Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(1), 194-202
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.141022

Hans汉斯

非线性演化方程的丰富的Jacobi椭圆函数解

吕大昭[1]，崔艳英[2]

[1]北京建筑大学理学院，北京
[2]北京工业大学耿丹学院信息工程学院，北京

收稿日期：2024年12月24日；录用日期：2025年1月16日；发布日期：2025年1月29日

摘　要

本文通过把十二个Jacobi椭圆函数分类成四组，从而提出一个新的广义Jacobi椭圆函数展开法来构造非线性演化方程的精确双周期解。在数学软件*Maple*的帮助下，应用这个非常有效的方法求出了非线性演化方程的许多解，当模数$m \to 0$或1时，这些解退化为相应的孤立波解或三角函数解。

关键词

Jacobi椭圆函数，双周期解，非线性演化方程

Abundant Jacobi Elliptic Function Solutions of Nonlinear Evolution Equations

Dazhao Lyu[1], Yanying Cui[2]

[1]School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing
[2]Information Engineering Institute, Gengdan Institute of Beijing University of Technology, Beijing

Received: Dec. 24th, 2024; accepted: Jan. 16th, 2025; published: Jan. 29th, 2025

Abstract

In this letter, twelve Jacobi elliptic functions are divided into four groups, and a new general Jacobi elliptic function expansion method is proposed to construct abundant exact doubly periodic solutions of nonlinear evolution equations. As a result, with the aid of computer symbolic computation software (for example, *Maple*), many exact doubly periodic solutions are obtained which shows that this method is very powerful. When the modulus $m \to 0$ or 1, these solutions

文章引用: 吕大昭, 崔艳英. 非线性演化方程的丰富的 Jacobi 椭圆函数解[J]. 应用数学进展, 2025, 14(1): 194-202.
DOI: 10.12677/aam.2025.141022

degenerate to the corresponding solitary wave solutions and trigonometric function (singly periodic) solutions.

Keywords

Jacobi Elliptic Function, Doubly Periodic Solution, Nonlinear Evolution Equation

1. 引言

直接寻找非线性演化方程的精确解是数学物理领域的重要任务。许多方法[1] [2]被发展出来用来构造它们的精确解。其中，行波解在非线性科学中起着非常重要的作用，它可以很好地描述各种物理现象，例如振动、传播波以及孤立子等等。特别地，刘等人[3]和傅等人[4]提出了 Jacobi 椭圆函数展开法用来构造非线性演化方程的双周期解。随后，沈[5]和闫[6]扩展了 Jacobi 椭圆函数展开法获得了更多类型方程的更多 Jacobi 椭圆函数解。但是，我们仍然认为他们的方法[3]-[6]是特殊方法。经过仔细研究 12 个 Jacobi 椭圆函数的性质之后，我们发现它们可以被分为四组[7]，即

(1) $sn\xi$，$cn\xi$ 和 $\mathrm{dn}\xi$；

(2) $ns\xi=\dfrac{1}{sn\xi}$，$cs\xi=\dfrac{cn\xi}{sn\xi}$ 和 $ds\xi=\dfrac{dn\xi}{sn\xi}$；

(3) $sc\xi=\dfrac{sn\xi}{cn\xi}$，$nc\xi=\dfrac{1}{cn\xi}$ 和 $dc\xi=\dfrac{dn\xi}{cn\xi}$；

(4) $sd\xi=\dfrac{sn\xi}{dn\xi}$，$cd\xi=\dfrac{cn\xi}{dn\xi}$ 和 $nd\xi=\dfrac{1}{dn\xi}$。

为了获得非线性演化方程更多的精确解，在本文，我们提出一个更加广泛和有效的 Jacobi 椭圆函数展开法。

2. 广义的 Jacobi 椭圆函数展开法

下面我们描述我们的广义的 Jacobi 椭圆函数展开法。

步骤 1：约化 PDE 到 ODE

利用行波解约化 $u=u(\xi)$，$\xi=k(x-\lambda t)$，其中 k 和 λ 分别是波数和波速，我们把偏微分方程

$$P(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots)=0 \tag{1}$$

约化到常微分方程

$$G\left(u,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi},\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2},\cdots\right)=0 \tag{2}$$

