

几类特殊图的孤立数

阿不都艾再孜·乌不力哈斯木, 买吐肉孜·买司地克*

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2024年12月22日; 录用日期: 2025年1月15日; 发布日期: 2025年1月24日

摘要

图的孤立集是顶点集的子集使得图中减去它的闭邻域后剩下部分构成孤立点集, 图的孤立数是图中最小孤立集的基数。孤立数相关概念在日常生活中起着重要的作用, 如在流行病学中, 可以用来评估孤立措施的有效性; 在网络安全领域, 孤立数的概念可以用于识别和孤立异常行为或潜在的威胁等。本文确定友谊图、风车图、轮图、风筝图以及杠铃图等几类特殊图的孤立数, 并讨论平面格子图的孤立数。

关键词

孤立集, 孤立数, 特殊图, 平面格子图

Isolation Number of Several Special Graphs

Wubulhasimu·Abuduaizaizi, Metsidik·Metrose*

College of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Dec. 22nd, 2024; accepted: Jan. 15th, 2025; published: Jan. 24th, 2025

Abstract

The isolation set of a graph is a subset of the vertex set such that the remaining part after subtracting its closed neighborhood from the graph constitutes an isolated vertex set, and the isolation number of a graph is the cardinality of the smallest isolated set in the graph. The concept of isolation numbers plays an important role in daily life, such as in epidemiology, where it can be used to evaluate the effectiveness of isolation measures; in the field of cybersecurity, the concept of isolation numbers can be used to identify and isolate abnormal behavior or potential threats. This article determines the isolation numbers of several special types of graphs, such as friendship graphs, windmill graphs, wheel graphs, kite graphs, and barbell graphs, and discusses the isolation numbers of plane grid graphs.

*通讯作者。

文章引用: 阿不都艾再孜·乌不力哈斯木, 买吐肉孜·买司地克. 几类特殊图的孤立数[J]. 应用数学进展, 2025, 14(1): 173-184. DOI: 10.12677/aam.2025.141020

Keywords

Isolation Set, Isolation Number, Special Graphs, Plane Grid Graphs

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 图的控制理论因其较强的应用性在城市交通、网络安全、社交网络等领域得到了广泛的研究。而像流行病学、通信网络等领域, 因其资源有限但仍需进行有效分配从而达到特定的控制目标, 故很难通过图的控制理论来控制所有顶点, 具有一定的局限性, 因此 2017 年 Caro 和 Hansberg [1] 通过放松控制理论的部分条件首次引入“图的孤立(Isolation of graph)”的概念, 即在不完全控制图中所有顶点的情况下, 对其中部分的顶点进行控制, 实现整个图的特定的孤立效果, 从而提高控制效率, 此研究扩展了图论中支配集的概念, 引入了部分控制和孤立数的新视角, 为图论领域提供了新的研究方向。

自图的孤立的定义提出后, 在图论与组合优化、流行病学、通信网络、应急管理以及交通网络等领域中, 图的控制理论得到了一定的发展, 并取得了较为明显的成就。如 2017 年 Caro 和 Hansberg [1] 证明一个 $n(n > 3)$ 阶不同构于 5 圈 C_5 的连通图 G 的孤立数 $\iota(G) \leq \frac{n}{3}$, 确定了孤立数的精确界限和计算方法, 为之后的研究提供了新理论基础。2021 年 Lemańska 等人 [2] 给出了孤立数和控制数之间等价的刻画, 并证明 $n(n \geq 3)$ 阶路 P_n 的孤立数 $\iota(P_n) = \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil$, 扩展了孤立数和控制数的理论基础, 还为网络安全和通信网络分析等实际应用领域提供了新的分析方法, 推动了孤立数和控制数在图论领域的研究进展。2024 年 Lemańska 等人 [3] 又对图的孤立数等于其顶点数的三分之一的特殊图进行了特征划分, 证明了至少有 6 个顶点的连通图都有三组不相交的隔离集, 并且给出了隔离数等于顶点数三分之一的单圈图和块图的刻画, 深化了对图的孤立数和控制数的理解。2024 年 Boyer 和 Goddard [4] 证明了除了 K_2 和 C_5 之外, 至少有 3 个顶点的连通图都存在三个不相交的隔离集, 使得不被这三个集合完全控制的顶点构成一个独立集, 利用 Lemańska 等人 [3] 引入的图族, 确定了所有 $\iota(G) = \frac{n}{3}$ 的图。除图的 K_2 孤立得到了广泛研究之外, 还有图的 $K_{1,k+1}$ 孤立 [5]、 K_k 孤立 [6] [7]、圈孤立 [8] [10]、 k -路孤立 [11]、 k -星孤 [12] 等方面的问题也得到了比较深入的研究。随着网络科学和数据分析技术的发展, 孤立数的相关研究将进一步拓展到更多新的领域。

