Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(1), 6-11**
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.141002

Hans汉斯

基于微积分和线性代数基础的三维空间Stokes定理教学方法研究

闫一博，刘前芳*，马梦萍，樊兴晶

中国石油大学(北京)克拉玛依校区文理学院，新疆 克拉玛依

收稿日期：2024年12月7日；录用日期：2025年1月1日；发布日期：2025年1月8日

摘 要

本文提出一种基于微积分和线性代数基础的三维空间Stokes定理的处理方法，兼顾理论严谨性与实用性的同时融入课程思政。从矛盾论与辩证法出发，采用初等方法解释微分形式，进而揭示外微分与积分的统一性，为高等数学的教学与研究提供新思路。

关键词

Stokes定理，微分形式，外微分运算

Research on Teaching Methods of the Three-Dimensional Stokes' Theorem Based on Fundamentals of Calculus and Linear Algebra

Yibo Yan, Qianfang Liu*, Mengping Ma, Xingjing Fan

Faculty of Science and Arts, China University of Petroleum-Beijing at Karamay, Karamay Xinjiang

Received: Dec. 7th, 2024; accepted: Jan. 1st, 2025; published: Jan. 8th, 2025

Abstract

This paper proposes a method for the treatment of the three-dimensional Stokes' theorem based on the fundamentals of calculus and linear algebra, taking into account the theoretical rigor and

*通讯作者。

文章引用: 闫一博, 刘前芳, 马梦萍, 樊兴晶. 基于微积分和线性代数基础的三维空间 Stokes 定理教学方法研究[J]. 应用数学进展, 2025, 14(1): 6-11. DOI: 10.12677/aam.2025.141002

practicality while integrating into the course politics. Starting from the theory of contradiction and dialectics, the elementary method is used to explain the differential forms, which reveals the unity of exterior differentiation and integration, and provides new perspectives for the teaching and research of advanced mathematics.

Keywords

Stokes' Theorem, Differential Forms, Exterior Derivative Operation

1. 引言

恩格斯在《反杜林论》中指出，辩证法突破了形式逻辑的狭隘界限，蕴含着更广阔的世界观萌芽，这种思想在数学中也得到了体现，他认为，初等数学(常数的数学)，主要局限在形式逻辑的范畴。而变数的数学，特别是微积分，本质上是辩证法在数学中的运用。在《自然辩证法》中，恩格斯进一步阐述了这一观点：“数学发展的转折点是变数，有了变数，运动进入了数学，辩证法也随之进入数学，微分和积分因此成为必然，并由 Newton 和 Leibniz 大体完成，但并非由他们发明。”毛泽东在《矛盾论》中也指出：“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。因此，对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一门科学的对象。”

微积分是数学的基本分支，Bressoud [1]较为全面地阐述了微积分的发展历史。在微积分中，微分和积分构成一对矛盾，对这一矛盾的研究奠定了微积分这一学科的基础。矛盾的核心在于对立统一，虽然理解微分和积分的对立性相对容易，但将两者统一却并不简单。Newton-Leibniz 公式实现了单变量微积分的统一，但对于多变量微积分，尽管 Green 公式、Gauss 公式、Stokes 公式都在一定程度上反映了微分和积分的统一，但三个公式的联系在形式上很难看出。

Stokes 定理是《高等数学》积分学讲解中线面积分部分的重要定理，是数学中一条优美且深刻的定理，其内容在许多经典教材中均有详细阐述，例如同济大学编著的《高等数学》[2]第十一章、卓里奇编著的《数学分析(下册)》[3]的第十五章和迈克尔·斯皮瓦克编著的《流形上的微积分》[4]的第五章。而 Stokes 定理又称外微积分基本定理，近年来，尽管部分一流高校在数学分析课程中引入微分形式及流形上的 Stokes 公式相关内容，然而讲解透彻这部分内容需要大量学时，受限于课程安排，许多高校难以在课程中系统介绍这部分内容，尤其是在《高等数学》课程教学中。如何在有限的学时内以严谨的数学方法讲解外微积分基本定理仍然是一个值得深入探讨的课题。龚昇教授[5] [6]在微积分课程中系统地介绍了这部分内容。为进一步丰富此课题，深刻揭示微分和积分的对立统一关系，需要借助外微分形式这一工具，本文将从曲面的定向和微分的外乘积出发，逐步演绎外微分形式的来源，提供一种初等且适合应用在教学中的处理方法。

2. 曲面的定向

定义 1 (光滑曲面)

若平面区域 $D=\{(u,v)\}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射 $\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 满足

(1) x,y,z 对 u,v 有各阶连续偏导数；

(2) (x_u, y_u, z_u) 与 (x_v, y_v, z_v) 线性无关，则称 $\boldsymbol{r}$ 是一个光滑曲面。

考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲面，以球面为例，选取球面上一点，作该点切平面的单位法向量，若规定法向量指向球心为正，则当该点沿球面连续运动时，法向量的方向或始终为正或始终为负。由此可以明确地区分曲面的内侧和外侧，从而引出可定向曲面的概念。

