Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(1), 105-111
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.141014

Hans汉斯

一类次线性Schrödinger-Maxwell方程无穷多非平凡解的存在性

汪敏庆，游仁青，陆晓娟*

桂林信息科技学院数学教研部，广西 桂林

收稿日期：2024年12月15日；录用日期：2025年1月8日；发布日期：2025年1月20日

摘 要

本文借助变分法和临界点理论研究一类次线性Schrödinger-Maxwell方程无穷多非平凡解的存在性问题 $\begin{cases}-\Delta u+V(x)u+\alpha\phi f(u)=g(x,u), & x\in\mathbf{R}^3,\\ -\Delta\phi=2\alpha F(u), & x\in\mathbf{R}^3.\end{cases}$ 其中 $\alpha>0$，$V(x)\in C^1(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$，$V(x)>0$。在 f,g 符合相关条件下，$p\in(1,2)$。

关键词

Schrödinger-Maxwell方程，非平凡解，临界点理论，变分法，次线性

The Existence of Infinitely Many Nontrivial Solutions for a Kind of Schrödinger-Maxwell Equation with Sublinear Potentials

Minqing Wang, Renqing You, Xiaojuan Lu*

Mathematics Teaching and Research Department, Guilin Institute of Information Technology, Guilin Guangxi

Received: Dec. 15th, 2024; accepted: Jan. 8th, 2025; published: Jan. 20th, 2025

Abstract

In this paper, we discuss the existence of infinitely many nontrivial solutions for the following kind of sublinear Schrödinger-Maxwell equation by using the variational method and critical point theory.

*通讯作者。

文章引用: 汪敏庆, 游仁青, 陆晓娟. 一类次线性 Schrödinger-Maxwell 方程无穷多非平凡解的存在性[J]. 应用数学进展, 2025, 14(1): 105-111. DOI: 10.12677/aam.2025.141014

$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u+\alpha\phi f(u)=g(x,u), & x\in \mathrm{R}^3,\\ -\Delta\phi=2\alpha F(u), & x\in\mathrm{R}^3.\end{cases}$ **where** $\alpha>0$, $V(x)\in C^1(\mathrm{R}^3,\mathrm{R})$, $V(x)>0$. **Under certain assumptions on** f,g **and** $p\in(1,2)$.

Keywords

Schrödinger-Maxwell Equation, Nontrivial Solutions, Critical Point Theory, Variational Methods, Sublinear Potentials

1. 引言

考虑一类次线性项 Schrödinger-Maxwell 系统无穷多非平凡解的存在性。

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u+\alpha\phi f(u)=g(x,u), & x\in \mathrm{R}^3,\\ -\Delta\phi=2\alpha F(u), & x\in\mathrm{R}^3.\end{cases}\tag{1}$$

这样的方程又被称为 Schrödinger-Poisson 方程。Schrödinger-Maxwell 方程解的存在性在凝聚态物理、电磁学与量子力学的交叉领域、非线性光学、材料科学以及量子通信与量子计算等领域有十分重要的应用。

近几十年来，大批学者在现代变分法的帮助下，通过对Schrödinger-Maxwell方程中的位势函数和非线性项进行一系列的假设，取得了一系列丰硕的研究成果，具体可参考[1]-[5]。文献[6]中利用环绕定理首次研究了带有零谱点的问题(1)的非平凡解，更多关于这方面的结论可参考[7]-[11]。文献[12]中利用对称的山路定理得到了当 $f(u)=u$ 时问题(1)的无穷多解。结合大部分文献考虑的是 $f(u)=u$ 的情形，在文献[12]基础上，考虑 $f(u)$ 为正连续函数时，系统(1)无穷多非平凡解的存在性。

对 V,f,g 有以下假设

(V) $V(x)\in C^1(\mathrm{R}^3,\mathrm{R})$，$\inf\limits_{x\in\mathrm{R}^3}V(x)\ge a_1>0$，其中 $a_1>0$ 是一个常数。对每一个 $M>0$，$\operatorname{meas}\{x\in\mathrm{R}^3, V(x)\le M\}<\infty$。这里的测度是 R^3 空间里的 Lebesgue 测度。

(F$_1$) $f\in C^1(\mathrm{R}^+,\mathrm{R}^+)$，$|f(t)|\le c(|t|+|t|^{\alpha}), t\in[0,+\infty), c>0, \alpha\in(2,4)$。

(F$_2$) 当 $t\to 0$ 时，对 $\forall x\in\mathrm{R}^3$，都有 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(x,t)}{t}=+\infty$。