本文首先确定友谊图、风车图、轮图、扇图、风筝图以及杠铃图等几类特殊图的孤立数, 并讨论了部分平面格子图的孤立数。

2. 基本概念

令图 $G = (V(G), E(G))$ 是简单连通图, 其中顶点集为 $V(G)$, 边集为 $E(G)$ 。若 $uv \in E(G)$, 则 u 和 v 相邻; 与 u 相邻的所有顶点构成 u 的邻集, 记 $N(u)$; u 的闭邻域 $N[u]$ 是它与它的邻集的并, 即 $N[u] = \{u\} \cup N(u)$; 一个集合 D 的闭邻域 $N[D] = \bigcup_{u \in D} N[u]$ 。

定义 1 ([1]). 设 D 是简单图 $G(V, E)$ 的顶点子集, 若 $V(G) - N[D]$ 的导出子图是无边图, 则称 D 为图 G 的孤立集, 图 G 中最小孤立集的基数称为图 G 的孤立数, 记为 $\iota(G)$; 如果顶点 $v \in D$, 则 v 称作控制点。

定义 2. 具有一个公共顶点的 $n(n \geq 2)$ 个三长圈 C_3 构成的图称为**友谊图**(如图 1 所示), 表示为 F_3^n 。

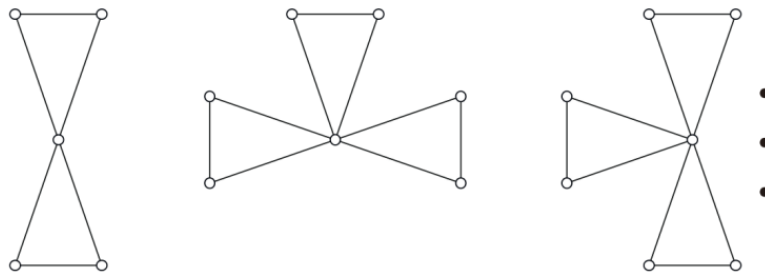


Figure 1. Friendship graph F_3^2 , F_3^3 , F_3^n

图 1. 友谊图 F_3^2 , F_3^3 , F_3^n

定义 3. 具有一个公共顶点的 $n(n \geq 2)$ 个四圈 C_4 的并图称为**风车图**(如图 2 所示), 表示为 D_4^n 。

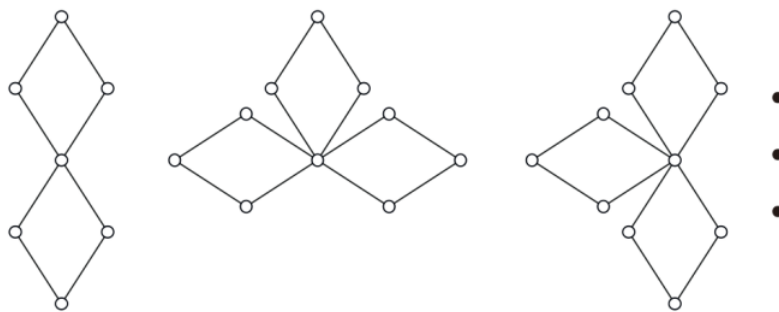


Figure 2. Windmill graph D_4^2 , D_4^3 , D_4^n

图 2. 风车图 D_4^2 , D_4^3 , D_4^n

定义 4. 令由一个顶点 v 连接 $n-1$ 阶圈 C_{n-1} 的每一个顶点得到的图称为**轮图**(如图 3 所示), 表示为 W_n 。

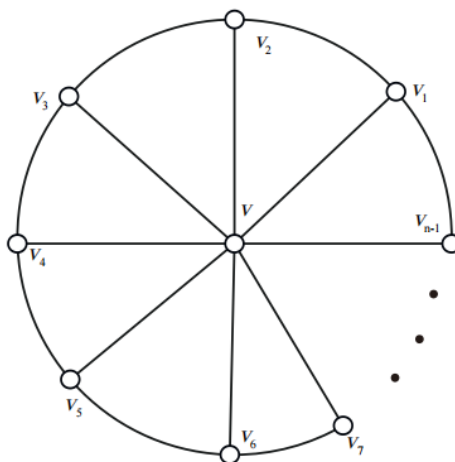


Figure 3. Wheel graph W_n

图 3. 轮图 W_n

定义 5. 令由一个公共顶点 v 连接 $n-1$ 阶路 P_{n-1} 的每一个顶点得到的图称为**扇图**(如图 4 所示), 表示为 F_n 。

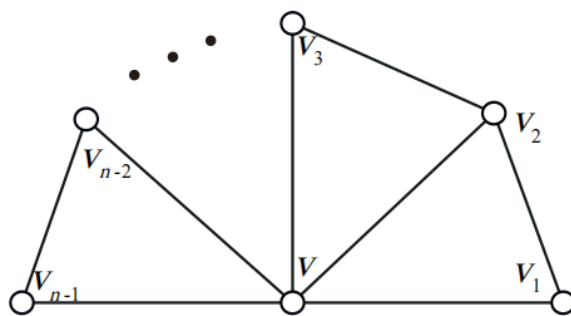


Figure 4. Fan graph F_n

图 4. 扇图 F_n

定义 6. 令由一个完全图 K_a 连接路 P_{b+1} 得到的图称为**风筝图**, 其中 $V(K_a) \cap V(P_{b+1}) = 1$ (如图 5 所示), a 和 $b+1$ 分别为完全图 K_a 和路 P_{b+1} 的阶, 表示为 $L_{a,b}$ 。

