Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(1), 112-125
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.141015

具有非线性广义源项和应力项的变系数波动方程解的整体存在性与不存在性

于佳利[*]**，魏天莹**

大连交通大学理学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年12月17日；录用日期：2025年1月11日；发布日期：2025年1月22日

摘　要

本文主要研究了一类含应力项的非线性变系数波动方程在不同能级下解的整体存在性及其爆破行为。基于泛函估计方法，构建了位势井框架，并在此基础上给出了次临界能级下解全局存在的条件及其解的爆破时间估计。同时，还探讨了临界能级下全局解存在的条件。

关键词

非线性变系数波动方程，应力项，解的整体存在性，解的爆破

The Global Existence and Nonexistence of Solutions for the Variable Coefficient Wave Equation with Nonlinear Generalized Source Term and Stress Term

Jiali Yu[*]**, Tianying Wei**

School of Science, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 17th, 2024; accepted: Jan. 11th, 2025; published: Jan. 22nd, 2025

Abstract

This paper mainly studies the existence of global solutions and the blow-up behavior for a class of nonlinear variable coefficient wave equations with stress term under different energy levels. Based

[*]通讯作者。

文章引用: 于佳利, 魏天莹. 具有非线性广义源项和应力项的变系数波动方程解的整体存在性与不存在性[J]. 应用数学进展, 2025, 14(1): 112-125. DOI: 10.12677/aam.2025.141015

on functional estimates, the potential well framework is constructed, and the conditions for the existence of global solutions and blow-up time under subcritical energy levels are provided. Additionally, the conditions for the existence of global solutions at the critical energy level are discussed.

Keywords

Nonlinear Variable Coefficient Wave Equation, Stress Term, Global Existence for Solutions, Blow-Up

1. 引言

非线性波动方程在描述介质中波动传播和能量传递等现象时，起到了重要的作用。在这些方程中，非线性项通常反映了介质的非线性响应，而应力项则可以描述波动过程中的力学效应。应力项的引入使得问题更加复杂，增加了方程解的非线性特征，进而影响了其解的整体性和爆破现象。

2000 年 Chen 和 Yang [1]研究了四阶非线性波动方程

$$w_{tt}+w_{xxxx}=\sigma(w_x)_x+f(x,t)$$

解的整体存在性以及在 $\sigma(s)\ge\alpha s^p$ 条件下解的爆破。随后，Yang [2]将其推广到了高维情形，得到了全局弱解。同时研究了空间维数为 1 时，弱解被正则化为唯一的广义解。

2005 年 Jorge A Esquivel-Avila [3]研究了具应力项的非线性波动方程，得到了解的爆破以及整体存在性。2007 年 Liu 和 Xu [4]研究了四阶非线性波动方程在不同能级下整体解存在性以及解的爆破。

2013 年 Wang [5]等两人研究了波动方程

$$w_{tt}+\Delta^2 w+w_t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\theta_i\left(w_{x_i}\right)\right)-\alpha\Delta w=f(w)$$

在 $\alpha\ge 0$ 情况下不同能级整体解存在以及解的爆破，同时研究了其能量衰减。

2020 年 Lin Qiang [6]等研究了具有应变项和源项的非线性波动方程

$$w_{tt}+\Delta^2 w-\beta\Delta w+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i\left(w_{x_i}\right)=f(w)$$

在临界能级和超临界能级下解的全局存在性。

2021 年 Jiangbo Han 和 Runzhang Xu [7]研究了四阶非线性阻尼波动方程

$$w_{tt}+\Delta^2 w+\lambda w_t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i\left(w_{x_i}\right)=0$$

在次临界能级下解的渐进行为以及任意能级在不同条件下解的爆破。

除了上述提到的几类波动方程外，带有应力项和非线性源项 − 阻尼项的变系数波动方程，目前研究结果还比较少[8]。而对于带有应力项的波动方程也不断引起学者们的注意，参见[9]-[13]。

本文研究一类具广义源和非线性应力项的变系数波动方程的初边值问题

$$w_{tt}+\Delta^2 w-\Delta w-\Delta w_t+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_i\left(w_{x_i}\right)+a(x)\left|w_t\right|^{\gamma-1}w_t=|w|^{m-1}w, \tag{1.1}$$

$$w(x,0)=w_0(x),\quad w_t(x,0)=w_1(x),\quad x\in\Omega, \tag{1.2}$$

$$w=\frac{\partial w}{\partial n}=0\text{ 或 }w=\Delta w=0,\quad x\in\partial\Omega,\quad t\geq 0, \tag{1.3}$$

其中 $\Omega\in\mathbb{R}^n$，Ω 是一光滑有界区域，$a(x)\in\mathbb{C}(\Omega)$ 且满足 $0\leq a(x)\leq\mathbb{A}_0$，$\phi_i(\upsilon)$ 满足假设(H)。

(H) (i) $\phi_i(\upsilon)\in C^1$，$\phi_i(0)=\phi_i'(0)=0$，其中 $i=1,2,\cdots,n$；

(ii) 当 $-\infty<\upsilon<+\infty$，此时 $\phi_i(\upsilon)$ 单调；当 $\upsilon>0$ 时 $\phi_i(\upsilon)$ 是凸函数；$\upsilon<0$ 时 $\phi_i(\upsilon)$ 是凹函数，$1\leq i\leq n$；

(iii) $\phi_i(\upsilon)\leq\varepsilon|\upsilon|^{\kappa}$，$(l+1)\psi_i(\upsilon)\leq\upsilon\phi_i(\upsilon)$，$\varepsilon>0$，$1<l,\kappa<\infty$，$n=1,2$；$1<l,\kappa<\frac{n+2}{n-2}$，$n\geq 3$。其中

$$\psi_i(\upsilon)=\int_0^{\upsilon}\phi_i(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad 1\leq i\leq n. \tag{1.4}$$

2. 符号定义以及位势井框架建立

2.1. 符号定义

本文引入符号定义

$$\|w\|=\|w\|_{L^2(\Omega)},\quad (w,v)=\int_\Omega wv\mathrm{d}x,\quad q=\min\{l,\kappa\}$$

2.2. 位势井框架建立

引理 2.1 [4] 对于 $\forall w\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$\|\Delta w\|$ 等价于 $\|w\|_{2,2}$。

令 $\mathbb{H}=\left\{w\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\,|\,\frac{\partial w}{\partial n}=0\text{ 或 }\Delta w=0,\partial\Omega\right\}$，且

$$\|w\|_{\mathbb{H}}^2=\|\Delta w\|^2+\|\nabla w\|^2. \tag{2.1}$$

推论 2.2 [4] 对于 $w\in\mathbb{H}$，$\|w\|_{\mathbb{H}}$ 等价于 $\|w\|_{2,2}$。

推论 2.3 [4] 令 κ 满足条件(H)，则有 $\mathbb{H}$ 嵌入 $W^{1,\kappa+1}$ 是紧的，且有 $\|w\|_{\kappa+1}\leq\mathcal{C}\|w\|_{\mathbb{H}}$。

下面引入位势井族：将两边同乘以 w_t 并对 x 进行积分，则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|w_t\|^2+\|w\|_{\mathbb{H}}^2\right]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\psi_i\left(w_{x_i}\right)\mathrm{d}x+\|\nabla w_t\|^2+\int_\Omega a(x)|w_t|^{\gamma+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{m+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{m+1}^{m+1} \tag{2.2}$$