步骤 2：引入有限幂级数形式解

我们假设常微分方程(2)有下面的形式解

$$u = a_0 + a_1 sn\xi + b_1 cn\xi + c_1 dn\xi + \sum_{i=2}^{n} sn^{i-2}\xi\left(a_i sn^2\xi + b_i sn\xi cn\xi + c_i sn\xi dn\xi + d_i cn\xi dn\xi\right) \tag{3.1}$$

$$u = a_0 + a_1 ns\xi + b_1 cs\xi + c_1 ds\xi + \sum_{i=2}^{n} ns^{i-2}\xi\left(a_i ns^2\xi + b_i ns\xi cs\xi + c_i ns\xi ds\xi + d_i cs\xi ds\xi\right) \tag{3.2}$$

$$u = a_0 + a_1 sc\xi + b_1 nc\xi + c_1 dc\xi + \sum_{i=2}^{n} sc^{i-2}\xi\left(a_i sc^2\xi + b_i sc\xi nc\xi + c_i sc\xi dc\xi + d_i nc\xi dc\xi\right) \tag{3.3}$$

$$u = a_0 + a_1 sd\xi + b_1 cd\xi + c_1 nd\xi + \sum_{i=2}^{n} sd^{i-2}\xi\left(a_i sd^2\xi + b_i sd\xi cd\xi + c_i sd\xi nd\xi + d_i cd\xi nd\xi\right) \tag{3.4}$$

其中 n 是待定参数。

步骤 3：确定参数 *n*.

定义 $u(\xi)$ 的次数是 $D[u(\xi)] = n$，则其它表达式的次数分别是

$$D\left[\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}\xi^m}\right] = n+m,\ D\left[\left(\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}\xi^m}\right)^q\right] = q(n+m) \text{ 和 } D\left[u^p\left(\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}\xi^m}\right)^q\right] = np + q(n+m)$$

这样，我们可以通过平衡常微分方程(2)中的最高阶导数项和非线性项来确定参数 n 的值。

步骤 4：导出代数方程组

把(3)代入(2)，我们获得一个关于 Jacobi 椭圆函数的方程，然后化简，合并同类项，得到关于未知量 $k,\lambda,a_0,a_i,b_i,c_i,d_{i+1}(i=1,2,\cdots)$ 非线性代数方程组，在数学软件 *Maple* 的帮助下，利用著名吴文俊消元法[8]求解，我们省略求解过程。

步骤 5：获得 Jacobi 椭圆函数解

把求得的 $k,\lambda,a_0,a_i,b_i,c_i,d_{i+1}(i=1,2,\cdots)$ 的值代入(3)式，最后我们获得了偏微分方程(1)的广义的 Jacobi 椭圆函数解。

注 1：显然，由于我们的方法的形式解（3)更加广泛，所以比以前那些求 Jacobi 椭圆函数解的方法[3]-[6]更加有效。这一点从我们已经获取到的丰富的 Jacobi 椭圆函数解可以证实。

注 2：当 $m=0$ 时，我们得到

(1) $sn(\xi,0)=\sin\xi$，$cn(\xi,0)=\cos\xi$，$dn(\xi,0)=1$；

(2) $ns(\xi,0)=\csc\xi$，$cs(\xi,0)=\cot\xi$，$ds(\xi,0)=\csc\xi$；

(3) $sc(\xi,0)=\tan\xi$，$nc(\xi,0)=\sec\xi$，$dc(\xi,0)=\sec\xi$；

(4) $sd(\xi,0)=\sin\xi$，$cd(\xi,0)=\cos\xi$，$nd(\xi,0)=1$。

当 $m=1$ 时，我们有

(1) $sn(\xi,1)=\tanh\xi$，$cn(\xi,1)=\mathrm{sech}\,\xi$，$dn(\xi,1)=\mathrm{sech}\,\xi$；