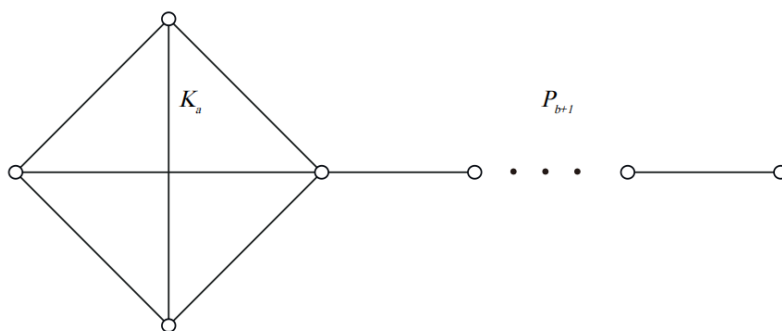


Figure 5. Kite graph $L_{a,b}$

图 5. 风筝图 $L_{a,b}$

定义 7. 令由一条路 P_{b+2} 连接两个互不相交的圈 C_a 和 C_c 得到的图称为**杠铃图**(如图 6 所示), 其中 $b+2$, 的 a 和 c 分别为路 P_{b+2} 、圈 C_a 和 C_c 的阶, 表示为 $D_{a,b,c}$ 。

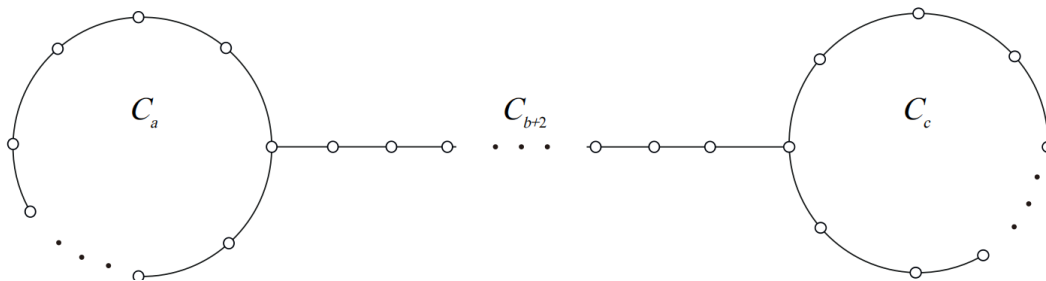


Figure 6. Barbell graph $D_{a,b,c}$

图 6. 杠铃图 $D_{a,b,c}$

定义 8. 设 G 和 H 是两个简单图, $G \square H$ 表示为图 G 和 H 的笛卡尔积, 其顶点集和边级分别为

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H),$$

$$E(G \square H) = \{(u, v)(u', v') : v = v' \text{ 且 } uu' \in E(G), u = u' \text{ 且 } vv' \in E(H)\}.$$

定义 9. 令由两条的路 P_m 和 P_n 作笛卡尔积得到的图称为平面格子图(如图 7 所示), 其中 m 和 n 分别为路 P_m 和 P_n 的阶, 表示为 $P_m \square P_n$ 。

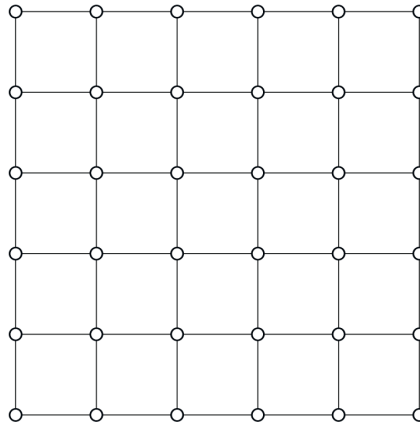


Figure 7. Grid graph $P_6 \square P_6$

图 7. 平面格子图 $P_6 \square P_6$

定义 10. 平面格子图 $P_{m+k} \square P_n$ 是两个平面格子图 $P_m \square P_n$ 和 $P_k \square P_n$ 的一个拼接(如图 8 所示), 表示为

$$P_{m+k} \square P_n = (P_m + P_k) \square P_n = P_m \square P_n + P_k \square P_n.$$