(F$_3$) $g\in C(\mathrm{R}^3\times\mathrm{R})$，对 $\forall t\in\mathrm{R}, x\in\mathrm{R}^3$，$1<P<2$，都有 $|g(x,t)|\le a(x)|t|^{p-1}$，其中 $a(x)\in L^{\frac{2}{2-p}}$ 为正连续函数。

(F$_4$) 对 $\forall t\in\mathrm{R}, x\in\mathrm{R}^3$，都有 $g(x,-t)=-g(x,t)$。

定理 1.1 若假设(V)，(F$_1$)~(F$_4$)满足，则系统(1)有无穷多非平凡解 (u_k,ϕ_k) 满足：

$$\frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}^3}\left(|\nabla u_k|^2+V(x)u_k^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\alpha\int_{\mathrm{R}^3}\phi_k F(u_k)\mathrm{d}x-\int_{\mathrm{R}^3}G(x,u_k)\mathrm{d}x\to 0^-, u_k\to 0, k\to\infty.$$

其中 $G(x,u)=\int_0^u g(x,s)\mathrm{d}s$。

2. 预备工作

定义 2.1. [13]设 E 为一个 Banach 空间，相应范数记为$\|\cdot\|$，$E=\overline{\oplus_{j\in N}X_j}$，$\dim X_j<\infty$，$j\in N$。$Y_k=\oplus_{j=0}^{k}X_j$，$Z_k=\overline{\oplus_{j=k+1}^{\infty}X_j}$。

定义 2.2. [13]定义函数空间：$H^1\left(\mathrm{R}^3\right)=u\in L^2\left(\mathrm{R}^3\right):\nabla u\in L^2\left(\mathrm{R}^3\right)$，对应内积和范数分别为

$$\langle u,v\rangle_1=\int_{\mathrm{R}^3}\left(\nabla u\cdot\nabla v+uv\right)\mathrm{d}x.$$

和

$$\|u\|_1=\langle u,u\rangle_1^{\frac{1}{2}}.$$

定义 2.3. [13]定义函数空间 $D^{1,2}\left(\mathrm{R}^3\right)=\left\{u\in L^{2^*}\left(\mathrm{R}^3\right):|\nabla u|\in L^2\left(\mathrm{R}^3\right)\right\}$。相应的范数为

$$\|u\|_{D^{1,2}}=\left(\int_{\mathrm{R}^3}|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$$

定义 2.4. [13]定义空间

$$E=\left\{u\in H^1\left(\mathrm{R}^3\right):\int_{\mathrm{R}^3}\left(|\nabla u|+V(x)|u|^2\right)\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

则 E 是一个 Hilbert 空间，对应的内积和范数分别为

$$\langle u,v\rangle=\int_{\mathrm{R}^3}\left(\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv\right)\mathrm{d}x,$$

和

$$\|u\|=\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

定义 2.5. [13]记$|\cdot|$为 $L^s\left(\mathrm{R}^3\right)$ 的范数，$s\in(2,6)$，再记

$$S=\inf_{u\in D^{1,2}\left(\mathrm{R}^3\right),|u|_6=1}|\nabla u|_2,\gamma_s=\sup_{u\in H^1\left(\mathrm{R}^3\right),\|u\|=1}|u|_s.$$

显然，嵌入 $E\to L^s\left(\mathrm{R}^3\right)\left(\forall s\in\left[2,2^*\right]\right)$ 是连续的。
结合[14]知，当所有的 $r>0,1\le p<2^*$ 时，从空间 E 到空间 $L^p\left(\overline{B_r}\right)$ 的嵌入为紧的，$\overline{B_r}=\left\{x\in\mathrm{R}^N:|x|\le r\right\}$。
规定泛函 $I:E\times D^{1,2}\left(\mathrm{R}^3\right)\to\mathrm{R}$ 如下：

$$I(u,\phi)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}^3}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x+\alpha\int_{\mathrm{R}^3}\phi_uF(u)\mathrm{d}x-\int_{\mathrm{R}^3}G(x,u)\mathrm{d}x.$$

则 $I\in C^1$ 的，且 I 的临界点为方程(1)的一个解。
有[14]可知，对每一个 $u\in H^1\left(\mathrm{R}^3\right)$，有且仅有一个 $\phi_u\in D^{1,2}\left(\mathrm{R}^3\right)$，满足：

$$-\Delta\phi=\alpha F(u), \tag{2}$$

并且 ϕ_u 具有下列性质：
(i) $\|u\|_{D^{1,2}}^2=\int_{\mathrm{R}^3}\alpha F(u)\phi_u\mathrm{d}x$；
(ii) $\phi_u\ge 0$；
(iii) $\|u\|_{D^{1,2}}^2\le C\left(\|u\|^2+\|u\|^{1+\alpha}\right)$；
(iv) $\int_{\mathrm{R}^3}\alpha F(u)\phi_u\mathrm{d}x\le\tilde{C}\left(\|u\|^4+\|u\|^{2(1+\alpha)}\right)$，其中 $\tilde{C}$ 仅仅与 C 有关。
ϕ_u 可表示为 $\phi_u=\int_{\mathrm{R}^3}\dfrac{\alpha F(u(y))}{|x-y|}\mathrm{d}y$。