(2) $ns(\xi,1)=\coth\xi$，$cs(\xi,1)=\mathrm{csch}\,\xi$，$ds(\xi,1)=\mathrm{csch}\,\xi$；

(3) $sc(\xi,1)=\sinh\xi$，$nc(\xi,1)=\cosh\xi$，$dc(\xi,1)=1$；

(4) $sd(\xi,1)=\sinh\xi$，$cd(\xi,1)=1$，$nd(\xi,1)=\cosh\xi$。

容易看得出来，当模数 $m\to 0$ 或 1 时，这些解退化为相应的关于孤立波或三角函数解。为了节省篇幅，我们省略它们。因此，我们的方法推广了双曲函数展开法[1]和三角函数展开法[2]。

3. 例子和应用

3.1. KdV 方程

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \tag{4}$$

利用行波解约化 $u=u(\xi)$， $\xi=k(x-\lambda t)$，我们得

$$-\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\beta k^2\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3}=0 \tag{5}$$

通过平衡(5)中最高阶导数项和非线性项来确定参数 $n=2$。利用上面**步骤 4~5**，我们获得了 Jacobi 椭圆函数解，其中 I 是虚数单位， $a\begin{smallmatrix}-\\+\\+\\-\end{smallmatrix}b\begin{smallmatrix}-\\+\\-\\+\end{smallmatrix}c\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}d=a-b-c+d$ 或 $a+b+c+d$ 或 $a+b-c-d$ 或 $a-b+c-d$。

3.1.1. $sn\xi$ 、 $cn\xi$ 和 $dn\xi$ 展开法

利用(3.1)，我们得到 KdV 方程(4)的解如下

$$u_1=4\beta m^2k^2+4\beta k^2+\lambda-12\beta m^2k^2sn^2\xi;$$

$$u_2=4\beta m^2k^2+\beta k^2+\lambda-6\beta mk^2\left[m\,sn^2\xi\pm I\,sn\xi dn\xi\right];$$

$$u_3=\beta m^2k^2+4\beta k^2+\lambda-6\beta mk^2\left[m\,sn^2\xi\pm m\,I\,sn\xi cn\xi\right];$$

$$u_4=\beta m^2k^2+\beta k^2+\lambda-6\beta mk^2\left[m\,sn^2\xi\pm cn\xi dn\xi\right];$$

$$u_5=\beta m^2k^2+\beta k^2+\lambda-3\beta mk^2\left[m\,sn^2\xi\begin{smallmatrix}+\\-\\+\\-\end{smallmatrix}m\,I\,sn\xi cn\xi\begin{smallmatrix}-\\-\\+\\+\end{smallmatrix}I\,sn\xi dn\xi\begin{smallmatrix}+\\-\\-\\+\end{smallmatrix}cn\xi dn\xi\right]$$

3.1.2. $ns\xi$ 、 $cs\xi$ 和 $ds\xi$ 展开法

利用(3.2)，我们得到 KdV 方程(4)的解如下

$$u_6=4\beta m^2k^2+4\beta k^2+\lambda-12\beta k^2ns^2\xi;$$

$$u_7=4\beta m^2k^2+\beta k^2+\lambda-6\beta k^2\left[ns^2\xi\pm ns\xi cs\xi\right];$$

$$u_8=\beta m^2k^2+4\beta k^2+\lambda-6\beta k^2\left[ns^2\xi\pm ns\xi ds\xi\right];$$

$$u_9=\beta m^2k^2+\beta k^2+\lambda-6\beta k^2\left[ns^2\xi\pm cs\xi ds\xi\right];$$

$$u_{10}=\beta m^2k^2+\beta k^2+\lambda-3\beta k^2\left[ns^2\xi\begin{smallmatrix}-\\+\\-\\+\end{smallmatrix}ns\xi cs\xi\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}ns\xi ds\xi\begin{smallmatrix}-\\+\\+\\-\end{smallmatrix}cs\xi ds\xi\right]$$