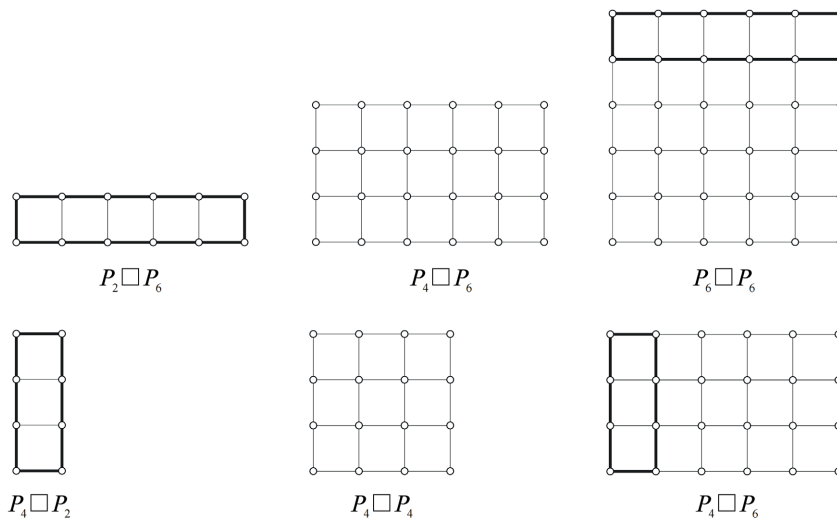


Figure 8. $P_2 \square P_6 + P_4 \square P_6 = P_6 \square P_6$, $P_4 \square P_2 + P_4 \square P_4 = P_4 \square P_6$

图 8. $P_2 \square P_6 + P_4 \square P_6 = P_6 \square P_6$, $P_4 \square P_2 + P_4 \square P_4 = P_4 \square P_6$

3. 友谊图、风车图、轮图、扇图、风筝、杠铃图的孤立数

定理 1. 友谊图 F_3^n 、风车图 D_4^n 、轮图 W_n 、扇图 F_n 的孤立数为

$$\iota(F_3^n) = \iota(D_4^n) = \iota(W_n) = \iota(F_n) = 1.$$

证明. 由定义可知, 友谊图、风车图、轮图、扇图中最大度顶点到其他顶点的距离最多为 2, 距离等于 2 的点本身构成独立集。因此, 将上述四个图中最大度顶点删除即可, 看图 9, 即 $V(G) - N[v]$ 的导出子图为无边图, 其中 v 是最大度顶点。因此 $\iota(F_3^n) = \iota(D_4^n) = \iota(W_n) = \iota(F_n) \leq 1$ 。根据孤立数的定义, 有边图的孤立数大于等于 1, 故 $\iota(F_3^n) = \iota(D_4^n) = \iota(W_n) = \iota(F_n) \geq 1$ 。所以 $\iota(F_3^n) = \iota(D_4^n) = \iota(W_n) = \iota(F_n) = 1$ 。

□

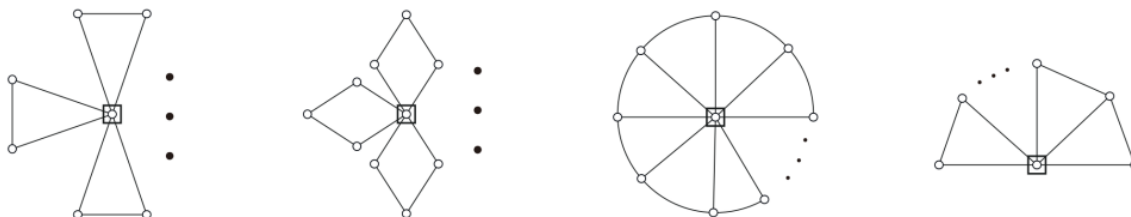


Figure 9. The domination vertex of friendship graph, windmill graph, wheel graph and fan graph
图 9. 友谊图、风车图、轮图和扇图的控制点

定理 2 ([2]). 一条有 $n(n \geq 3)$ 个顶点的路如果 P_n 的孤立数为

$$\iota(P_n) = \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil.$$

定理 3. 风筝图 $L_{a,b}$ 的孤立数为

$$\iota(L_{a,b}) = 1 + \left\lceil \frac{b-2}{4} \right\rceil.$$

证明. 因为风筝图 $L_{a,b}$ 是由一个完全图 K_a 和 $b+1$ 阶路 P_{b+1} 组成, 首先, 根据孤立数的概念, 可得完全图的孤立数为 1, 即 $\iota(K_a) = 1$ 。再由引理 2 可知, 一条 n 阶路 P_n 的孤立数为 $\iota(P_n) = \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil$, 所以在风筝图 $L_{a,b}$ 中, 删除完全图 K_a 和路 P_{b+1} 的唯一公共点 v_1 后, 再计算路 P_{b+1} 的孤立点即可。结合孤立数的定义可知, 删除公共顶点 v_1 时会连带删去路 P_{b+1} 的一个邻点, 因此只需讨论路 P_{b-1} 的孤立数即可。

由此

$$\begin{aligned} \iota(D_{a,b,c}) &= \iota(K_a) + \iota(P_{b-1}) \\ &= 1 + \left\lceil \frac{(b-1)-1}{4} \right\rceil \\ &= 1 + \left\lceil \frac{b-2}{4} \right\rceil \end{aligned}$$

□

定理 4. 有 $n(n \geq 5)$ 个顶点圈 C_n 的孤立数为

$$\iota(C_n) = 1 + \left\lceil \frac{n-4}{4} \right\rceil.$$

证明. 一个 n 阶圈 C_n 去掉任意一个顶点后可变成 $n-1$ 阶的路 P_{n-1} , 所以只需要计算出 P_{n-1} 的孤立数即可, 结合孤立数的定义可知, 删除圈中任意一个顶点时, 会将该顶点的左右两个邻点连带删除, 因此只需讨论路 P_{n-3} 的孤立数即可。