引入下列泛函

$$\mathtt{J}(w)=\frac{1}{2}\|\Delta w\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla w\|^2-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\psi_i\left(w_{x_i}\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{m+1}\|w\|_{m+1}^{m+1},$$

$$\mathtt{I}(w)=\|\Delta w\|^2+\|\nabla w\|^2-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\phi_i\left(w_{x_i}\right)w_{x_i}\mathrm{d}x-\|w\|_{m+1}^{m+1},$$

$$\mathbb{E}(t)=\frac{1}{2}\left[\|w_t\|^2+\|w\|_{\mathbb{H}}^2\right]-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\psi_i\left(w_{x_i}\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{m+1}\|w\|_{m+1}^{m+1}.$$

引入下列位势井以及位势井深度

$$\mathbb{W}=\left\{w\in\mathbb{H}\,|\,\mathtt{I}(w)>0,\mathtt{J}(w)<\mathsf{d}\right\}\cup\{0\},$$

$$\mathbb{V}=\left\{w\in\mathbb{H}\mid \mathtt{I}(w)<0,\mathtt{J}(w)<\mathsf{d}\right\}.$$

$$\mathsf{d}=\inf_{u\in\mathcal{N}}\mathtt{J}(w),$$

其中 $\mathcal{N}=\left\{w\in\mathbb{H}\mid \mathtt{I}(w)=0,\,w\neq 0\right\}$。

推论 2.4 [5] 假设条件(H)成立，则有

(i) $\psi_i(\upsilon)\geq\mathbb{A}|\upsilon|^{l+1}$，$|\upsilon|\geq 1$，$\mathbb{A}>0$，$1\leq i\leq n$；

(ii) $\upsilon\left(\upsilon\phi_i'(\upsilon)-\phi_i(\upsilon)\right)\geq 0$，$1\leq i\leq n$，当且仅当 $\upsilon=0$ 时“=”成立。

推论 2.5 [5] 假设条件(H)成立，则有 $\upsilon\phi_i(\upsilon)\geq(l+1)\mathbb{A}|\upsilon|^{l+1}$ 成立。

引理 2.6 假设 $\phi_i(\upsilon)$ 满足条件(H)

$$\varphi(\mu)=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\phi_i\left(\mu w_{x_i}\right)w_{x_i}\mathrm{d}x,\ 1\leq i\leq n, \tag{2.3}$$

则对于 $\forall w\in\mathbb{H}$，$\|w\|_{\mathbb{H}}^2\neq 0$ 有

(i) $\varphi(\mu)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

(ii) $\lim\limits_{\mu\to 0}\varphi(\mu)=0$，$\lim\limits_{\mu\to+\infty}\varphi(\mu)=+\infty$。

证明 (*i*)由推论 2.4 可知

$$\varphi'(\mu)=\frac{1}{\mu^3}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left[\phi_i'\left(\mu w_{x_i}\right)\mu w_{x_i}-\phi_i\left(\mu w_{x_i}\right)\right]\mu w_{x_i}\mathrm{d}x>0,$$

所以 $\varphi(\mu)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增。

(*ii*)由假设(H)条件可知

$$\varphi(\mu)\leq\frac{\varepsilon}{\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\mu w_{x_i}\right|^{\kappa+1}\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{\mu^2}\mu^{\kappa+1}\sum_{i=1}^{n}\left\|w_{x_i}\right\|_{\kappa+1}^{\kappa+1},$$

此时 $\lim\limits_{\mu\to 0}\varphi(\mu)=0$。

由推论 2.4

$$\varphi(\mu)=\frac{1}{\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\phi_i\left(\mu w_{x_i}\right)\mu w_{x_i}\mathrm{d}x\geq\frac{l+1}{\mu^2}\mathbb{A}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\mu w_{x_i}\right|^{l+1}\mathrm{d}x,$$

引入 $\Omega_\mu=\left\{x\mid x\in\Omega,|w|\geq\frac{1}{\mu}\right\}$，则有

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int_{\Omega_\mu}|w|^{l+1}\mathrm{d}x=\|w\|_{l+1}^{l+1},$$

即有

$$\lim_{\mu\to+\infty}\varphi(\mu)=+\infty.$$

引理 2.7 假设 $\phi_i(\upsilon)$ 满足条件(H)，对于 $\forall w\in\mathbb{H}$，$\|w\|_{\mathbb{H}}^2\neq 0$，有

$$\lim_{\mu\to 0}\mathrm{J}(\mu w)=0,\ \lim_{\mu\to+\infty}\mathrm{J}(\mu w)=-\infty.$$

证明 ① 由假设(H)可知

$$0\leq\psi_i(\upsilon)\leq\frac{1}{l+1}\upsilon\phi_i(\upsilon)\leq\frac{1}{l+1}\mathbb{A}|\upsilon|^{\kappa+1},\ 1\leq i\leq n,$$

$$0 \le \int_\Omega \psi_i\left(\mu w_{x_i}\right)\mathrm{d}x \le \frac{1}{l+1}\mathbb{A}\mu^{\kappa+1}\int_\Omega \left|w_{x_i}\right|^{\kappa+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{l+1}\mathbb{A}\mu^{\kappa+1}\left\|w_{x_i}\right\|_{\kappa+1}^{\kappa+1},$$

$$\mathtt{J}\left(\mu w\right) = \frac{\mu^2}{2}\|w\|_{\mathbb{H}}^2 - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \psi_i\left(\mu w_{x_i}\right)\mathrm{d}x - \frac{\mu^{m+1}}{m+1}\|w\|_{m+1}^{m+1},$$

所以 $\lim\limits_{\mu\to 0}\mathtt{J}\left(\mu w\right)=0$。

② 由推论 2.4 可得

$$\int_\Omega \psi_i\left(\mu w_{x_i}\right)\mathrm{d}x \ge \mathbb{A}\mu^{l+1}\int_{\Omega_\theta}\left|w_{x_i}\right|^{l+1}\mathrm{d}x .$$

由 Ω_μ 定义可知，存在某些 $\mathbb{A}_1>0$ 当 $\theta\to+\infty$ 时有

$$\int_\Omega \psi_i\left(\mu w_{x_i}\right)\mathrm{d}x \ge \mathbb{A}_1\mu^{l+1},$$

此时 $\lim\limits_{\mu\to+\infty}\mathrm{J}\left(\mu w\right)=-\infty$。

引理 2.8 [4] 假设条件(H)成立，则对于 $\forall w\in\mathbb{H}$，$\|w\|_{\mathbb{H}}^2\ne 0$，

(i) 存在唯一的 $\mu^*=\mu^*(u)$，使

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\mathtt{J}\left(\mu w\right)\right|_{\mu=\mu^*}=0,\quad 0<\mu<\infty;$$

(ii) $\mathtt{J}\left(\mu w\right)$ 在 $\left(0,\mu^*\right)$ 内单调递增，在 $\left(\mu^*,+\infty\right)$ 内单调递减且在 μ^* 取得最大值；

(iii) $\mathtt{I}\left(\mu w\right)>0$，当 $0<\mu<\mu^*$；$\mathtt{I}\left(\mu w\right)<0$，当 $\mu^*<\mu<+\infty$。

定义

$$\mathtt{I}_\xi\left(w\right)=\xi\|w\|_{\mathbb{H}}^2-\sum_{i=1}^n\int_\Omega \phi_i\left(w_{x_i}\right)w_{x_i}\mathrm{d}x-\|w\|_{m+1}^{m+1},$$

$$\mathsf{d}\left(\xi\right)=\inf_{u\in\mathcal{N}_\xi}\mathtt{J}\left(w\right),$$

$$\mathcal{N}_\xi=\left\{w\in\mathbb{H}\mid \mathtt{I}_\xi\left(w\right)=0,\|w\|_{\mathbb{H}}\ne 0\right\}.$$

