Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(1), 1-5
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.141001

Hans汉斯

倒叙、顺叙和插叙在极限证明题中的应用

孙慧静[1*]，马启建[2]，杜彬彬[1]

[1]海军航空大学航空基础学院，山东 烟台
[2]烟台文化旅游职业学院基础部，山东 烟台

收稿日期：2024年12月7日；录用日期：2025年1月1日；发布日期：2025年1月8日

摘　要

极限是高等数学中的一个核心概念。它在高等数学起着举足轻重的作用。如何书写利用定义证明极限的证明过程，对于初学者来说难学，对于刚入职的教师来说难教。因此，本文介绍采用一种借鉴文学中“倒叙”、“顺叙”和“插叙”的写作手法来叙述解题过程的方法，并通过两个具体的例子，详细展示了如何利用“倒叙 + 插叙”和“顺叙”书写证明过程。此外，还探讨了证明过程中的“只须”和“只需”的区别。

关键词

极限定义，证明过程的书写，倒叙和顺叙，只须和只需

The Application of Reverse, Forward, and Interjection in Proof Problems of Limit Definition

Huijing Sun[1*], Qijian Ma[2], Binbin Du[1]

[1]School of Basic Sciences for Aviation, Naval Aviation University, Yantai Shandong
[2]Department of Basic Course, Yantai Vocational College of Culture and Tourism, Yantai Shandong

Received: Dec. 7th, 2024; accepted: Jan. 1st, 2025; published: Jan. 8th, 2025

Abstract

Limit, a core concept in advanced mathematics, plays a crucial role in advanced mathematics. The writing of the proof process for using limit definitions to prove limit problems is difficult for newly hired teachers and difficult for beginners to learn. Therefore, this article introduces a method of using the writing techniques of “reverse proof”, “forward proof”, and “interjection” borrowed from

*通讯作者。

文章引用: 孙慧静, 马启建, 杜彬彬. 倒叙、顺叙和插叙在极限证明题中的应用[J]. 应用数学进展, 2025, 14(1): 1-5.
DOI: 10.12677/aam.2025.141001

literature to describe the problem-solving process. Through two specific examples, it demonstrates in detail how to use "reverse proof + interjection" and "forward proof" to write proof of the process. In addition, the difference between "only necessary" and "only needed" in the proof process was also explored.

Keywords

Limit Definition, Writing the Proof Process, Forward Proof and Forward Proof, Only Necessary and Only Needed

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

“极限”是《高等数学》[1]中的一个核心概念，也是一个较为抽象的概念。对于刚上大一的理工科新生来说，利用极限定义证明极限的问题是一个不小的挑战。学生在学习这部分内容时，对于如何书写证明过程，显得较为吃力。究其原因，一是极限概念本身比较抽象，而且证明过程需要严格的逻辑和条理清晰的推导；二是大一新生还停留在高中时对数学的理解与掌握，只擅长计算，不擅长叙述推理过程。因此，对于利用极限定义证明某个函数的极限的书写证明问题，有必要和刚入职的一线教师和初学者一起探讨如何教和如何学。

众所周知，在文学中，记叙文的写作手法可以采用顺叙、倒叙和插叙等[2]。顺叙就是按照事件发展的时间先后次序来叙述，它的优点在于条理清晰，层次分明，但可能会显得有些平淡无奇，缺乏悬念和起伏。倒叙，是把事件的结局或某个最突出的片段提在前边叙述，然后再从事件的开头按原来的发展顺序进行叙述。它能够制造悬念，吸引读者的兴趣，但需要作者有较强的驾驭能力。插叙则是在叙述中心事件的过程中，为了帮助展开情节或刻画人物，暂时中断叙述的线索，插入一段与主要情节相关的内容，然后再接着叙述原来的内容。它能够丰富故事的内容，增加故事的层次感和深度。