3.1.3. $sc\xi$ 、 $nc\xi$ 和 $dc\xi$ 展开法

利用(3.3)，我们得到 KdV 方程(4)的解如下

$$u_{11}=4\beta m^2k^2\text{-}8\beta k^2+\lambda-12\beta k^2\left(1-m^2\right)sc^2\xi;$$

$$u_{12}=4\beta m^2k^2-5\beta k^2+\lambda-6\beta k^2\sqrt{1-m^2}\left[\sqrt{1-m^2}sc^2\xi\pm sc\xi dc\xi\right];$$

$$u_{13}=\beta m^2k^2-5\beta k^2+\lambda-6\beta k^2\sqrt{1-m^2}\left[\sqrt{1-m^2}sc^2\xi\pm\sqrt{1-m^2}sc\xi nc\xi\right];$$

$$u_{14}=\beta m^2k^2-2\beta k^2+\lambda-6\beta k^2\sqrt{1-m^2}\left[\sqrt{1-m^2}sc^2\xi\pm nc\xi dc\xi\right];$$

$$u_{15}=\beta m^2k^2-2\beta k^2+\lambda-3\beta k^2\sqrt{1-m^2}\left[\sqrt{1-m^2}sc^2\xi\begin{smallmatrix}-\\+\\+\\-\end{smallmatrix}sc\xi dc\xi\begin{smallmatrix}-\\+\\-\\+\end{smallmatrix}\sqrt{1-m^2}sc\xi nc\xi\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}nc\xi d\right]c\xi$$

3.1.4. $sd\xi$ 、 $cd\xi$ 和 $nd\xi$ 展开法

利用(3.4)，我们得到 KdV 方程(4)的解如下

$$u_{16}=-8\beta m^2k^2+4\beta k^2+\lambda+12\beta m^2k^2\left(1-m^2\right)sd^2\xi;$$
$$u_{17}=-5\beta m^2k^2+4\beta k^2+\lambda+6\beta mk^2\sqrt{1-m^2}\left[m\sqrt{1-m^2}sd^2\xi\pm mIsd\xi cd\xi\right];$$
$$u_{18}=-5\beta m^2k^2+\beta k^2+\lambda+6\beta mk^2\sqrt{1-m^2}\left[m\sqrt{1-m^2}sd^2\xi\pm\sqrt{1-m^2}sd\xi nd\xi\right];$$
$$u_{19}=-2\beta m^2k^2+\beta k^2+\lambda+6\beta mk^2\sqrt{1-m^2}\left[m\sqrt{1-m^2}sd^2\xi\pm Icd\xi nd\xi\right];$$
$$u_{20}=-2\beta m^2k^2+\beta k^2+\lambda+3\beta mk^2\sqrt{1-m^2}\left[m\sqrt{1-m^2}sd^2\xi\substack{-\\+\\-\\+}mIsd\xi cd\xi\substack{+\\-\\-\\+}\sqrt{1-m^2}sd\xi nd\xi\substack{-\\-\\+\\+}Icd\xi nd\xi\right]$$

3.2. Boussinesq 方程

$$u_{tt}-\gamma^2u_{xx}-\alpha u_{xxxx}-\beta\left(u^2\right)_{xx}=0 \tag{6}$$

利用行波解约化 $u=u(\xi)$， $\xi=k(x-\lambda t)$，我们得

$$\left(\lambda^2-\gamma^2\right)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}-\alpha k^2\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}\xi^4}-\beta\frac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}\xi^2}=0 \tag{7}$$

通过平衡(7)中最高阶导数项和非线性项来确定参数 $n=2$。利用上面**步骤 4~5**，我们获得了 Jacobi 椭圆函数解，其中 I 是虚数单位， $a\substack{-\\+\\+\\-}b\substack{-\\+\\-\\+}c\substack{+\\+\\-\\-}d=a-b-c+d$ 或 $a+b+c+d$ 或 $a+b-c-d$ 或 $a-b+c-d$。