引理 2.9 令条件(H)成立，若 $0<\|w\|_{\mathbb{H}}<h\left(\xi\right)$，则 $\mathtt{I}_\xi\left(w\right)>0$。特别地，若 $0<\|w\|_{\mathbb{H}}<h\left(1\right)$，则 $\mathtt{I}\left(w\right)>0$。其中 $h\left(\xi\right)$ 是方程 $\eta\left(h\right)=\xi$ 的唯一实根，

$$\eta\left(h\right)=\mathcal{C}_1^{m+1}h^{m-1}+\varepsilon\mathcal{C}_2^{\kappa+1}h^{\kappa-1},$$

其中，

$$\mathcal{C}_1=\sup_{u\in\mathbb{H}}\frac{\|w\|_{m+1}}{\|w\|_{\mathbb{H}}},\quad \mathcal{C}_2=\sup_{u\in\mathbb{H}}\frac{\left[\sum_{i=1}^n\left\|w_{x_i}\right\|_{\kappa+1}^{\kappa+1}\right]^{\frac{1}{\kappa+1}}}{\|w\|_{\mathbb{H}}}.$$

引理 2.10 令条件(H)成立，假设 $\mathtt{I}_\xi\left(w\right)<0$，则 $\|w\|_{\mathbb{H}}>h\left(\xi\right)$。特别地，若 $\mathtt{I}\left(w\right)<0$，则 $\|w\|_{\mathbb{H}}>h\left(1\right)$。

证明 由 $\mathtt{I}_\xi\left(w\right)<0$，$\|w\|_{\mathbb{H}}\ne 0$，

$$\xi\|w\|_{\mathbb{H}}^2<\sum_{i=1}^n\int_\Omega\phi_i\left(w_{x_i}\right)w_{x_i}\mathrm{d}x+\|w\|_{m+1}^{m+1}<\eta\left(\|w\|_{\mathbb{H}}\right)\|w\|_{\mathbb{H}}^2 .$$

由上式可知 $\eta\left(\|w\|_{\mathbb{H}}\right)>\xi$，以及 $\|w\|_{\mathbb{H}}>h\left(\xi\right)$。

引理 2.11 令条件(H)成立，假设 $\mathtt{I}_\xi\left(w\right)=0$，则 $\|w\|_{\mathbb{H}}\ge h\left(\xi\right)$ 或 $\|w\|_{\mathbb{H}}\ne 0$。特别地，若 $\mathtt{I}\left(w\right)=0$，则

$\|w\|_{\mathbb{H}} \geq h(1)$ 或 $\|w\|_{\mathbb{H}} = 0$。

证明 若 $\mathrm{I}_{\xi}(w)=0$，则

$$\xi\|w\|_{\mathbb{H}}^{2}=\xi\left[\|\Delta w\|^{2}+\|\nabla w\|^{2}\right]=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\phi_{i}\left(w_{x_{i}}\right)w_{x_{i}}\mathrm{d}x+\|w\|_{m+1}^{m+1}\leq\eta\left(\|w\|_{\mathbb{H}}\right)\|w\|_{\mathbb{H}}^{2},$$

可得 $\|w\|_{\mathbb{H}} \neq 0$，$\eta\left(\|w\|_{\mathbb{H}}\right) \geq \xi$，$\|w\|_{\mathbb{H}} \geq h(\xi)$。

引理 2.12 令条件(H)成立，则

(i) $\mathrm{d}(\xi) \geq \alpha(\xi) h^{2}(\xi)$，其中 $\alpha(\xi)=\frac{1}{2}-\frac{\xi}{q+1}$，$0<\xi<\frac{q+1}{2}$；

(ii) $\lim\limits_{\xi \to 0} \mathrm{d}(\xi)=0$，存在一个 $\xi_{0} \geq \frac{q+1}{2}$，使得 $\mathrm{d}(\xi_{0})=0$，且对于 $0<\xi<\xi_{0}$，$\mathrm{d}(\xi)>0$；

(iii) $0<\xi \leq 1$，$\mathrm{d}(\xi)$ 为严格增函数，$1 \leq \xi<\xi_{0}$，$\mathrm{d}(\xi)$ 为严格减函数，$\xi=1$ 取最大值 $\mathrm{d}(1)=\mathrm{d}$。

证明 (i) 由 $\mathrm{I}_{\xi}(w)=0$，且 $\|w\|_{\mathbb{H}} \neq 0$，则由引理 2.11，$\|w\|_{\mathbb{H}} \geq h(\xi)$

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(w) &\geq \frac{1}{2}\|w\|_{\mathbb{H}}^{2}-\frac{1}{l+1}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\phi_{i}\left(w_{x_{i}}\right)w_{x_{i}}\mathrm{d}x-\frac{1}{m+1}\|w\|_{m+1}^{m+1}\\&\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{\xi}{q+1}\right)\|w\|_{\mathbb{H}}^{2}+\frac{1}{q+1}\mathrm{I}_{\xi}(w)=\alpha(\xi)\|w\|_{\mathbb{H}}^{2}\geq\alpha(\xi)h^{2}(\xi),\end{aligned}$$

其中 $q=\min\{l,m\}$。

(ii) 对于 $\forall w \in \mathbb{H}$，$\|w\|_{\mathbb{H}} \neq 0$

$$\xi\|\Delta(\mu w)\|^{2}+\xi\|\nabla(\mu w)\|^{2}=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\phi_{i}\left(\mu w_{x_{i}}\right)\mu w_{x_{i}}\mathrm{d}x+\|\mu w\|_{m+1}^{m+1},$$

$$\xi\|w\|_{\mathbb{H}}^{2}=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\phi_{i}\left(\mu w_{x_{i}}\right)w_{x_{i}}\mathrm{d}x+\mu^{m-1}\|w\|_{m+1}^{m+1}. \tag{2.4}$$

定义

$$\Phi(\mu)=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\phi_{i}\left(\mu w_{x_{i}}\right)w_{x_{i}}\mathrm{d}x+\mu^{m-1}\|w\|_{m+1}^{m+1}=\mu^{m-1}\|w\|_{m+1}^{m+1}+\varphi(\mu).$$

由引理 2.6，$\varphi(\mu)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$\mu^{m-1}\|w\|_{m+1}^{m+1}$ 关于 μ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，其中 $m>1$。所以 $\Phi(\mu)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，此时有 $\xi\|w\|_{\mathbb{H}}^{2}=\Phi(\mu)$。由(2.4)定义

$$\mu=\mu(\xi)=\Phi^{-1}\left(\xi\|w\|_{\mathbb{H}}^{2}\right), \tag{2.5}$$

使得 $\mathrm{I}_{\xi}(\mu w)=0$，有 $\lim\limits_{\xi \to 0}\mu(\xi)=0$，$\lim\limits_{\xi \to +\infty}\mu(\xi)=+\infty$，同时由引理 2.7 可得 $\lim\limits_{\mu \to 0} d(\xi)=0$，$\lim\limits_{\mu \to +\infty} d(\xi)=-\infty$。由(i)可知 $\exists \xi_{0} \geq \frac{q+1}{2}$，有 $\mathrm{d}(\xi_{0})=0$，在 $0<\xi<\xi_{0}$ 有 $\mathrm{d}(\xi)>0$。

(iii) 证明 $\mathrm{d}(\xi')<\mathrm{d}(\xi'')$，对于 $\forall 0<\xi'<\xi''<1$ 或 $1<\xi''<\xi'<\xi_{0}$。显然，可以只证对于 $\forall 0<\xi'<\xi''<1$ 或 $1<\xi''<\xi'<\xi_{0}$ 以及 $\forall w \in \mathbb{H}$，$\|w\|_{\mathbb{H}} \neq 0$ 和 $\mathrm{I}_{\xi''}(w)=0$，存在一个 $s \in \mathbb{H}$，$\mathrm{I}_{\xi'}(s)=0$，$\|s\|_{\mathbb{H}} \neq 0$，以及一个常数 $\ell(\xi', \xi'')>0$ 使得 $\mathrm{J}(s)<\mathrm{J}(w)-\ell(\xi', \xi'')$。由(2.4)定义的 $\mu(\xi)$，$\mathrm{I}_{\xi}(\mu(\xi) w)=0$，$\mu(\xi'')=1$ 且(2.4)成立。令 $\mathbb{G}(\mu)=\mathrm{J}(\mu w)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\mathbb{G}(\mu)=\frac{1}{\mu}\left[\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\|\mu w\|_{\mathbb{H}}^{2}+\mathrm{I}_{\xi}(\mu w)\right]=\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\mu\|w\|_{\mathbb{H}}^{2},$$