由此

$$\begin{aligned}\iota(C_n) &= 1 + \iota(P_{n-3}) \\ &= 1 + \left\lceil \frac{(n-3)-1}{4} \right\rceil \\ &= 1 + \left\lceil \frac{n-4}{4} \right\rceil\end{aligned}$$

□

定理 5: 杠铃图 $D_{a,b,c}$ 的孤立数为

$$\iota(D_{a,b,c}) = 2 + \left\lceil \frac{a-4}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{b-3}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{c-4}{4} \right\rceil.$$

证明. 因为杠铃图 $D_{a,b,c}$ 是由两个不相交的圈 C_a 和 C_c 连接 $b+2$ 阶的路 P_{b+2} 组成。由定理 4 易得圈 C_a 和 C_c 的孤立数。再由引理 2 可知, 一条 n 阶路 P_n 的孤立数为 $\iota(P_n) = \left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil$, 因此在杠铃图 $D_{a,b,c}$ 中先删除两个不相交的圈 C_a 和 C_c 分别与路 P_{b+2} 的两个公共顶点, 再分别求出 C_a 、 C_c 和 P_{b+2} 的孤立数后求和即为杠铃图的孤立数。结合孤立数的定义可知, 删除公共顶点时会连带删除路 P_{b+2} 的左右两个邻点, 因此只需讨论路 P_{b-2} 的孤立数即可。

由此

$$\begin{aligned}\iota(D_{a,b,c}) &= \iota(C_a) + \iota(P_{b-2}) + \iota(C_c) \\ &= 1 + \left\lceil \frac{a-4}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{(b-2)-1}{4} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{c-4}{4} \right\rceil \\ &= 2 + \left\lceil \frac{a-4}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{b-3}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{c-4}{4} \right\rceil\end{aligned}$$

□

4. 平面格子图的孤立数

定理 6. 平面格子图 $P_2 \square P_n$ 的孤立数

$$\iota(P_2 \square P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad (n \geq 2).$$

证明. 先证 $\iota(P_2 \square P_n) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ 。对 n 进行归纳, 当 $n=2$, 有 $\iota(P_2 \square P_2) = 1 = \left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil$, 即结论成立。

假设结论对大于等于 2 小于 n 的自然数成立。以下证对 $n(n \geq 3)$ 成立。由于 $P_2 \square P_n = P_2 \square P_{n-2} + P_2 \square P_2$, $\iota(P_2 \square P_n) \leq \iota(P_2 \square P_{n-2}) + \iota(P_2 \square P_2)$ 。根据归纳假设 $\iota(P_2 \square P_{n-2}) \leq \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil$, $\iota(P_2 \square P_2) \leq 1$ 。所以

$$\iota(P_2 \square P_n) \leq \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

再证 $\iota(P_2 \square P_n) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ 。设 D 是 $P_2 \square P_n$ 的任何一个孤立集且 $|D| < \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, 则在 $P_2 \square P_n$ 中至少存在某一个只含一个控制点的同构于 $P_2 \square P_4$ 区域, 这会导致图 $P_2 \square P_n - N[D]$ 至少含一条边。这与孤立集定义矛盾, 所以结论成立。

由此

$$\iota(P_2 \square P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

□

例 1. 在图 10 中, 我们展示 $P_2 \square P_2$ 至 $P_2 \square P_9$ 等 8 个图孤立集的分布, 黑色点为控制点, 白色点为被控制顶点, 灰色为孤立顶点。可以从图中看出, 当 $n \geq 4$ 时, 每 3 个为一个循环增加一个控制点。

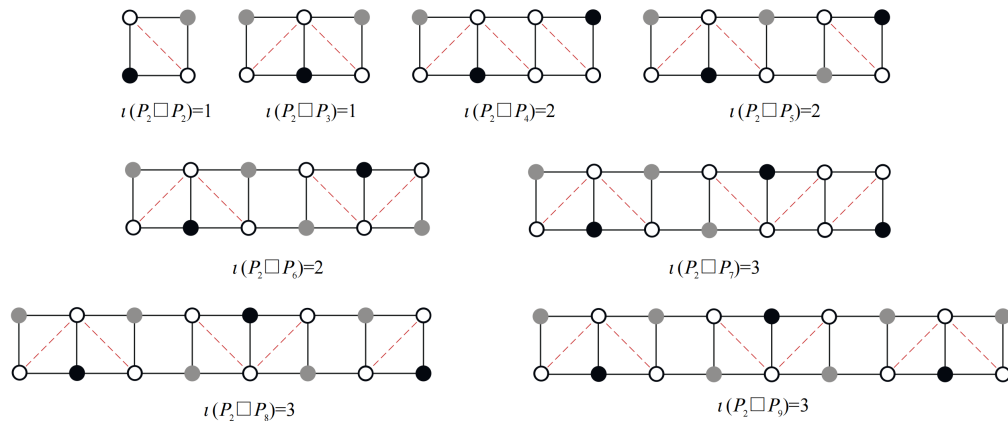


Figure 10. $\iota(P_2 \square P_n) (2 \leq n \leq 9)$

图 10. $\iota(P_2 \square P_n) (2 \leq n \leq 9)$

定理 7. 平面格子图 $P_3 \square P_n$ 的孤立数

$$\iota(P_3 \square P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \quad (n \geq 2).$$