考虑到

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi_u|^2\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}\alpha F(u)\phi_u\mathrm{d}x,$$

因而 I 可表示为 $\Phi:E\to\mathbb{R}$：

$$\Phi(u)=I(u,\phi)=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\alpha\phi_u F(u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}G(x,u)\mathrm{d}x.$$

故 $\Phi\in C^1$ 的，且：

$$\langle\Phi'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\nabla v+v(x)uv+\alpha\phi_u f(u)v-g(x,u)v)\mathrm{d}x.$$

当且仅当 $u\in E$ 是 Φ 的一个临界点时，$(u,\phi)\in E\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是方程(1)的一个解。

定理 2.6 [15]设 $(X,\|\cdot\|)$ 为Hilbert空间，e_j 为其对应的一组标准正交基。令 $X_j=span\{e_j\}$，$Y_k=\oplus_{j=0}^k X_j$，$Z_k=\oplus_{j=0}^k X_j$。设泛函 $\Phi\in C^1(X,\mathbb{R})$，且 $\Phi(-u)=\Phi(u),u\in X$。若存在 $k_0\in N$，使得对所有的 $k>k_0$，存在 $\rho_k>r_k>0$，且：

(Φ1) $a_k:=\max\limits_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}\Phi(u)\le 0$；

(Φ2) $b_k:=\inf\limits_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}\Phi(u)\to\infty,k\to\infty$；

(Φ3) 对任意的 $c>0$，Φ 满足 $(PS)_c$ 条件。

则 Φ 具有一列无界的临界值。

3. 定理 1.1 的证明

引理 3.1 若(V)，(F_1)~(F_4)条件成立，则 Φ 下方有界且满足 $(PS)_C$ 条件。

证明：由条件(V)，(F_3)，有：

$$|G(x,u)|\le\frac{a(x)}{p}|u|^p,\forall(x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}). \tag{3}$$

对任意给定的 $v\in E$，令 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^3:|v|\le 1\}$。由上式和 Hölder 不等式，有：

$$\begin{aligned}\Phi(v)&=\frac{1}{2}\|v\|^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\alpha\phi_v F(v)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}G(x,v)\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\|v\|_\Omega^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\alpha\phi_v F(v)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}G(x,v)\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\|v\|_\Omega^2-\int_\Omega\left(\frac{a(x)}{p}|v|^p\right)\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\|v\|_\Omega^2-\frac{1}{p}a(x)_{\frac{2}{2-p},\Omega}\|v\|_{2,\Omega}^p\\&\ge\frac{1}{2}\|v\|_\Omega^2-\frac{c^2}{p}a(x)_{\frac{2}{2-p}}\|v\|_\Omega^p.\end{aligned}$$

故 Φ 下方有界。

现在来证明 Φ 满足 $(PS)_C$ 条件。由上述不等式知，存在常数 $A>0$，使得：

$$\|u_k\|_2\le\beta^{-\frac{1}{2}}\|u_k\|\le A,k\in N.$$

假定在 E 中 u_k 弱收敛于 u_0，则由(F_3)得：对任意给定的 $\varepsilon>0$，选定 $R_\varepsilon>0$，使得：

$$\left(\int_{|x|\ge R_\varepsilon}|a(x)|^{\frac{2}{2-p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2-p}}<\varepsilon. \tag{4}$$

故有等式：

$$\lim_{k\to\infty}\int_{|x|\le R_\varepsilon}|u_k(x)-u_0(x)|^2\mathrm{d}x=0. \tag{5}$$

成立。若等式(5)不成立，则存在一个常数 $\varepsilon_0>0$ 和一个子列 $\{u_{k_j}\}$，使得：

$$\int_{|x|\le R_\varepsilon}\left|u_{k_j}(x)-u_0(x)\right|^2\mathrm{d}x\ge\varepsilon_0,\forall j\in N. \tag{6}$$

故 $\{u_{k_j}\}$ 在 $L^2\left(\overline{B_{R_\varepsilon}}\right)$ 中有一个收敛的子列。若 $\{u_{k_j}\}$ 在 $L^2\left(\overline{B_{R_\varepsilon}}\right)$ 中收敛于 $\overline{u}$，则：

$$\lim_{j\to\infty}\int_{|x|\le R_\varepsilon}\left|u_{k_j}(x)-\overline{u}(x)\right|^2\mathrm{d}x=0. \tag{7}$$