定义 2 (向量场)

设 $S \subset \mathbb{R}^3$，称向量值函数 $\boldsymbol{F}: S \to \mathbb{R}^3$ 为 S 的一个向量场，若 $\boldsymbol{F}$ 对每个分量连续，则称为 S 的一个连续向量场。

定义 3 (可定向曲面)

设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为光滑曲面，若在 S 上存在连续的单位法向量场，则称S为可定向曲面。若指定 S 上的一个连续单位法向量场，则称指定了 S 的一个定向。

引入可定向曲面的概念后，自然会问：是否 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面都可定向？答案是否定的，例如 $\mathbb{R}^3$ 中的 Mobius 环即为不可定向曲面的典例。为叙述简便，以下仅考虑可定向曲面的情形。

3. 微分的外乘积

从向量积出发，设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，定义其向量积为一个新的向量 $\boldsymbol{c}$，记作 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 张成的平面，且 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 组成一个右手系，$\boldsymbol{c}$ 的长度为 $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，$|\boldsymbol{c}|$ 的数值等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形面积。

向量积具有如下性质：(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$；(2) $(k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2) \times \boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b} + k_2\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}$；(3) $\boldsymbol{a} \times (l_1\boldsymbol{b}_1 + l_2\boldsymbol{b}_2) = l_1\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_1 + l_2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_2$。由此可见，向量积的基本特质为反对称性和双线性，此外，根据性质(1)，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}$，还可得到 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$。下面我们说明微分的乘积也具有这些性质。

考虑二重积分的换元法，下述定理摘录自参考文献[1]。

定理 1 (二重积分换元法)

设 $f(x, y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 D 上连续，若变换 $T: x = x(u, v), y = y(u, v)$ 将 uOv 平面上的闭区域 D' 变为 xOy 平面上的 D，且满足

(1) $x(u, v), y(u, v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数；

(2) 在 D' 上 Jacobi 式

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0;$$

(3) 变换 $T: D' \to D$ 是一对一的，则有

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f\left[x(u, v), y(u, v)\right]\left|J(u, v)\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

在进行二重积分换元时，为保证面积元素恒正，对 Jacobi 行列式取绝对值。然而，若区域 D 是已经定向的曲面，则由面积元素可正可负，无需对 Jacobi 行列式取绝对值，于是有

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f\left[x(u, v), y(u, v)\right]J(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

若取定 D 为正方形区域，考虑变换 $T: x = y, y = x$，则 yOx 平面上的闭区域 D' 与 xOy 平面上的闭区域 D 相同，计算变换的 Jacobi 行列式，有

$$J(y, x) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(y, x)} = \begin{vmatrix} x_y & x_x \\ y_y & y_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

于是得到

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D -f(y,x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

若选取 $f(x,y)$ 是关于 x,y 对称的函数，例如 x^2+y^2，则有 $f(x,y)=f(y,x)$，于是

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D -f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

这里出现了一个负号，由于左右两端积分的被积函数与积分区域都相同，所以只能是 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\mathrm{d}y\mathrm{d}x$，这表明微分的乘积也具有反对称性。特别地，取 $y=x$，则由 $\mathrm{d}x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\mathrm{d}x$ 可知 $\mathrm{d}x\mathrm{d}x=0$，于是微分与自身的乘积为零。又由微分运算是线性运算，双线性也自然成立。因此微分的乘积事实上类似于向量的向量积，可定义为外乘积：

定义 4 (外乘积)

若二元运算 $\wedge$ 满足(1) 反对称性；(2) 结合律；(3) 分配律。则称 $\wedge$ 为一个外乘积。

于是向量的向量积对偶为微分的外乘积。

4. 微分形式与外微分运算

设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲面，其参数表示为 $\boldsymbol{r}(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)$，固定 u 或 v 时，可以得到曲面上的参数曲线，进而得到切向量 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$，于是曲面的切平面可以视作这两个切向量张成的平面，因而曲面的任一切向量 $\boldsymbol{t}$ 都可以表示为 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$ 的线性组合 $\boldsymbol{t}=a\boldsymbol{r}_u+b\boldsymbol{r}_v$，考虑作 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{t}$ 的内积，则有

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}=\begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{r}_v^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v\\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},$$

根据内积的对称性，上式可简记为

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=\begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}.$$

现在考虑 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的微分，根据链式法则有 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v$，类似上面的推导可以得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u & \mathrm{d}v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix},$$

不难发现，微分 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 实际上对应于 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$ 的系数，与常系数不同的是，若反将 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$ 视作 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 的“系数”，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 可视作 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 的线性组合，这就得到了与切平面对偶的概念，称为余切平面，余切平面的元素就是微分形式。于是切平面的向量对偶为余切平面的微分形式。