证明. 先证 $\iota(P_3 \square P_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 。对 n 进行归纳, 当 $n=2$ 时, 有 $\iota(P_3 \square P_2) = 1 = \left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil$, 即结论成立。

假设结论对大于等于 2 小于 n 的自然数成立。以下证对 $n (n \geq 3)$ 成立。由于 $P_3 \square P_n = P_3 \square P_{n-2} + P_3 \square P_2$, $\iota(P_3 \square P_n) \leq \iota(P_3 \square P_{n-2}) + \iota(P_3 \square P_2)$ 。根据归纳假设 $\iota(P_3 \square P_{n-2}) \leq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$, $\iota(P_3 \square P_2) \leq 1$ 。所以

$$\iota(P_3 \square P_n) \leq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

再证 $\iota(P_3 \square P_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 。设 D 是 $P_3 \square P_n$ 的任何一个孤立集且 $|D| < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, 则在 $P_3 \square P_n$ 中至少存在某一个只含一个控制点的同构于 $P_3 \square P_4$ 区域, 这会导致图 $P_3 \square P_n - N[D]$ 至少含一条边。这与孤立集定义矛盾, 所以结论成立。

由此

$$\iota(P_3 \square P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

□

例 2. 在图 11 中, 我们展示 $P_3 \square P_2$ 至 $P_3 \square P_7$ 等 7 个图孤立集的分布。可以从图中看出, 当 $n \geq 2$ 开始, 每 2 个为一个循环增加一个控制点。

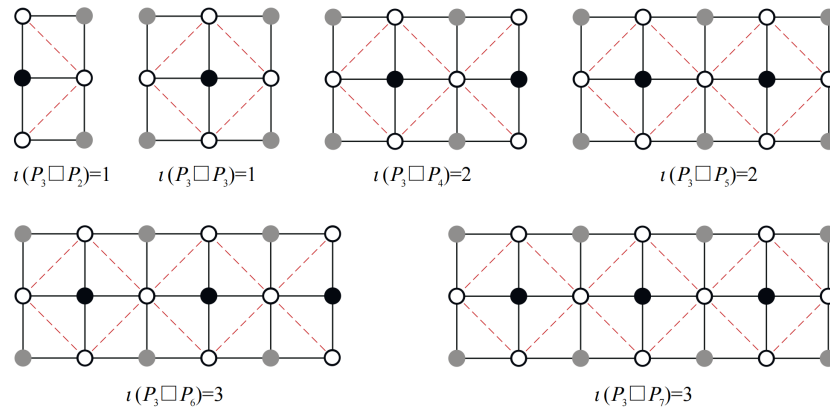


Figure 11. $i(P_3 \square P_n) (n \geq 2)$

图 11. $i(P_3 \square P_n) (n \geq 2)$

定理 8. 平面格子图 $P_4 \square P_n$ 的孤立数

$$i(P_4 \square P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \quad (n \geq 2).$$

证明. 图 $P_4 \square P_n = P_{(3+1)} \square P_n = (P_3 + P_1) \square P_n = P_3 \square P_n + P_n$, 由孤立数的定义, 将图 $P_4 \square P_n$ 分解成 $P_3 \square P_n + P_n$ 后, $P_3 \square P_n$ 与 P_n 相连的首个顶点没有被孤立, 所以计算时需要给 P_n 增加一个顶点。

先证 $i(P_4 \square P_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ 。对 n 进行归纳, 当 $n=3$ 时, 有:

$$i(P_4 \square P_3) \leq i(P_3 \square P_3) + i(P_4) = 1 + 1 = 2 = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{3}{4} \right\rceil,$$

即结论成立。

假设结论对大于等于 2 小于 n 的自然数成立。以下证对 $n (n \geq 4)$ 成立。由于 $P_4 \square P_n = P_3 \square P_n + P_{n+1}$, $i(P_4 \square P_n) \leq i(P_3 \square P_n) + i(P_{n+1})$ 。根据定理 6 和引理 2, $i(P_3 \square P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $i(P_{n+1}) = \left\lceil \frac{(n+1)-1}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ 。所以

$$i(P_4 \square P_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil.$$

再证 $i(P_4 \square P_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ 。设 D 是 $P_4 \square P_n$ 的任何一个孤立集且 $|D| < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$, 则在 $P_4 \square P_n$ 中至少存在某一个只含两个控制点的同构于 $P_4 \square P_4$ 区域, 这会导致图 $P_4 \square P_n - N[D]$ 至少含一条边。这与孤立集定义矛盾, 所以结论成立。

由此

$$i(P_4 \square P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \quad (n \geq 2).$$