3.2.1. $sn\xi$、$cn\xi$ 和 $dn\xi$ 展开法

利用(3.1)，我们得到 Boussinesq 方程(6)的解如下

$$u_1=\frac{1}{2\beta}\left(4\alpha m^2k^2+4\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{6\alpha m^2k^2}{\beta}sn^2\xi;$$
$$u_2=\frac{1}{2\beta}\left(\alpha m^2k^2+4\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{3\alpha mk^2}{\beta}\left[msn^2\xi\pm mIsn\xi cn\xi\right];$$
$$u_3=\frac{1}{2\beta}\left(4\alpha m^2k^2+\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{3\alpha mk^2}{\beta}\left[msn^2\xi\pm Isn\xi dn\xi\right];$$
$$u_4=\frac{1}{2\beta}\left(\alpha m^2k^2+\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{3\alpha mk^2}{\beta}\left[msn^2\xi\pm cn\xi dn\xi\right];$$
$$u_5=\frac{1}{2\beta}\left(\alpha m^2k^2+\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{3\alpha mk^2}{\beta}\left[msn^2\xi\substack{-\\+\\+\\-}mIsn\xi cn\xi\substack{+\\+\\-\\-}Isn\xi dn\xi\substack{+\\-\\+\\-}cn\xi dn\xi\right];$$

3.2.2. $ns\xi$、$cs\xi$ 和 $ds\xi$ 展开法

利用(3.2)，我们得到 Boussinesq 方程(6)的解如下

$$u_6=\frac{1}{2\beta}\left(4\alpha m^2k^2+4\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{6\alpha k^2}{\beta}ns^2\xi;$$
$$u_7=\frac{1}{2\beta}\left(4\alpha m^2k^2+\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{3\alpha k^2}{\beta}\left[ns^2\xi\pm ns\xi cs\xi\right];$$

$$u_8=\frac{1}{2\beta}\left(\alpha m^2k^2+4\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{3\alpha k^2}{\beta}\left[ns^2\xi\pm ns\xi ds\xi\right];$$

$$u_9=\frac{1}{2\beta}\left(\alpha m^2k^2+\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{3\alpha k^2}{\beta}\left[ns^2\xi\pm cs\xi ds\xi\right];$$

$$u_{10}=\frac{1}{2\beta}\left(\alpha m^2k^2+\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{3\alpha k^2}{\beta}\left[ns^2\xi\substack{-\\+\\-\\+}ns\xi cs\xi\substack{+\\+\\-\\-}ns\xi ds\xi\substack{-\\+\\+\\-}cs\xi ds\xi\right];$$

3.2.3. $sc\xi$、$nc\xi$ 和 $dc\xi$ 展开法

利用(3.3)，我们得到 Boussinesq 方程(6)的解如下

$$u_{11}=\frac{1}{2\beta}\left(4\alpha m^2k^2-8\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{6\alpha k^2\left(1-m^2\right)}{\beta}sc^2\xi;$$

$$u_{12}=\frac{1}{2\beta}\left(\alpha m^2k^2-5\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{3\alpha k^2\sqrt{1-m^2}}{\beta}\left[\sqrt{1-m^2}sc^2\xi\pm\sqrt{1-m^2}sc\xi nc\xi\right];$$

$$u_{13}=\frac{1}{2\beta}\left(4\alpha m^2k^2-5\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{3\alpha k^2\sqrt{1-m^2}}{\beta}\left[\sqrt{1-m^2}sc^2\xi\pm sc\xi dc\xi\right];$$

$$u_{14}=\frac{1}{2\beta}\left(\alpha m^2k^2-2\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{3\alpha k^2\sqrt{1-m^2}}{\beta}\left[\sqrt{1-m^2}sc^2\xi\pm nc\xi dc\xi\right];$$

$$u_{15}=\frac{1}{2\beta}\left(\alpha m^2k^2-2\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)-\frac{3\alpha k^2\sqrt{1-m^2}}{\beta}\left[\sqrt{1-m^2}sc^2\xi\substack{+\\-\\+\\-}\sqrt{1-m^2}sc\xi nc\xi\substack{-\\-\\+\\+}sc\xi dc\xi\substack{-\\+\\+\\-}nc\xi dc\xi\right];$$

