 C_* , 使得

$$\|(K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^1, K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^2)(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})\|_{X_T \times Y_T} \leq C_* (\|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})\|_{X_T \times Y_T}^2 + \|(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)\|_{X_T \times Y_T}^2). \tag{5.2}$$

同时, 我们有

$$K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^1(\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_1) - K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^1(\tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_2)$$

$$= \int_0^t S_{t-\tau} (\mathcal{B}_1(\tilde{\mathbf{u}}_1 + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega) - \mathcal{B}_1(\tilde{\mathbf{u}}_2 + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}}_2 + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)) d\tau.$$

我们知道

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}_1(\tilde{\mathbf{u}}_1 + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega) - \mathcal{B}_1(\tilde{\mathbf{u}}_2 + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}}_2 + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega) \\ &= B_1^1(\tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{u}}_1 + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega) + B_1^1(\tilde{\mathbf{u}}_2 + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_2) + B_1^1(\tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega) + B_1^1(\tilde{\mathbf{v}}_2 + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_2) \end{aligned}$$

因此, 由命题4.2, 我们得到

$$\begin{aligned} & \|K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^1(\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_1) - K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^1(\tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_2)\|_{X_T} \\ & \leq C\|\tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_2\|_{X_T} (\|\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2\|_{X_T} + \|\bar{\mathbf{u}}_0^\omega\|_{X_T}) + \|\tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_2\|_{Y_T} (\|\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2\|_{X_T} + \|\bar{\mathbf{v}}_0^\omega\|_{X_T}). \end{aligned} \tag{5.3}$$

类似地,

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}_2(\tilde{\mathbf{u}}_1 + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega) - \mathcal{B}_2(\tilde{\mathbf{u}}_2 + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}}_2 + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega) \\ &= B_2^1(\tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega) + B_2^1(\tilde{\mathbf{u}}_2 + \bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_2) + B_2^1(\tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega) + B_2^1(\tilde{\mathbf{v}}_2 + \bar{\mathbf{v}}_0^\omega, \tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_2). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \|K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^2(\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_1) - K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^2(\tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_2)\|_{Y_T} \\ & \leq C\|\tilde{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{u}}_2\|_{X_T} (\|\tilde{\mathbf{v}}_1\|_{Y_T} + \|\bar{\mathbf{v}}_0^\omega\|_{Y_T}) + \|\tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_2\|_{Y_T} (\|\tilde{\mathbf{u}}_2\|_{X_T} + \|\bar{\mathbf{u}}_0^\omega\|_{X_T} + \|\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2\|_{Y_T} + \|\bar{\mathbf{v}}_0^\omega\|_{Y_T}). \end{aligned} \tag{5.4}$$

结合(5.3)和(5.4), 我们得到

$$\begin{aligned} & \|(K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^1, K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^2)(\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_1) - (K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^1, K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^2)(\tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_2)\|_{X_T \times Y_T} \\ & \leq C_* \|(\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_1) - (\tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_2)\|_{X_T \times Y_T} (\|(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1), (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)\|_{X_T \times Y_T} + \|(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)\|_{X_T \times Y_T}). \end{aligned} \tag{5.5}$$

我们取 $\lambda = \frac{1}{4C_*}$, 由(5.2)和(5.5), 当 $\|(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)\|_{X_T \times Y_T} \leq \lambda$ 时, 映射 $(K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^1, K_{(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)}^2)$ 在空间

$$\{(f, g) \mid \|(f, g)\|_{X_T \times Y_T} \leq 2\lambda\}$$

上是压缩映射。因此系统(5.1) 在 $X_T \times Y_T$ 中存在唯一解 $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})$ 。 □

6. 主要定理的证明

由命题4.1, 我们知道, 对于 $r \geq \frac{8}{1-2\delta}$

$$\|(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)\|_{L_\omega^\infty(X_T \times Y_T)} \lesssim \sqrt{r} \|(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)\|_{\dot{H}_x^{-1+\delta} \times \dot{H}_x^{-\frac{1}{2}+\delta}}, \tag{6.1}$$

且

$$\lim_{T \rightarrow 0} \|(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)\|_{L_\omega^r(X_T \times Y_T)} = 0.$$

定义

$$E_{\lambda, T} := \{\omega \mid \|(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)\|_{X_T \times Y_T} \leq \lambda\}, \quad \Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\lambda, \frac{1}{n}},$$

则由 Chebyshev 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Sigma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(E_{\lambda, \frac{1}{n}}) \\ &\geq 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} C\lambda^{-r} \|(\bar{\mathbf{u}}_0^\omega, \bar{\mathbf{v}}_0^\omega)\|_{L_\omega^r(X_{\frac{1}{n}} \times Y_{\frac{1}{n}})} \\ &= 1. \end{aligned}$$

对于任意 $\omega \in \Sigma$, 存在 n 使得 $\omega \in E_{\lambda, \frac{1}{n}}$, 根据命题5.1, 在集合 $E_{\lambda, \frac{1}{n}}$ 中, 系统 (6.1) 在 $X_{\frac{1}{n}} \times Y_{\frac{1}{n}}$ 中存在唯一温和解。因此, 对于几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 存在 $T_\omega > 0$ 和唯一的解 $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) \in X_{T_\omega} \times Y_{T_\omega}$ 。由命题4.4 和 4.5, 我们还有 $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) \in C([0, T_\omega]; \dot{H}^{2\delta} \times \dot{H}^{-1+2\delta})$ 。