取 $s=\mu(\xi') w$，$\mathrm{I}_{\xi'}(s)=0$ 且 $\|s\|_{\mathbb{H}} \neq 0$。若 $0<\xi'<\xi''<1$ 则 $\mu(\xi')<\mu(\xi'')=1$，

$$\mathrm{J}(w)-\mathrm{J}(s)>(1-\xi'')h^2(\xi'')\mu(\xi')(1-\mu(\xi'))\equiv\ell(\xi',\xi'').$$

若 $1<\xi''<\xi'<\xi_0$ 则 $\mu(\xi')>\mu(\xi'')=1$，

$$\mathrm{J}(w)-\mathrm{J}(s)>(\xi''-1)h^2(\xi'')\mu(\xi'')(\mu(\xi')-1)\equiv\ell(\xi',\xi'').$$

证毕。

引理 2.13 [4] 令条件(H)成立，$0<\xi<\frac{q+1}{2}$，$\mathrm{I}_\xi(w)>0$，$\mathrm{J}(w)\le \mathrm{d}(\xi)$，则 $0<\|w\|_{\mathbb{H}}^2<\frac{\mathrm{d}(\xi)}{\alpha(\xi)}$。特别地，若 $\mathrm{I}(w)>0$，$\mathrm{J}(w)\le \mathrm{d}$，$0<\|w\|_{\mathbb{H}}^2<\frac{2(q+1)}{q-1}\mathrm{d}$。

引理 2.14 [4] 令条件(H)成立，$0<\xi<\frac{q+1}{2}$，$\mathrm{J}(w)\le \mathrm{d}(\xi)$ 且 $\|u\|_{\mathbb{H}}^2>\frac{\mathrm{d}(\xi)}{\alpha(\xi)}$ 则 $\mathrm{I}_\xi(w)<0$。特别地，若 $\mathrm{J}(w)\le \mathrm{d}$，$\|w\|_{\mathbb{H}}^2>\frac{2(q+1)}{q-1}\mathrm{d}$ 则 $\mathrm{I}(w)<0$。

引理 2.15 令条件(H)成立，$0<\xi<\frac{q+1}{2}$，$\mathrm{I}_\xi(w)=0$，$\|w\|_{\mathbb{H}}\ne 0$ 且 $\mathrm{J}(w)\le \mathrm{d}(\xi)$，则 w 属于由 $\mathrm{J}(w)=\mathrm{d}(\xi)$ 以及 $h^2(\xi)\le\|w\|_{\mathbb{H}}^2\le\frac{\mathrm{d}(\xi)}{\alpha(\xi)}$ 的极值集合。特别地，若 $\mathrm{I}(w)=0$，$\|w\|_{\mathbb{H}}\ne 0$ 且 $\mathrm{J}(w)\le \mathrm{d}$，则 w 属于由 $\mathrm{J}(w)=\mathrm{d}$ 以及 $h^2(1)\le\|w\|_{\mathbb{H}}^2\le\frac{2(q+1)}{q-1}\mathrm{d}$ 的极值集合。

证明 $\mathrm{I}_\xi(w)=0$，$\|w\|_{\mathbb{H}}\ne 0$ 以及 $\mathrm{d}(\xi)$ 定义可知 $\mathrm{J}(w)\ge \mathrm{d}(\xi)$，则有 $\mathrm{J}(w)=\mathrm{d}(\xi)$。

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(w)&\ge\frac{1}{2}\|w\|_{\mathbb{H}}^2-\frac{1}{l+1}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\phi_i(w_{x_i})w_{x_i}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{m+1}\|w\|_{m+1}^{m+1}\\&\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{\xi}{q+1}\right)\|w\|_{\mathbb{H}}^2+\frac{1}{q+1}\mathrm{I}_\xi(w)\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{\xi}{q+1}\right)h^2(\xi),\end{aligned}$$

因此 $h^2(\xi)\le\|w\|_{\mathbb{H}}^2$，

$$\mathrm{J}(w)\le \mathrm{d}(\xi)\Leftrightarrow\|w\|_{\mathbb{H}}^2\le\frac{\mathrm{d}(\xi)}{\alpha(\xi)},$$

则 $\mathrm{J}(w)=\mathrm{d}(\xi)$。

若 $\mathrm{I}(w)=0$，$\|w\|_{\mathbb{H}}\ne 0$，则有 $h^2(1)\le\|w\|_{\mathbb{H}}^2$，$\|w\|_{\mathbb{H}}^2\le\frac{\mathrm{d}(1)}{\alpha(1)}=\frac{2(q+1)}{q-1}\mathrm{d}$。证毕。

对于 $0<\xi<\xi_0$，定义下列空间：

$$\mathbb{W}_\xi=\{w\in\mathbb{H}\mid\mathrm{I}_\xi(w)>0,\mathrm{J}(w)<\mathrm{d}(\xi)\}\cup\{0\};$$

$$\mathbb{V}_\xi=\{w\in\mathbb{H}\mid\mathrm{I}_\xi(w)<0,\mathrm{J}(w)<\mathrm{d}(\xi)\};$$

$$\mathbb{B}_\xi=\{w\in\mathbb{H}\mid\|w\|_{\mathbb{H}}<h(\xi)\};$$

$$\overline{\mathbb{B}_\xi}=\mathbb{B}_\xi\cup\partial\mathbb{B}_\xi=\{w\in\mathbb{H}\mid\|w\|_{\mathbb{H}}\le h(\xi)\};$$

$$\mathbb{B}_\xi^{c}=\{w\in\mathbb{H}\mid\|w\|_{\mathbb{H}}>h(\xi)\}.$$

引理 2.16 [4] 令条件(H)成立，$0<\xi<\frac{q+1}{2}$，则 $\mathbb{B}_{r_1(\xi)}\subset\mathbb{W}_\xi\subset\mathbb{B}_{r_2(\xi)}$，$\mathbb{V}_\xi\subset\mathbb{B}_\xi^{c}$。

其中，

$$\mathbb{B}_{r_1(\xi)} = \left\{ w \in \mathbb{H} \mid \|w\|_{\mathbb{H}}^2 < \min\left\{ h^2(\xi), 2\mathsf{d}(\xi) \right\} \right\},$$

$$\mathbb{B}_{r_2(\xi)} = \left\{ w \in \mathbb{H} \mid \|w\|_{\mathbb{H}}^2 < \frac{\mathsf{d}(\xi)}{\alpha(\xi)} \right\}.$$

由上述引理可得

引理 2.17 令条件(H)成立，

(i) 若 $0 < \xi' < \xi'' < 1$，则 $\mathbb{W}_{\xi'} \subset \mathbb{W}_{\xi''}$；

(ii) 若 $1 < \xi'' < \xi' < \xi_0$，$\mathbb{V}_{\xi'} \subset \mathbb{V}_{\xi''}$。

引理 2.18 令条件(H)成立，若 $0 < \mathsf{J}(w) < \mathsf{d}$，对于某些 $w \in \mathbb{H}$，(ξ_1, ξ_2) 是一个使得 $\mathsf{J}(w) < \mathsf{d}(\xi)$ 对于 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 成立的最大区间。则对于 $\xi_1 < \xi < \xi_2$，$\mathsf{I}_\xi(w)$ 的符号不会改变。