□

例 3. 在图 12 中我们展示 $P_4 \square P_3$ 至 $P_4 \square P_{12}$ 等 10 个图孤立集的分布。可以从图中看出, 它是由 $P_3 \square P_n$ 和 P_n 拼接得到的图。

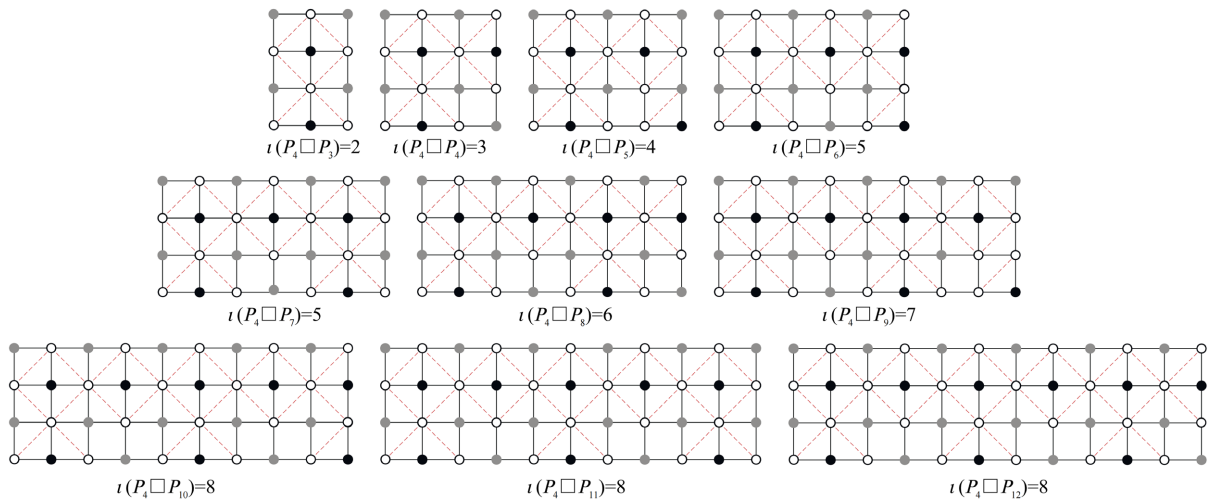


Figure 12. $i(P_4 \square P_n) (3 \leq n \leq 12)$

图 12. $i(P_4 \square P_n) (3 \leq n \leq 12)$

定理 9. 平面格子图 $P_5 \square P_n$ 的孤立数

$$i(P_5 \square P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \quad (n \geq 3).$$

证明. 图 $P_5 \square P_n = P_{(3+2)} \square P_n = (P_3 + P_2) \square P_n = P_3 \square P_n + P_2 \square P_n$.

先证 $i(P_5 \square P_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. 对 n 进行归纳, 当 $n=3$ 时, 有:

$$i(P_5 \square P_3) \leq i(P_3 \square P_3) + i(P_2 \square P_3) = 1 + 1 = 2 = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{3}{3} \right\rceil,$$

即结论成立。

假设结论对大于等于 2 小于 n 的自然数成立。以下证对 $n (n \geq 4)$ 成立。由于 $P_5 \square P_n = P_3 \square P_n + P_2 \square P_n$, $i(P_5 \square P_n) \leq i(P_3 \square P_n) + i(P_2 \square P_n)$ 。根据定理 6 和引理 7, $i(P_3 \square P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $i(P_2 \square P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ 。所以

$$i(P_5 \square P_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

再证 $i(P_5 \square P_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ 。设 D 是 $P_5 \square P_n$ 的任何一个孤立集且 $|D| < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, 则在 $P_5 \square P_n$ 中至少存在某一个只含两个控制点的同构于 $P_5 \square P_4$ 区域, 这会导致图 $P_5 \square P_n - N[D]$ 至少含一条边。这与孤立集定义矛盾, 所以结论成立。

由此

$$i(P_5 \square P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

□

例 4. 在图 13 中我们展示 $P_5 \square P_3$ 至 $P_4 \square P_{15}$ 等 13 个图孤立集的分布。可以从图中看出, 它是由 $P_3 \square P_n$ 和 $P_2 \square P_n$ 拼接得到的图。