3.2.4. $sd\xi$、$cd\xi$ 和 $nd\xi$ 展开法

利用(3.4)，我们得到 Boussinesq 方程(6)的解如下

$$u_{16}=\frac{1}{2\beta}\left(-8\alpha m^2k^2+4\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)+\frac{6\alpha m^2k^2\left(1-m^2\right)}{\beta}sd^2\xi;$$

$$u_{17}=\frac{1}{2\beta}\left(-5\alpha m^2k^2+4\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)+\frac{3\alpha mk^2\sqrt{1-m^2}}{\beta}\left[m\sqrt{1-m^2}sd^2\xi\pm mIsd\xi cd\xi\right];$$

$$u_{18}=\frac{1}{2\beta}\left(-5\alpha m^2k^2+\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)+\frac{3\alpha mk^2\sqrt{1-m^2}}{\beta}\left[m\sqrt{1-m^2}sd^2\xi\pm\sqrt{1-m^2}sd\xi nd\xi\right];$$

$$u_{19}=\frac{1}{2\beta}\left(-2\alpha m^2k^2+\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)+\frac{3\alpha mk^2\sqrt{1-m^2}}{\beta}\left[m\sqrt{1-m^2}sd^2\xi\pm Icd\xi nd\xi\right];$$

$$u_{20}=\frac{1}{2\beta}\left(-2\alpha m^2k^2+\alpha k^2+\lambda^2-\gamma^2\right)+\frac{3\alpha mk^2\sqrt{1-m^2}}{\beta}\left[m\sqrt{1-m^2}sd^2\xi\substack{-\\+\\+\\-}mIsd\xi cd\xi\substack{-\\-\\+\\+}\sqrt{1-m^2}sd\xi nd\xi\substack{+\\-\\+\\-}Icd\xi nd\xi\right];$$

4. 解的结构

为了更好地了解 Jacobi 椭圆函数解的结构，利用 *Maple*，我们画出了 KdV 方程(4)的解 u_4 的立体图(见图 1)和 $t=0$ 的截面图(见图 2)和解 u_{10} 的立体图(见图 3)和 $t=0$ 的截面图(见图 4)，其中参数均取值为

$\beta = 2$，$k = 1$，$\lambda = 2$，$m = \dfrac{1}{2}$，网格取值 150 * 150。从中我们可以直观地看到 Jacobi 椭圆函数解具有两种宏观结构：光滑型(分母永不为零)和奇异型(分母在某一时刻为零)。