证明 假设 $\mathsf{I}_\xi(w)$ 的符号会改变，则 $\exists \xi_c \in (\xi_1, \xi_2)$ 使 $\mathsf{I}_{\xi_c}(w) = 0$。则 $\mathsf{J}(w) \geq \mathsf{d}(\xi_c)$ 与 $\mathsf{J}(w) < \mathsf{d}(\xi_c)$ 矛盾，所以假设不成立。证毕。

定义

$$\mathbb{E}(0) = \frac{1}{2}\left[\|w_t\|^2 + \|w\|_{\mathbb{H}}^2 \right] - \int_\Omega \sum_{i=1}^n \psi_i(w_{x_i}) \mathrm{d}x - \frac{1}{m+1}\|w\|_{m+1}^{m+1}$$
$$+ \int_0^t \|\nabla w_\tau\|^2 \mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_\Omega a(x) |w_\tau|^{\gamma+1} \mathrm{d}x \mathrm{d}\tau,$$

则有

$$\mathbb{E}(0) \geq \mathbb{E}(t). \tag{2.6}$$

定理 2.1 [5] 令条件(H)成立，$w_0 \in \mathbb{H}$ $w_1 \in L^2(\Omega)$。若 $0 < \beta < \mathsf{d}$，(ξ_1, ξ_2) 是使 $\mathsf{d}(\xi) > \beta$ 成立的最大区间，其中 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$。

(i) 问题(1.1)~(1.3)所有满足 $\mathbb{E}(0) = \beta$ 的解都属于 $\mathbb{W}_\xi$，$\xi_1 < \xi < \xi_2$，只要 $\mathsf{I}(w_0) > 0$，$\|w_0\|_{\mathbb{H}} = 0$；

(ii) 问题(1.1)~(1.3)所有满足 $\mathbb{E}(0) = \beta$ 的解都属于 $\mathbb{V}_\xi$，$\xi_1 < \xi < \xi_2$，只要 $\mathsf{I}(w_0) < 0$。

定理 2.2 由定理 2.1 假设 $\mathbb{E}(0) = \beta$ 被 $0 \leq \mathbb{E}(0) \leq \beta$ 替换，则定理 2.2 中结论仍然成立。

定理 2.3 令条件(H)成立，$w_0 \in \mathbb{H}$ $w_1 \in L^2(\Omega)$，则问题(1.1)~(1.3)所有满足 $\mathbb{E}(0) = 0$ 的非平凡解都属于 $\mathbb{B}_{r_0}^c = \left\{ w \in \mathbb{H} \mid \|u\|_{\mathbb{H}} \geq h_0 \right\}$。其中 h_0 是方程 $\eta_1(h) = \frac{1}{2}$ 的唯一实根，

$$\eta_1(h) = \frac{\mathcal{C}_1^{m+1}}{m+1} h^{m-1} + \frac{\varepsilon \mathcal{C}_2^{\kappa+1}}{l+1} h^{\kappa-1}.$$

3. 次临界能级 $\mathbb{E}(0) < \mathsf{d}$ 下整体解的存在性与非存在性

本章讨论问题(1.1)~(1.3)的解在稳定集合 $\mathbb{W}$ 下整体弱解存在性以及在不稳定集合有限时间内爆破，并对定理进行证明。

定理 3.1 [9] 令条件(H)成立，$w_0 \in \mathbb{H}$，$w_1 \in L^2(\Omega)$。若 $\mathbb{E}(0) < \mathsf{d}$ 且 $\mathsf{I}((w_0) > 0$ 或者 $\|w_0\|_{\mathbb{H}} = 0$。则问题(1.1)~(1.3)存在一个整体弱解 $w(t) \in L^\infty(0, \infty; \mathbb{H})$，$w_t(t) \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$ 且 $w(t) \in \mathbb{W}$，$0 < t < \infty$。

证明 令 $\{\zeta_j(x)\}$ 为空间 $\mathbb{H}$ 中的一个基础函数系，构造问题(1.1)~(1.3)的近似解为

$$w_\omega(x,t) = \sum_{j=1}^{\omega} p_{j\omega}(t) \zeta_j(x), \quad \delta = 1, 2, \cdots,$$

与基础函数系做内积且满足(1.1)式

$$\begin{aligned}&\left(w_{\omega tt}+\Delta^2 w_\omega-\Delta w_\omega+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_i\left(w_{\omega x_i}\right)-\Delta w_{\omega t}+a(x)\left|w_{\omega t}\right|^{\gamma-1}w_{\omega t},\zeta_j(x)\right)\\&=\left(\left|w_\omega\right|^{m-1}w_\omega,\zeta_j(x)\right),\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$w_\omega(x,0)=\sum_{j=1}^{\omega}p_{j\omega}(0)\zeta_j(x)\to w_0(x)\in\mathbb{H},\tag{3.2}$$

$$w_{\omega t}(x,0)=\sum_{j=1}^{\omega}p'_{j\omega}(0)\zeta_j(x)\to w_1(x)\in L^2(\Omega).\tag{3.3}$$

将(3.1)两端同乘以 $p'_{j\omega}(t)$ 并对 j 求和，即可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left\|w_{\omega t}\right\|^2+\left\|\Delta w_\omega\right\|^2+\left\|\nabla w_\omega\right\|^2\right]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\psi_i\left(w_{\omega x_i}\right)\mathrm{d}x\\&+\left\|\nabla w_{\omega t}\right\|^2+\int_\Omega a(x)\left|w_{\omega t}\right|^{\gamma+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{m+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|w_\omega\right\|_{m+1}^{m+1}.\end{aligned}$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}_\omega(t)=-\left\|\nabla w_{\omega t}\right\|^2-\int_\Omega a(x)\left|w_{\omega t}\right|^{\gamma+1}\mathrm{d}x,$$

$$\mathbb{E}_\omega(t)=\frac{1}{2}\left\|w_{\omega t}\right\|^2+\mathtt{J}\left(w_\omega\right).$$

由 $\mathbb{E}(0)<\mathsf{d}$，$\mathtt{I}\left(w_0\right)>0$ 或 $\left\|w_0\right\|_{\mathbb{H}}=0$ 可知，$w_0\in\mathbb{W}$。结合(3.2) (3.3)可知，

$$\mathbb{E}_\omega(0)=\mathbb{E}_\omega(t)+\int_0^t\left\|\nabla w_{\omega\tau}\right\|^2\mathrm{d}\tau+\int_0^t\int_\Omega a(x)\left|w_{\omega t}\right|^{\gamma+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,$$

$$\lim_{\omega\to0}\mathbb{E}_\omega(0)=\mathbb{E}(0).$$

对充分大的 ω 有 $\mathbb{E}_\omega(0)<\mathsf{d}$。则有估计

$$\mathtt{J}\left(w_\omega\right)\geq\frac{q-1}{2(q+1)}\left\|w_\omega\right\|_{\mathbb{H}}^2+\frac{1}{q+1}\mathtt{I}\left(w_\omega\right),$$

结合 $\mathbb{E}_\omega(0)$ 和上式可得

$$\frac{1}{2}\left\|w_{\omega t}\right\|^2+\frac{q-1}{2(q+1)}\left\|w_\omega\right\|_{\mathbb{H}}^2+\frac{1}{q+1}\mathtt{I}\left(w_\omega\right)<\mathsf{d},$$

由(3.2) (3.3)可知 $w_\omega(x,0)\in\mathbb{W}$ 对充分大的 ω。由定理 2.3 可知对充分大的 ω 有 $w_\omega(x,t)\in\mathbb{W}$，$0<t<\infty$。

$$\frac{1}{2}\left\|w_{\omega t}\right\|^2+\frac{q-1}{2(q+1)}\left\|w_\omega\right\|_{\mathbb{H}}^2<\mathsf{d},$$