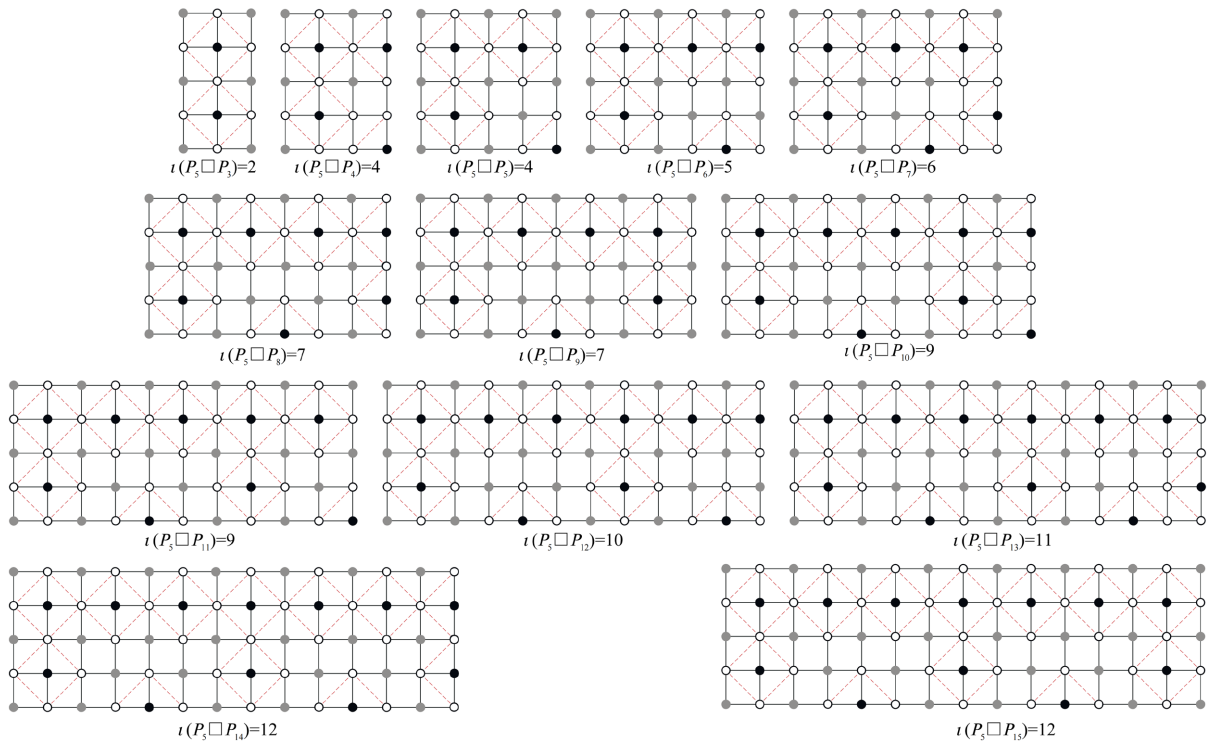


Figure 13. $\iota(P_5 \times P_n) (n \geq 3)$

图 13. $\iota(P_5 \times P_n) (n \geq 3)$

5. 总结

本文根据孤立数的定义确定了扇图、轮图、完全图、风筝图、杠铃图以及部分平面格子图的孤立数。特殊图的孤立数研究不仅在理论上具有重要意义, 而且在实际应用中也发挥着关键作用, 特别是在化学分析、网络分析、社交网络研究、生物信息学等领域。通过研究这些特殊图的孤立数, 我们可以更好地理解 and 利用这些图的结构特性, 以解决实际问题。研究各类图的孤立数必定有着较为广阔的发展前景, 也必将得到更进一步的研究和应用。

参考文献

- [1] Caro, Y. and Hansberg, A. (2017) Partial Domination—The Isolation Number of a Graph. *Filomat*, **31**, 3925-3944. <https://doi.org/10.2298/fil1712925c>
- [2] Lemańska, M., Souto-Salorio, M.J., Dapena, A. and Vazquez-Araujo, F.J. (2021) Isolation Number versus Domination Number of Trees. *Mathematics*, **9**, Article 1325. <https://doi.org/10.3390/math9121325>
- [3] Lemańska, M., Mora, M. and Souto-Salorio, M.J. (2024) Graphs with Isolation Number Equal to One Third of the Order. *Discrete Mathematics*, **347**, Article ID: 113903. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2024.113903>
- [4] Boyer, G. and Goddard, W. (2024) Disjoint Isolating Sets and Graphs with Maximum Isolation Number. *Discrete Applied Mathematics*, **356**, 110-116. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2024.05.022>
- [5] 张刚. 图的 $K_{1,2}$ 孤立[D]: [硕士学位论文]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2021.
- [6] Borg, P., Fenech, K. and Kaemawichanurat, P. (2020) Isolation of k -Cliques. *Discrete Mathematics*, **343**, Article ID: 111879. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.111879>
- [7] Borg, P., Fenech, K. and Kaemawichanurat, P. (2022) Isolation of k -Cliques II. *Discrete Mathematics*, **345**, Article ID: 112641. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112641>
- [8] Wei, X., Zhang, G. and Zhao, B. (2023) On the C_4 -Isolation Number of a Graph. arXiv: 2310.17337.

- [9] Cui, Q. and Zhang, J. (2023) A Sharp Upper Bound on the Cycle Isolation Number of Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **39**, Article No. 117. <https://doi.org/10.1007/s00373-023-02717-w>
- [10] Zhang, G. and Wu, B. (2024) On the Cycle Isolation Number of Triangle-Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **347**, Article ID: 114190. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2024.114190>
- [11] Chen, J. and Xu, S. (2023) P5-Isolation in Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **340**, 331-349. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2023.07.018>
- [12] Zhang, G. and Wu, B. (2024) k -Isolation in Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **357**, 99-111. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2024.06.005>