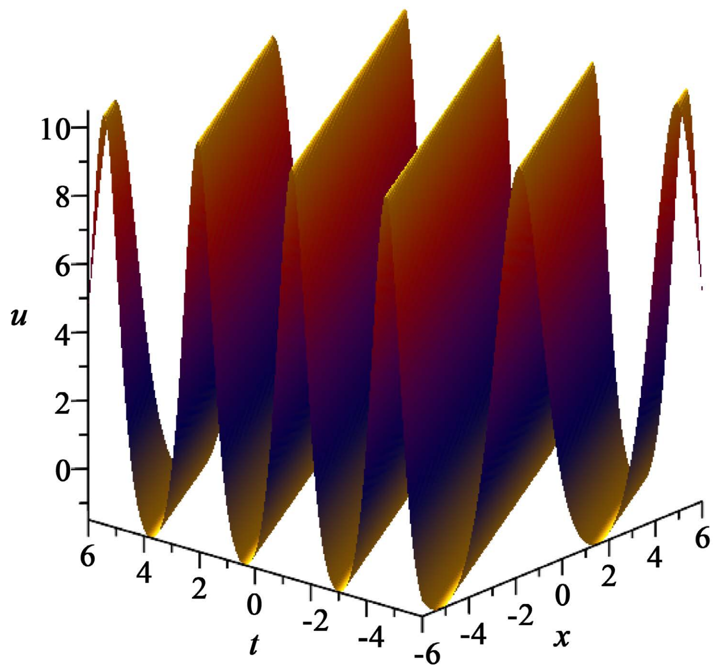

Figure 1. Plot of the solution u_4

图 1. 解 u_4 立体图

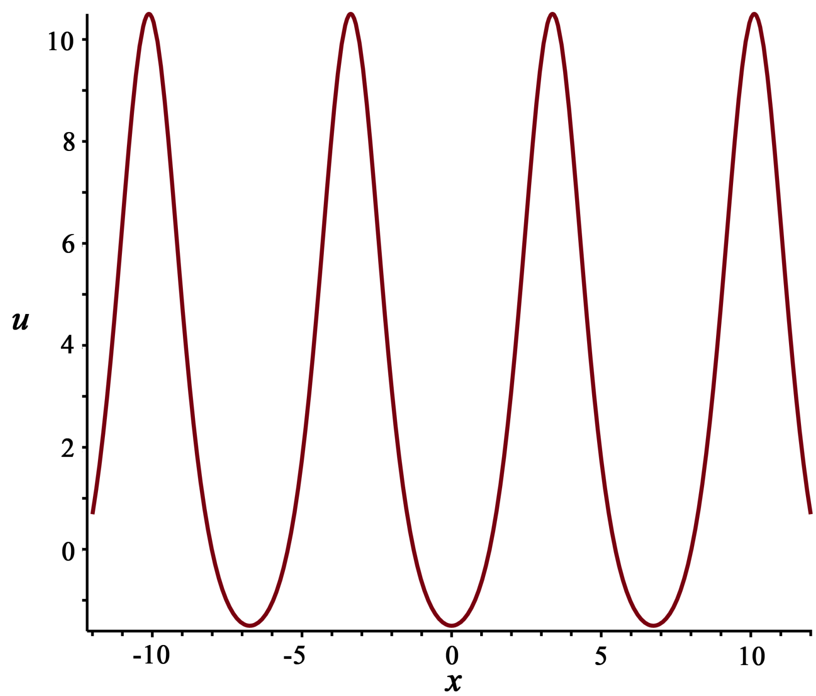

Figure 2. The structure of the solution u_4 at time $t = 0$

图 2. 解 u_4 在 $t = 0$ 截面图

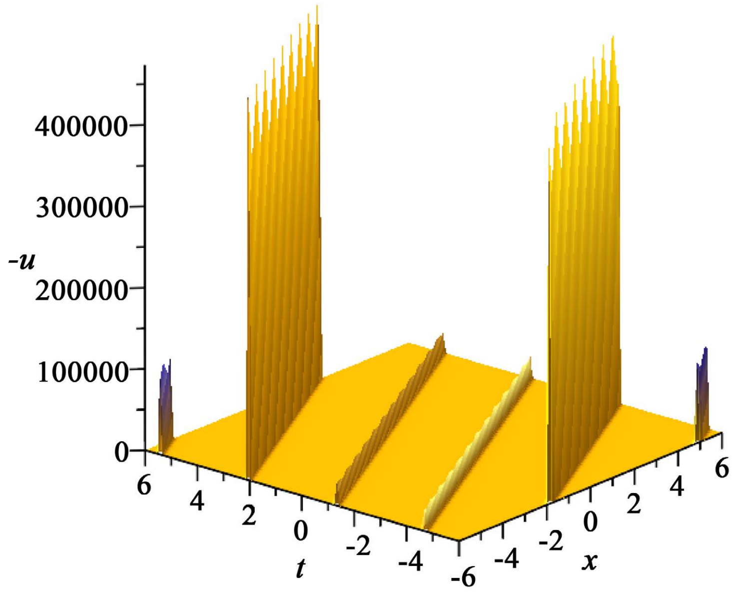

Figure 3. Plot of the solution u_{10}

图 3. 解 u_{10} 立体图

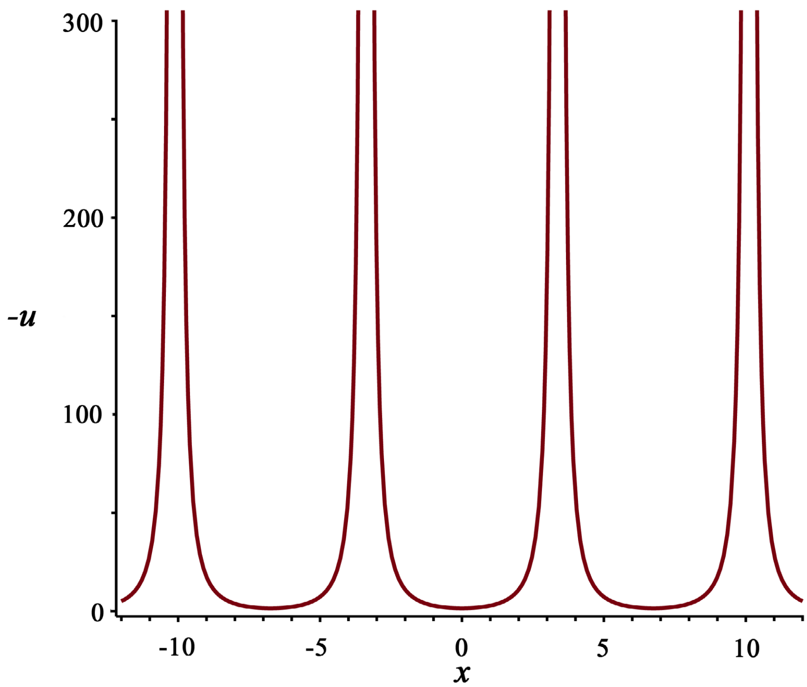

Figure 4. The structure of the solution u_{10} at time $t=0$

图 4. 解 u_{10} 在 $t=0$ 截面图

5. 结论

本文，我们利用广义的 Jacobi 椭圆函数展开法得到了非线性演化方程的许多新类型 Jacobi 椭圆函数解。当 $m=0$ 或 $m=1$ 时，其中一些解退化为孤立波解和三角函数解。为了简化，我们在论文中省略了它们。这种方法也可以应用于其他非线性演化方程。

参考文献

[1] Wang, M. (1995) Solitary Wave Solutions for Variant Boussinesq Equations. *Physics Letters A*, **199**, 169-172. https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00092-h

[2] Yan, C. (1996) A Simple Transformation for Nonlinear Waves. *Physics Letters A*, **224**, 77-84. https://doi.org/10.1016/s0375-9601(96)00770-0