由上式可得

$$\left\|w_{\omega t}\right\|^2<2\mathsf{d};\tag{3.4}$$

$$\left\|w_\omega\right\|_{\mathbb{H}}^2<\frac{2(q+1)}{q-1}\mathsf{d};\tag{3.5}$$

$$\left\|w_{\omega x_i}\right\|_{\kappa+1}^2 \le \mathcal{C}_2^2 \left\|w_\omega\right\|_{\mathbb{H}}^2 \le \mathcal{C}_2^2 \frac{2(q+1)}{q-1}\mathsf{d}; \tag{3.6}$$

$$\left\|w_\omega\right\|_{m+1}^2 \le \mathcal{C}_1^2 \left\|w_\omega\right\|_{\mathbb{H}}^2 \le \mathcal{C}_1^2 \frac{2(q+1)}{q-1}\mathsf{d}; \tag{3.7}$$

$$\left\|\left|w_\omega\right|^{m-1} w_\omega\right\|_{r_1}^{r_1} = \left\|w_\omega\right\|_{m+1}^{m+1} \le \mathcal{C}_1^{m+1}\left(\frac{2(q+1)}{q-1}\mathsf{d}\right)^{\frac{m+1}{2}}, \quad r_1 = \frac{m+1}{m}; \tag{3.8}$$

$$\left\|\phi_i\left(w_{\omega x_i}\right)\right\|_{r_2}^{r_2} \le \int_\Omega \left|\varepsilon\left|w_{\omega x_i}\right|^\kappa\right|^{r_2}\mathrm{d}x = \varepsilon^{r_2}\left\|w_{\omega x_i}\right\|_{\kappa+1}^{\kappa+1} \le \varepsilon^{r_2}\mathcal{C}_2^{\kappa+1}\left(\frac{2(q+1)}{q-1}\mathsf{d}\right)^{\frac{\kappa+1}{2}}, \quad r_2 = \frac{\kappa+1}{\kappa}; \tag{3.9}$$

由(3.4)~(3.9)可知，存在 w，以及序列 $\{w_\omega\}$ 中的一个子序列 $\{w_\chi\}$，使得当 $\chi\to\infty$ 时有

1) $w_\chi \to w$ 在 $L^\infty(0,\infty;\mathbb{H})$ 内弱*收敛且几乎处处在 $Q=\Omega\times[0,\infty)$；
2) $w_\chi \to w$ 在 $L^{m+1}(\Omega)$ 强收敛；
3) $w_{\chi x_i} \to w_{x_i}$ 在 $L^\infty\left(0,\infty;L^{\kappa+1}\right)$ 内弱*收敛且几乎处处在 $Q=\Omega\times[0,\infty)$；
4) $w_\chi \to w$ 在 $L^{\kappa+1}(\Omega)$ 强收敛；
5) $w_{\chi t} \to w_t$ 在 $L^\infty\left(0,\infty;L^2(\Omega)\right)$ 内弱*收敛；
6) $\left|w_\chi\right|^{m-1} w_\chi \to |w|^{m-1} w$ 在 $L^\infty\left(0,\infty;L^{r_1}(\Omega)\right)$ 内弱*收敛；
7) $\phi_i\left(w_{\chi x_i}\right) \to \phi_i\left(w_{x_i}\right)$ 在 $L^\infty\left(0,\infty;L^{r_2}(\Omega)\right)$ 内弱*收敛。

(3.1) 对 t 积分并令 $\omega=\chi\to\infty$，则

$$\begin{aligned}
&\left(w_t,\zeta_j(x)\right)+\int_0^t\left(\Delta^2 w,\zeta_j\right)\mathrm{d}\tau-\int_0^t\left(\Delta w,\zeta_j\right)\mathrm{d}\tau+\int_0^t\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_i\left(w_{x_i}\right),\zeta_j\right)\mathrm{d}\tau\\
&+\left(\nabla w,\nabla\zeta_j\right)+\int_0^t\left(a(x)\left|w_\tau\right|^{\gamma-1} w_\tau,\zeta_j\right)\mathrm{d}\tau\\
&=\int_0^t\left(|w|^{m-1} w,\zeta_j\right)\mathrm{d}\tau+\left(w_1,\zeta_j(x)\right)+\left(\nabla w_0,\nabla\zeta_j\right).
\end{aligned}$$

以及 $w_0(x)\in\mathbb{H}$。下证 $w(x,t)$ 满足 $\mathbb{E}(t)\le\mathbb{E}(0)$。对 $\forall t>0$，$\chi\to\infty$ 有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m+1}\left|\int_\Omega\left|w_\chi\right|^{m+1}\mathrm{d}x-\int_\Omega|w|^{m+1}\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_\Omega\left|w+\lambda_1 w_\chi\right|^m\left|w_\chi-w\right|\mathrm{d}x\right|\\
&\le\left\|w+\lambda_1 w_\chi\right\|_{m+1}^m\left\|w_\chi-w\right\|_{m+1}\\
&\le\mathcal{C}_3\left\|w_\chi-w\right\|_{m+1}\to 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega\sum_{i=1}^n\psi_i\left(w_{\chi x_i}\right)\mathrm{d}x-\int_\Omega\sum_{i=1}^n\psi_i\left(w_{x_i}\right)\mathrm{d}x\right| &\le \sum_{i=1}^n\left\|\phi_i\left(w_{x_i}+\lambda_2 w_{\chi x_i}\right)\right\|_{r_2}^{r_2}\left\|w_{\chi x_i}-w_{x_i}\right\|_{\kappa+1}\\
&\le\mathcal{C}_4\sum_{i=1}^n\left\|w_{\chi x_i}-w_{x_i}\right\|_{\kappa+1}\to 0.
\end{aligned}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$，$\mathcal{C}_3$，$\mathcal{C}_4$ 是两个独立的常数。因此有

$$\lim_{\chi\to\infty}\int_\Omega\left|w_\chi\right|^{m+1}\mathrm{d}x=\int_\Omega|w|^{m+1}\mathrm{d}x=\|w\|_{m+1}^{m+1},$$

$$\lim_{\chi\to\infty}\int_\Omega\sum_{i=1}^n\psi_i\left(w_{\chi x_i}\right)\mathrm{d}x=\int_\Omega\sum_{i=1}^n\psi_i\left(w_{x_i}\right)\mathrm{d}x,$$

综上可知，$\mathbb{E}_\chi(0)\to\mathbb{E}(0)$，$\chi\to\infty$。代入 $\mathbb{E}_\chi(t)$ 得

$$\frac{1}{2}\|w_t\|^2+\frac{1}{2}\|w\|_{\mathbb{H}}^2\le\liminf_{\chi\to\infty}\left[\mathbb{E}_\chi(0)+\int_\Omega\sum_{i=1}^n\psi_i\left(w_{\chi x_i}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{m+1}\|w_\chi\|_{m+1}^{m+1}\right]$$
$$=\mathbb{E}(0)+\int_\Omega\sum_{i=1}^n\psi_i\left(w_{x_i}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{m+1}\|w\|_{m+1}^{m+1},$$

即 $\mathbb{E}(t)\le\mathbb{E}(0)$。因此 $w(x,t)$ 是问题(1.1)~(1.3)的整体弱解，且有 $w(t)\in\mathbb{W}$，$0<t<\infty$。

定理 3.2 令条件(H)成立，$w_0\in\mathbb{H}$，$w_1\in L^2(\Omega)$，$1<\gamma<m<\kappa$，$m<l$ 且有 $\mathbb{E}(0)<\mathsf{d}$，$w_0\in\mathbb{V}$，则问题(1.1)~(1.3)的解在有限时间内爆破。