受此启发，在数学中，特别是极限证明题中，我们也可以借鉴“倒叙”、“顺叙”和“插叙”这样的写作手法来叙述解题过程。顺叙在极限证明题中通常指的是从已知条件出发，逐步推导出结论的过程。这是一种较为直接的证明方式，不过需要证明者对整个问题全都弄明白后，才能下笔书写。倒叙是一种将如何思考问题及分析问题展现出来的一种叙述方式，即采用一种反向思考的方式，即先考虑结论，然后逆向推导需要满足的条件。倒叙不需要事先对问题完全搞明白后再下笔，可以一边推导一边记录，最后得出结论也是水到渠成的过程。倒叙的手法是极限定义证明题的一种最常用的方式。插叙在极限证明中表现为在主要证明过程中插入一个或多个辅助命题或中间步骤的证明。这些辅助证明有助于简化主要证明或填补逻辑上的空白。插叙通常可以穿插倒叙和顺叙的过程中，比较灵活。本文的意义在于尝试将文学中的叙事技巧引入数学证明的教学中，这是一种比较新颖的尝试，有助于提高学生的学习兴趣和理解能力。

下面我们将利用典型的例题，来说明如何运用倒叙、顺叙和插叙来书写极限定义证明题的过程。

2. 典型例题

例 1 设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ [1]。

证明过程采取“倒叙和插叙”相结合的方法如下：

证明：(i) 要证 $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，只须证明 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists N \in N^+$，s.t.当 $n > N$ 时，有 $|x_n y_n - 0| < \varepsilon$ 成立。而 $|x_n y_n - 0| = |x_n y_n|$，故只须 $|x_n y_n| < \varepsilon$ 成立即可。

(ii) 由 $\{x_n\}$ 有界，即，$\exists M > 0$，$\forall n \in N^+$，有 $|x_n| < M$ 成立。

又 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$，即，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in N^+$，s.t.当 $n > N_1$ 时，有 $|y_n - 0| = |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ 成立。

(iii) 于是，只须取 $\exists N = N_1$，当 $n > N$ 时，有

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \text{ 成立，即 } \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0 \text{。}$$

注：1) 我们将证明过程分成了三部分，分别记为(i)、(ii)和(iii)。

2) 该证明过程中的倒叙部分为：(i) + (iii)。即“只须证明 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists N \in N^+$，s.t.当 $n > N$ 时，有 $|x_n y_n - 0| < \varepsilon$ 成立。而 $|x_n y_n - 0| = |x_n y_n|$，故只须 $|x_n y_n| < \varepsilon$ 成立即可。于是，只须取 $\exists N = N_1$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ 成立，即 $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$。”

3) 该证明过程中的插叙部分为：(ii)，即，“由 $\{x_n\}$ 有界，即“$\exists M > 0$，$\forall n \in N^+$，有 $|x_n| < M$ 成立。又 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$，即，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in N^+$，s.t.当 $n > N_1$ 时，有 $|y_n - 0| = |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ 成立。”

4) 书写步骤：(a) 明确目标结论：要证明 $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$。(b) 采用逆向思考：只须证明 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists N \in N^+$，s.t.当 $n > N$ 时，有 $|x_n y_n - 0| < \varepsilon$ 成立。(c) 推导条件：而 $|x_n y_n - 0| = |x_n y_n|$，故只须 $|x_n y_n| < \varepsilon$ 成立即可。再将两个已知条件插叙进去，条件 $|x_n y_n| < \varepsilon$ 可以满足。(d) 得出结论：因此，$\exists N = N_1$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ 成立，即 $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$。

下面采取“顺叙”的手法叙述证明过程。

证明：(i) 依题意，由 $\{x_n\}$ 有界，即，$\exists M > 0$，$\forall n \in N^+$，有 $|x_n| < M$ 成立。

又 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$，即，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in N^+$，s.t.当 $n > N_1$ 时，有 $|y_n - 0| = |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ 成立。

(ii) 于是，对上述 $\varepsilon > 0$，$\exists N = N_1 \in N^+$，s.t.当 $n > N$ 时，有

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

成立。

注：1) 我们将证明过程分成了两部分，分别记为了(i)和(ii)。

2) 已知条件有两个：其一数列 $\{x_n\}$ 有界，其二 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$。

3) 推导过程为(i)，即“由 $\{x_n\}$ 有界，即，$\exists M > 0$，$\forall n \in N^+$，有 $|x_n| < M$ 成立。又 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$，即，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in N^+$，s.t.当 $n > N_1$ 时，有 $|y_n - 0| = |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ 成立。