[3] Liu, S., Fu, Z., Liu, S. and Zhao, Q. (2001) Jacobi Elliptic Function Expansion Method and Periodic Wave Solutions of Nonlinear Wave Equations. *Physics Letters A*, **289**, 69-74. https://doi.org/10.1016/s0375-9601(01)00580-1

[4] Fu, Z., Liu, S., Liu, S. and Zhao, Q. (2001) New Jacobi Elliptic Function Expansion and New Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations. *Physics Letters A*, **290**, 72-76. https://doi.org/10.1016/s0375-9601(01)00644-2

[5] Shen, S. and Pan, Z. (2003) A Note on the Jacobi Elliptic Function Expansion Method. *Physics Letters A*, **308**, 143-148. https://doi.org/10.1016/s0375-9601(02)01802-9

[6] Yan, Z. (2002) Extended Jacobian Elliptic Function Algorithm with Symbolic Computation to Construct New Doubly-Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations. *Computer Physics Communications*, **148**, 30-42. https://doi.org/10.1016/s0010-4655(02)00465-4

[7] Lawden, D.F. (1989) Elliptic Functions and Applications. Springer-Verlag.

[8] 吴文俊. 关于代数方程组的零点——Ritt 原理的一个应用[J]. 科学通报, 1985, 30(12): 881-883.