证明 令 $u(t)$ 是问题(1.1)~(1.3)满足 $\mathbb{E}(0)<\mathsf{d}$，$\mathtt{I}(w_0)<0$ 的解，其中 $\mathcal{T}$ 是 $w(t)$ 的最大存在时间。下证 $\mathcal{T}<\infty$。假设 $\mathcal{T}=+\infty$，则对 $\forall t>0$，定义

$$Ж(t)=\|w\|^2,\ \mathbb{K}(t)=\|w\|_{m+1}^{m+1}+\varepsilon\sum_{i=1}^n\|w_{x_i}\|_{\kappa+1}^{\kappa+1},\tag{3.10}$$

则有

$$Ж'(t)=2(w,w_t).$$
$$Ж''(t)=2\|w_t\|^2+2(w,w_{tt}).$$

同时有

$$\begin{aligned}Ж''(t)&=2\|w_t\|^2+2(w,w_{tt})\\&=2\|w_t\|^2+2\|w\|_{m+1}^{m+1}-2\|\Delta w\|^2-2\|\nabla w\|^2+2\sum_{i=1}^n\int_\Omega\phi_i\left(w_{x_i}\right)w_{x_i}\mathrm{d}x\\&\quad+2(\Delta w_t,w)-2\left(a(x)|w_t|^{\gamma-1}w_t,w\right).\end{aligned}\tag{3.11}$$

由定理 2.1，条件(H)可得 $w\in\mathbb{V}$，$\mathtt{I}(w)<0$。估计(3.11)

$$\|w\|_{\mathbb{H}}^2<\sum_{i=1}^n\int_\Omega\phi_i\left(w_{x_i}\right)w_{x_i}\mathrm{d}x+\|w\|_{m+1}^{m+1}<\|w\|_{m+1}^{m+1}+\varepsilon\sum_{i=1}^n\|w_{x_i}\|_{\kappa+1}^{\kappa+1}=\mathbb{K}(t).\tag{3.12}$$

空间 $\mathbb{H}$ 嵌入 $L^2(\Omega)$，所以有 $\|w\|^2\le\mathcal{C}_5\|w\|_{\mathbb{H}}^2$，$\mathcal{C}_5$ 为一正常数。再由 Young 不等式，可以得到

$$\begin{aligned}\left(a(x)|w_t|^{\gamma-1}w_t,w\right)&\le\frac{\gamma\mathbb{A}_0}{\gamma+1}\left[\int_\Omega\left[|w_t|^\gamma\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\mathrm{d}x\right]+\frac{\mathbb{A}_0}{\gamma+1}\left[\int_\Omega|w|^{\gamma+1}\mathrm{d}x\right]\\&\le\frac{\gamma\mathbb{A}_0}{\gamma+1}\|w_t\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}+\frac{\mathcal{C}_6\mathbb{A}_0}{\gamma+1}\|w\|_{m+1}^{m+1},\end{aligned}\tag{3.13}$$

其中，$\mathcal{C}_6$ 表示 $L^{m+1}(\Omega)$ 嵌入 $L^{\gamma+1}(\Omega)$ 的一个正常数。结合(3.12) (3.13)并应用 Young 不等式得到

$$\begin{aligned}Ж''(t)&\ge-2\varpi\mathbb{E}(0)+(\varpi+2)\|w_t\|^2+(\varpi-3)\|w\|_{\mathbb{H}}^2+2\left(1-\frac{\mathcal{C}_6\mathbb{A}_0}{\gamma+1}-\frac{\varpi}{m+1}\right)\mathbb{K}(t)\\&\quad-2\frac{\gamma\mathbb{A}_0}{\gamma+1}\|w_t\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}-\|\nabla w_t\|^2,\end{aligned}\tag{3.14}$$

其中，ϖ 表示一个常数，满足

$$\frac{3(q+1)\mathsf{d}}{(q+1)\mathsf{d}-(q-1)\mathbb{E}(0)}<\varpi<m+1,$$

结合(3.14)有 $\varpi>3$，

$$(\varpi-3)\|w\|_{\mathbb{H}}^2-2\varpi\mathbb{E}(0)>\frac{2(q+1)\mathsf{d}}{q-1}(\varpi-3)-2\varpi\mathbb{E}(0)=\varpi\left(\frac{2(q+1)\mathsf{d}}{q-1}-2\mathbb{E}(0)\right)-\frac{6(q+1)\mathsf{d}}{q-1}>0. \quad (3.15)$$

由(3.14) (3.15)，$\mathtt{I}(w)<0$ 可得

$$\mathcal{K}''(t)+2\frac{\gamma\mathbb{A}_0}{\gamma+1}\|w_t\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}+\|\nabla w_t\|^2\ge 2\mathcal{C}_0\mathbb{K}(t)\ge 2\mathcal{C}_0\|w\|_{\mathbb{H}}^2\ge\frac{4(q+1)\mathsf{d}}{q-1}\mathcal{C}_0, \quad (3.16)$$

其中，$\left(1-\frac{\mathcal{C}_6\mathbb{A}_0}{\gamma+1}-\frac{\varpi}{m+1}\right)=\mathcal{C}_0$。将(3.16)积分可得

$$\mathcal{K}'(t)+\sigma\int_0^t\left[\|\nabla w_\tau\|^2+\|w_\tau\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}\right]\mathrm{d}\tau\ge\frac{4(q+1)\mathsf{d}}{q-1}\mathcal{C}_0 t+\mathcal{K}'(0),$$

其中 $\sigma=\max\left\{2\frac{\gamma\mathbb{A}_0}{\gamma+1},1\right\}$。由上式注意到

$$\int_0^t\left[\|\nabla w_\tau\|^2+\int_\Omega a(x)|w_\tau|^{\gamma+1}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\tau=\mathbb{E}(0)-\mathbb{E}(t)<A,$$

$$\mathcal{K}'(t)\ge\frac{4(q+1)\mathsf{d}}{q-1}\mathcal{C}_0 t+\mathcal{K}'(0)-\sigma A.$$

对上式中 t 积分可得

$$\mathcal{K}(t)\ge\frac{2(q+1)\mathsf{d}}{q-1}\mathcal{C}_0 t^2+(\mathcal{K}'(0)-\sigma A)t+\mathcal{K}(0), \quad (3.17)$$

对于 $t\to\infty$，$\mathcal{K}(t)$ 是一个二次增长函数。

另一方面，我们对于 $\|w\|^2$ 做如下估计：

$$\begin{aligned}\int_\Omega|w|^2\mathrm{d}x&=\|w_0\|^2+2\int_\Omega w_0\int_0^t w_\tau\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x+\int_\Omega\left(\int_0^t w_\tau\mathrm{d}\tau\right)^2\mathrm{d}x\\&\le 2\|w_0\|^2+2\int_\Omega\left(\int_0^t w_\tau\mathrm{d}\tau\right)^2\mathrm{d}x\le 2\|w_0\|^2+2t\int_0^t\|w_\tau\|^2\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \quad (3.18)$$

这里有

$$2t\int_0^t\|w_\tau\|^2\mathrm{d}\tau\le 2t\left(\int_0^t\|w_\tau\|^{\gamma+1}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{2}{\gamma+1}}t^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\le 2t^{1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\mathcal{C}_7^2\left(\int_0^t\|w_\tau\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{2}{\gamma+1}},$$

其中，$\mathcal{C}_7$ 表示 $L^{\gamma+1}(\Omega)$ 嵌入 $L^2(\Omega)$ 的一个正常数。结合(3.18)有

$$\mathcal{K}(t)\le 2\|w_0\|^2+2t^{1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\mathcal{C}_7^2A^{\frac{2}{\gamma+1}}, \quad (3.19)$$