又 $\{u_{k_j}\}$ 在 $E\in L^2\left(\overline{B_{R_\varepsilon}}\right)$ 中弱收敛于 u_0，从而 $\{u_{k_j}\}$ 在 $L^2\left(\overline{B_{R_\varepsilon}}\right)$ 中弱收敛于 u_0 成立。结合(6)可知，当 $x\in L^2\left(\overline{B_{R_\varepsilon}}\right)$ 时，有 $u_0(x)=\overline{u}(x)$，故：

$$\lim_{j\to\infty}\int_{|x|<R_\varepsilon}\left|u_{k_j}(x)-\overline{u}(x)\right|^2\mathrm{d}x=0,$$

这与(4)矛盾，故(5)成立。由(5)知，从而存在常数 $k_0\in N$，使得：

$$\lim_{j\to\infty}\int_{|x|\le R_\varepsilon}|u_k(x)-u_0(x)|^2\mathrm{d}x<\varepsilon^2,\forall k>k_0. \tag{8}$$

结合(8)，(F_3)和 Hölder 不等式，有：

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\le R_\varepsilon}\left|g(x,u_k(x))-g(x,u_0(x))\right|\cdot|u_k(x)-u_0(x)|\mathrm{d}x\\
&\le\left(\int_{|x|\le R_\varepsilon}\left|g(x,u_k(x))-g(x,u_0(x))\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_{|x|\le R_\varepsilon}|u_k(x)-u_0(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\\
&\le\left(\int_{|x|\le R_\varepsilon}2\left(\left|g(x,u_k(x))\right|^2+\left|g(x,u_0(x))\right|\right)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\varepsilon\\
&\le2\left(\int_{|x|\le R_\varepsilon}|a(x)|^2\left(|u_k|^{2(p-1)}+|u_0|^{2(p-1)}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\varepsilon\\
&\le2\left(\int_{|x|\le R_\varepsilon}\|a(x)\|_{\frac{2}{2-p}}^2\left(\|u_k\|_2^{2(p-1)}+\|u_0\|_2^{2(p-1)}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\varepsilon\\
&\le2\left[\|a(x)\|_{\frac{2}{2-p}}^2\left(A^{2(p-1)}+|u_0|_2^{2(p-1)}\right)\right]^{\frac12}\varepsilon,\forall k\ge k_0.
\end{aligned}$$

类似地，由(F_3)，(2)，(3)和 Hölder 不等式，有：

$$\int_{|x|\le R_\varepsilon}\left|g(x,u_k(x))-g(x,u_0(x))\right|\cdot|u_k(x)-u_0(x)|\mathrm{d}x\le2\left(A^p+\|u_0\|_2^p\right)\varepsilon,k\in N. \tag{9}$$

由于 ε 是任意的，结合(7)和(8)，有：

$$\int_{|x|\le R_\varepsilon}\left(g(x,u_k(x))-g(x,u_0(x)),u_k(x)-u_0(x)\right)\mathrm{d}x\to0,k\to\infty. \tag{10}$$

由(2)和 Hölder 不等式，有：

$$\begin{aligned}&\left|\int_{|x|\le R_\varepsilon}\alpha\phi_{uk}f(u_k)(u_k-u_0)\mathrm{d}x\right|\\&\le C\left|\int_{|x|\le R_\varepsilon}\alpha\left(|u_k|+|u_k|^\gamma\right)\phi_{uk}|u_k-u_0|\mathrm{d}x\right|\\&\le CC_0\left(|\phi_{uk}|_6\|u_k\|_{\frac{12}{5}}\|u_k-u_0\|_{\frac{12}{5}}+|\phi_{uk}|_6|u_k|_6^\gamma|u_k-u_0|_\beta\right)\end{aligned}$$

其中 $\beta=6/(5-\alpha)\in(2,6)$。由 Sobolev’s 嵌入定理和 ϕ_u 的性质(iii)，有：

$$\int_{\mathbb{R}^3}\alpha\phi_{u_k}f(u_k)(u_k-u_0)\mathrm{d}x\to0,k\to\infty.$$

故

$$\int_{\mathbb{R}^3}\alpha\left(\phi_{u_k}f(u_k)-\phi_{u_0}f(u_0)\right)(u_k-u_0)\mathrm{d}x\to0,k\to\infty.$$