结合(6.1)和引理2.4, 我们得到

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_\omega = \infty\} &\geq \mathbf{P}(E_{\lambda, \infty}) \\ &\geq 1 - C \exp(-C\lambda^2 \|\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}+\delta} \times \dot{H}^{-1+\delta}}^{-2}). \end{aligned}$$

基金项目

国家自然科学基金资助项目 (12101460), 浙江省自然科学基金资助项目 (LQ22A010005)。

参考文献

- [1] Rubinstein, I. (1990) Electro-Diffusion of Ions. SIAM Studies in Applied Mathematics. In: *SIAM Studies in Applied Mathematics*, SIAM.
- [2] Lin, F. (2012) Some Analytical Issues for Elastic Complex Fluids. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **65**, 893-919. <https://doi.org/10.1002/cpa.21402>
- [3] Newman, J. and Thomas-Alyea, K.E. (2004) Electrochemical Systems. 3rd Edition, Wiley.
- [4] Deng, C., Zhao, J. and Cui, S. (2010) Well-Posedness of a Dissipative Nonlinear Electrohydrodynamic System in Modulation Spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, **73**, 2088-2100. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.05.037>
- [5] Deng, C., Zhao, J. and Cui, S. (2011) Well-Posedness for the Navier-Stokes-Nernst-Planck-Poisson System in Triebel-Lizorkin Space and Besov Space with Negative Indices. *Journal of*

- Mathematical Analysis and Applications*, **377**, 392-405.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.11.011>
- [6] Zhao, J., Deng, C. and Cui, S. (2010) Global Well-Posedness of a Dissipative System Arising in Electrohydrodynamics in Negative-Order Besov Spaces. *Journal of Mathematical Physics*, **51**, Article 093101. <https://doi.org/10.1063/1.3484184>
- [7] Zhao, J., Deng, C. and Cui, S. (2011) Well-Posedness of a Dissipative System Modeling Electrohydrodynamics in Lebesgue Spaces. *Differential Equations & Applications*, **3**, 427-448. <https://doi.org/10.7153/dea-03-27>
- [8] Burq, N. and Tzvetkov, N. (2008) Random Data Cauchy Theory for Supercritical Wave Equations I: Local Theory. *Inventiones Mathematicae*, **173**, 449-475. <https://doi.org/10.1007/s00222-008-0124-z>
- [9] Deng, Y. (2012) Two-Dimensional Nonlinear Schrödinger Equation with Random Radial Data. *Analysis & PDE*, **5**, 913-960. <https://doi.org/10.2140/apde.2012.5.913>
- [10] Spitz, M. (2023) Almost Sure Local Wellposedness and Scattering for the Energy-Critical Cubic Nonlinear Schrödinger Equation with Supercritical Data. *Nonlinear Analysis*, **229**, Article 113204. <https://doi.org/10.1016/j.na.2022.113204>
- [11] Thomann, L. (2009) Random Data Cauchy Problem for Supercritical Schrödinger Equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **26**, 2385-2402. <https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2009.06.001>
- [12] Lührmann, J. and Mendelson, D. (2014) Random Data Cauchy Theory for Nonlinear Wave Equations of Power-Type on \mathbb{R}^3 . *Communications in Partial Differential Equations*, **39**, 2262-2283. <https://doi.org/10.1080/03605302.2014.933239>
- [13] Lührmann, J. and Mendelson, D. (2016) On the Almost Sure Global Well-Posedness of Energy Sub-Critical Nonlinear Wave Equations on \mathbb{R}^3 . *New York Journal of Mathematics*, **22**, 209-227.
- [14] Deng, C. and Cui, S. (2011) Random-Data Cauchy Problem for the Navier-Stokes Equations on T^3 . *Journal of Differential Equations*, **251**, 902-917. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.05.002>
- [15] Zhang, T. and Fang, D. (2011) Random Data Cauchy Theory for the Incompressible Three Dimensional Navier-Stokes Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **139**, 2827-2837. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-2011-10762-7>
- [16] Dai, M. (2024) Almost Sure Existence of Global Weak Solutions for Supercritical Electron MHD. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—B*, **29**, 1584-1610. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2023146>
- [17] Dai, M. (2024) Almost Sure Well-Posedness for Hall MHD. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **26**, Article No. 13. <https://doi.org/10.1007/s00021-023-00848-x>
- [18] Du, L. and Zhang, T. (2017) Almost Sure Existence of Global Weak Solutions for Incompressible MHD Equations in Negative-Order Sobolev Space. *Journal of Differential Equations*, **263**, 1611-1642. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.03.026>

-
- [19] Wang, J. and Wang, K. (2017) Almost Sure Existence of Global Weak Solutions to the 3D Incompressible Navier-Stokes Equation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—A*, **37**, 5003-5019. <https://doi.org/10.3934/dcds.2017215>
- [20] Tzvetkov, N. (2009) Construction of a Gibbs Measure Associated to the Periodic Benjamin-Ono Equation. *Probability Theory and Related Fields*, **146**, 481-514. <https://doi.org/10.1007/s00440-008-0197-z>
- [21] Miao, C., Yuan, B. and Zhang, B. (2008) Well-Posedness of the Cauchy Problem for the Fractional Power Dissipative Equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **68**, 461-484. <https://doi.org/10.1016/j.na.2006.11.011>
- [22] Bahouri, H., Chenmin, J.-Y. and Danchin, R. (2011) Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. In: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. 343, Springer.