其中，$1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}<2$。所以不等式(3.17)与(3.19)矛盾，解存在区间有限。

4. 临界能级 $\mathbb{E}(0)=\mathsf{d}$ 状态下整体解的存在性

由定理 2.1 的讨论，问题(1.1)~(1.3)流之下稳定集合 $\mathbb{W}$ 是不变的。下面给出在 $\mathbb{E}(0)=\mathsf{d}$ 状态下解的整体存在性。

引理 4.1 [13] 令条件(H)成立，$w_0\in\mathbb{H}$，$w_1\in L^2(\Omega)\cap L^{\gamma+1}(\Omega)$。若 $w(x,t)$ 是问题(1.1)~(1.3)的非稳态解，$\mathcal{T}$ 是最大存在时间。则存在一个时间 $t_c\in(0,\mathcal{T})$，使得

$$\int_0^{t_c}\left\|\nabla w_\tau\right\|^2 \mathrm{d}\tau+\int_0^{t_c}\int_\Omega a(x)\left|w_\tau\right|^{\gamma+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau>0. \tag{4.1}$$

定理 4.2 令条件(H)成立，$w_0\in\mathbb{H}$，$w_1\in L^2(\Omega)\cap L^{\gamma+1}(\Omega)$ 且有 $\mathbb{E}(0)=\mathsf{d}$，$w_0\in\mathbb{W}$，则问题(1.1)~(1.3)存在整体解

$$w(t)\in L^\infty(0,\infty;\mathbb{H}),\ \ w_t(t)\in L^\infty\left(0,\infty;L^2(\Omega)\right)\cap L^\infty\left(0,\infty;L^{\gamma+1}(\Omega)\right).$$

证明 由定理 2.1 可知问题(1.1)~(1.3)存在局部解

$$w(t)\in L^\infty(0,\mathcal{T};\mathbb{H}),\ \ w_t(t)\in L^\infty\left(0,\infty;L^2(\Omega)\right)\cap L^\infty\left(0,\infty;L^{\gamma+1}(\Omega)\right),$$

其中 $\mathcal{T}$ 是最大存在时间。

显然，若 $w(x,t)$ 是问题(1.1)~(1.3)的一个稳态解，则有 $\mathcal{T}=+\infty$。

若 $w(x,t)$ 是问题(1.1)~(1.3)的非稳态解，则由引理 4.1 可知 $\exists t_c\in(0,\mathcal{T})$，使得

$$\int_0^{t_c}\left\|\nabla w_\tau\right\|^2 \mathrm{d}\tau+\int_0^{t_c}\int_\Omega a(x)\left|w_\tau\right|^{\gamma+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau>0.$$

结合 $\mathbb{E}(0)=\mathsf{d}$ 有

$$\mathbb{E}(t_c)+\int_0^{t_c}\left\|\nabla w_\tau\right\|^2 \mathrm{d}\tau+\int_0^{t_c}\int_\Omega a(x)\left|w_\tau\right|^{\gamma+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau=\mathbb{E}(0)=\mathsf{d}.$$

可以得到

$$\mathbb{E}(t_c)<\mathsf{d},$$

由定理 2.1 可知 $w(t_c)\in\mathbb{W}$，则有 $\mathtt{I}(w(t_c))>0$ 或者 $\left\|w(t_c)\right\|_{\mathbb{H}}=0$。令 $\overline{w}(t)=w(t+t_c)$，$t\ge 0$，此时 $\overline{w}(t)$ 是问题(1.1)~(1.3)的一个解。由定理 3.1 可知解 $\overline{w}(t)$ 的最大存在时间是无穷的。由此定理得证。

5. 结语

变系数波动方程是波动方程的一种推广形式，通过引入变系数 $a(x)$，使得方程能够描述更广泛的物理现象。首先，基于泛函估计方法构建了位势井框架，并得出了弱解存在性的定理。在此基础上，进一步推导出在次临界能级下整体弱解的存在。随后，通过对解的泛函进行估计，得出在次临界能级下解的爆破。最后，利用定理 2.1 证明了在临界能级下整体解的存在性。

同时，本文并未涉及变系数波动方程在临界能级下解的爆破问题，也没有对超临界能级下波动方程的整体存在性和解的爆破进行估计，这些内容需要进一步的验证和思考。本文仅研究了变系数波动方程的两个能级，未考虑超临界能级的限制条件，未来可以在这两个能级的基础上对超临界能级进行更深入的研究。

基金项目

本文由辽宁省属本科高校基本科研业务费专项资金资助(LJ212410150044)，教育部高等教育司产学合作协同育人项目、大连交通大学研究生教育改革项目、本科教改项目支持。

参考文献

[1] Guowang, C. and Zhijian, Y. (2000) Existence and Non-Existence of Global Solutions for a Class of Non-Linear Wave Equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **23**, 615-631. https://doi.org/10.1002/(sici)1099-1476(20000510)23:7<615::aid-mma133>3.0.co;2-e

[2] Yang, Z.J. (2003) Global Existence, Asymptotic Behavior and Blowup of Solutions for a Class of Nonlinear Wave Equations with Dissipative Term. *Journal of Differential Equations*, **187**, 520-540. https://doi.org/10.1016/s0022-0396(02)00042-6

[3] Esquivel-Avila, J.A. (2005) Dynamics around the Ground State of a Nonlinear Evolution Equation. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **63**, e331-e343. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.02.108

[4] Liu, Y. and Xu, R. (2007) Fourth Order Wave Equations with Nonlinear Strain and Source Terms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **331**, 585-607. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.09.010

[5] Wang, Y. and Wang, Y. (2013) On the Initial-Boundary Problem for Fourth Order Wave Equations with Damping, Strain and Source Terms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **405**, 116-127. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.03.060

[6] Lin, Q., Shen, J. and Wang, X. (2020) Critical and Sup-Critical Initial Energy Finite Time Blowup Phenomena for the Fourth-Order Wave Equations with Nonlinear Strain Term. *Nonlinear Analysis*, **198**, Article ID: 111873. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111873

[7] Han, J., Xu, R. and Yang, Y. (2021) Asymptotic Behavior and Finite Time Blow up for Damped Fourth Order Nonlinear Evolution Equation. *Asymptotic Analysis*, **122**, 349-369. https://doi.org/10.3233/asy-201621

[8] Yu, J. and Di, H. (2023) Variable-coefficient Viscoelastic Wave Equation with Acoustic Boundary Conditions: Global Existence, Blowup and Energy Decay Rates. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, **17**, Article No. 68. https://doi.org/10.1007/s43037-023-00292-z

[9] Lian, W., Rădulescu, V.D., Xu, R., Yang, Y. and Zhao, N. (2019) Global Well-Posedness for a Class of Fourth-Order Nonlinear Strongly Damped Wave Equations. *Advances in Calculus of Variations*, **14**, 589-611. https://doi.org/10.1515/acv-2019-0039

[10] Wu, Y. and Xue, X. (2014) Decay Rate Estimates for a Class of Quasilinear Hyperbolic Equations with Damping Terms Involving *p*-Laplacian. *Journal of Mathematical Physics*, **55**, Article ID: 121504. https://doi.org/10.1063/1.4904484

[11] Ghegal, S., Hamchi, I. and Messaoudi, S.A. (2018) Global Existence and Stability of a Nonlinear Wave Equation with Variable-Exponent Nonlinearities. *Applicable Analysis*, **99**, 1333-1343. https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1530760

[12] 杨延冰. 几类非线性 Boussinesq 系统的定性研究[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2015.

[13] 徐润章, 杨延冰. 非线性发展方程的初值依赖问题[M]. 北京: 科学出版社, 2017.