又

$$\begin{aligned}&\left\langle\Phi'(u_k)-\Phi'(u_0),u_k-u_0\right\rangle\\&=\|u_k-u_0\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}\alpha\left(\phi_{u_k}f(u_k)-\phi_{u_0}f(u_0)\right)(u_k-u_0)\mathrm{d}x\\&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}\left(g(x,u_k(x))-g(x,u_0(x))\right)(u_k(x)-u_0(x))\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

结合(2)，(6)和(10)，有：

$$\left\langle\Phi'(u_k)-\Phi'(u_0),u_k-u_0\right\rangle\to0.$$

即 Φ 满足 $(PS)_C$ 条件。

引理 3.2 若假设(V)，(F_1)~(F_4)满足，则有 $\rho_k>r_k>0$，且：

$$a_k:=\sup_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}\Phi(u)\le0.$$

证明：由(F_2)假设，存在 $M>0$，使得：

$$\begin{aligned}\Phi(u)&=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\alpha\phi_uF(u)\mathrm{d}x-\int_\Omega G(x,u)\mathrm{d}x\\&\le\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{\tilde{C}}{2}\left(\|u\|^4+\|u\|^{2(1+\alpha)}\right)-\frac{1}{2}M\int|u|^2\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{\tilde{C}}{2}\left(\|u\|^4+\|u\|^{2(1+\alpha)}\right)-\frac{1}{2}M\|u\|^2.\end{aligned}$$

假定 M 足够大，且 $\|u\|=\rho_k$ 足够小时，得：$a_k:=\sup\limits_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}\Phi(u)\le0$。

定理 1.1 的证明 结合引理 3.1、引理 3.2 可得，系统(1)对应的泛函 Φ 满足定理 2.6 的所有条件。由定理 2.6 知，泛函 Φ 具有一列临界点 u_k，使得 $\Phi(u_k)\to0^-$，故定理 1.1 成立。

基金项目

本论文由 2022 年广西区教育厅高校中青年科研基础能力提升项目(2022KY1623)资助。

参考文献

[1] Adams, R.A. and Fournier, J.F. (2003) Sobolev Spaces. 2nd Edition, Academic Press.

[2] Alves, C.O., Souto, M.A.S. and Soares, S.H.M. (2011) Schrödinger-Poisson Equations without Ambrosetti-Rabinowitz Condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **377**, 584-592. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.11.031

[3] Ambrosetti, A. and Ruiz, D. (2008) Multiple Bound States for the Schrödinger-Poisson Problem. *Communications in Contemporary Mathematics*, **10**, 391-404. https://doi.org/10.1142/s021919970800282x

[4] Azzollini, A. and d'Avenia, P. (2012) On a System Involving a Critically Growing Nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **387**, 433-438. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.09.012

[5] Pomponio, A., Azzollini, A. and d'Avenia, P. (2010) On the Schrödinger-Maxwell Equations under the Effect of a General Nonlinear Term. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **27**, 779-791. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2009.11.012

[6] 秦栋栋. 薛定谔方程的基态解和多解性问题[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 中南大学, 2014.

[7] Bao, G. (2016) Infinitely Many Small Solutions for a Sublinear Schrödinger-Poisson System with Sign-Changing Potential. *Computers & Mathematics with Applications*, **71**, 2082-2088. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.04.006

[8] Sun, J. (2012) Infinitely Many Solutions for a Class of Sublinear Schrödinger-Maxwell Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **390**, 514-522. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.01.057

[9] Bartsch, T. and Qiang Wang, Z. (1995) Existence and Multiplicity Results for Some Superlinear Elliptic Problems on R^n. *Communications in Partial Differential Equations*, **20**, 1725-1741. https://doi.org/10.1080/03605309508821149

[10] Coclite, G.M. (2003) A Multiplicity Result for the Nonlinear Schrödinger-Maxwell Equations. *Communications in Applied Analysis*, **7**, 417-423.

[11] 席慧慧. 一类薛定谔泊松系统无穷多解的存在性[J]. 太原师范学院学报, 2013, 12(3): 32-35.

[12] 叶一蔚, 唐春雷. 带有超线性项或次线性项的 Schrödinger-Poisson 系统解的存在性与多重性[J]. 数学物理学报, 2015, 35(4): 668-682.

[13] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser.

[14] Bartsch, T., Wang, Z. and Willem, M. (2005) The Dirichlet Problem for Superlinear Elliptic Equations. *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations*, **2**, 1-55. https://doi.org/10.1016/s1874-5733(05)80009-9

[15] Yang, M.B. and Ding Y.H. (2010) Semiclassical Solutions for Nonlinear Schrödinger-Maxwell Equations. *Scientia Sinica*, **40**, 517-620.