4) 结论为(ii)。

例 2 证明：若 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$，则 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$。

与例 1 类似，证明过程采取“倒叙和插叙”相结合的方法如下：

证明：(i) 要证 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$，由极限的定义，即证 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，s.t.当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立。

(ii) 由已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 可得，对上述 ε，$\exists X_1>0$，s.t.当 $x>X_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，即上述 ε，$\exists X_2>0$，s.t.当 $x<-X_2$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。

(iii) 于是，只须取 $X=\max\{X_1,X_2\}$，当 $|x|>X$ 时，则 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$。

注：1) 我们将证明过程分成了三部分，分别记为了(i)、(ii)和(iii)。

2) 倒叙部分为(i)+(iii)。即“要证 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，由极限的定义，即证 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，s.t.当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。于是，只须取 $X=\max\{X_1,X_2\}$，当 $|x|>X$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$。”

3) 插叙部分为(2)。即“由已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 可得，对上述 ε，$\exists X_1>0$，s.t.当 $x>X_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，即上述 ε，$\exists X_2>0$，s.t.当 $x<-X_2$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。”

4) 书写步骤：(a) 明确目标结论：我们要证明 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$。(b) 采取逆向思考：只须证明 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，s.t.当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。(c) 推导条件：欲使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则将两个已知条件插叙进去，结论 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 可以成立。(d) 得出结论：只须取 $X=\max\{X_1,X_2\}$，当 $|x|>X$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$。

下面再采取“顺叙”的写法来叙述证明过程。

证明：(i) 依题意，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，由极限定义可得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists X_1>0$，s.t.当 $x>X_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，即上述 ε，$\exists X_2>0$，s.t.当 $x<-X_2$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。

(ii) 取 $X=\max\{X_1,X_2\}$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$。

注：1) 我们将证明过程分成了两部分，分别记为了(i)和(ii)。

2) 已知条件有两个：其一 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，其二 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$；

3) 推导过程为(i)，即“依题意，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，由极限定义可得，$\forall\varepsilon>0$，$\exists X_1>0$，s.t.当 $x>X_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，即上述 ε，$\exists X_2>0$，s.t.当 $x<-X_2$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立。”

4) 结论为(ii)。

前面的分析过程中，我们用到了“只须”而非“只需”[3]。事实上，这两个词是有差别的。其中“只须”带有一种规定或指示预期，强调某件事情是必须要做的，以确保整个事情的顺利进行。“只须”用于强调条件的必要性。“只需”带有一种建议或提醒的语气，指出达到某个目标所需的最小条件或要求。我们是由结论反推条件的，因此这个条件是具有必要性，故，用“只须”而非“只需”。

3. 结论

本文我们以两个简单而典型的例题为例，展示了如何利用“倒叙”、“顺叙”和“插叙”的手法书写极限定义证明题的书写。希望对刚入职的教师如何教以及对初学者如何学这部分内容能提供一些帮助。

当然，在数学证明中，重要的是逻辑清晰和条理分明，而不是刻意追求某种叙述方式。因此，无论是“顺叙”、“倒叙”还是“插叙”，都应该根据问题的具体情况和证明的需要来灵活运用。

1) 弱化叙事手法的类比，突出数学思维的训练：文学中的倒叙是为了制造悬念，增强故事的吸引力，而数学证明中的倒叙则是为了方便逻辑推导，两者目的不同。

2) 缺乏对不同方法的比较分析：建议补充更多不同类型的例题，并对“倒叙 + 插叙”和“顺叙”等方法进行比较分析，帮助学生更好地理解和选择合适的证明方法。

基金项目

海军航空大学科研自主立项项目(H2202301004)。

参考文献

[1] 同济大学数学科学学院. 高等数学(上) [M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023: 112-117.

[2] 孙俍工. 怎样写好记叙文[M]. 第 1 版. 北京: 中国文史出版社, 2021: 86-93.

[3] 中国社会科学院语言研究所词典编辑室. 现代汉语词典[M]. 第 7 版. 北京: 商务印书馆, 2016: 343.