在 $\mathbb{R}^3$ 中，规定函数为零形式，微分为 1-形式，两个 1-形式的外乘积为 2-形式，由于外乘积满足结合律，3-形式既可视作三个 1-形式的外乘积，也可视作一个 1-形式与一个 2-形式的外乘积。由于 1-形式与自身的外乘积为零，故 $\mathbb{R}^3$ 中仅有这四种微分形式。微分形式与函数的组合称为外微分形式。

下面将微分运算对偶为外微分运算。为叙述方便，用 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的全体外微分形式，用 $\Lambda^k(\boldsymbol{x})$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的 k 次外微分形式，$k=0,1,2,3$。下面给出外微分运算的定义。

定义 5 (外微分运算)

设线性映射 $d:\Lambda(\boldsymbol{x})\to\Lambda(\boldsymbol{x})$，若 d 满足

(1) $d:\Lambda^k(\boldsymbol{x})\to\Lambda^{k+1}(\boldsymbol{x}),k=0,1,2,3$，特别地 $d\left(\Lambda^3(\boldsymbol{x})\right)=\{0\}$；

(2) $df=f_xdx+f_ydy+f_zdz$；

(3) $d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^{k_1}\omega_1 d\omega_2$，其中 $\omega_i\in\Lambda^{k_i}(\boldsymbol{x}),k_i=0,1,2,3,i=1,2$；

(4) $d^2=0$。

则称 d 为一个外微分运算。

下面证明 $\mathbb{R}^3$ 中存在外微分运算，设 $\omega\in\Lambda^k(\boldsymbol{x})$，且

$$\omega=\sum_{i_1,\cdots,i_k} f_{i_1,\cdots,i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},1\le i_1<\cdots<i_k\le 3,$$

其中 $f_{i1,\cdots,ik}$ 为充分光滑的函数，定义

$$d\omega=\sum_{i,i_1,\cdots,i_k}\frac{\partial f_{i_1,\cdots,i_k}}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},1\le i_1<\cdots<i_k\le 3,1\le i\le 3,$$

根据外乘积的定义，容易验证外微分运算的前三条成立，对于第四条，由于

$$d(d\omega)=\sum_{j,i,i_1,\cdots,i_k}\frac{\partial^2 f_{i_1,\cdots,i_k}}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i\wedge dx_{i1}\wedge\cdots\wedge dx_{ik},$$

交换 dx_i,dx_j 得到

$$d(d\omega)=-\sum_{j,i,i_1,\cdots,i_k}\frac{\partial^2 f_{i_1,\cdots,i_k}}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\wedge dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},$$

由于 $f_{i1,\cdots,ik}$ 充分光滑，故二阶偏导连续，于是有

$$d(d\omega)=-\sum_{j,i,i_1,\cdots,i_k}\frac{\partial^2 f_{i_1,\cdots,i_k}}{\partial x_j\partial x_i}dx_i\wedge dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},$$

交换 i,j 可得 $d(d\omega)=-d(d\omega)$，即 $d^2=0$。这就构造了 $\mathbb{R}^3$ 中的外微分运算。

5. 三维空间中的 Stokes 定理

回顾微积分中四大公式，以下定理摘录自同济大学编著的《高等数学(第八版)下册》。

定理 2 (Newton-Leibniz 公式)

若函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

定理 3 (Green 公式)

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，若函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线。

定理 4 (Gauss 公式)

设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，若函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$ 与 $R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧。

定理 5 (Stokes 公式)

设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则，若函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$ 与 $R(x,y,z)$ 在曲面 Σ （连同边界 Γ ）上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

上述四个定理都在描述函数在区域边界和区域内部积分的关系。

设 $f,P,Q,R,\varphi,\psi,\eta,H$ 是 x,y,z 的函数且具有连续偏导数，对零次外微分形式 f，有

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

对一次外微分形式 $\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 有 $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}z$，进一步计算得到

$$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

对二次外微分形式 $\omega=\varphi\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\psi\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\eta\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，有

$$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$

对三次外微分形式 $\omega=H\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$，有 $\mathrm{d}\omega=0$。于是在 $\mathbb{R}^3$ 中描述区域边界与区域内部积分关系的公式仅有这四个，且可用外微分形式统一地表示为

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega.$$

即外微分形式的外微分 $\mathrm{d}\omega$ 在区域上的积分等于外微分形式 ω 在区域边界上的积分，称为三维空间中的 Stokes 公式，由此深刻揭示了外微分和积分的对立统一。

基金项目

中国石油大学(北京)克拉玛依校区 2023 年教改项目《基于 OBE 教育理念的课程思政融入高等数学课程教学的探究》。

参考文献

[1] Bressoud, D.M. (2011) Historical Reflections on Teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus. *The American Mathematical Monthly*, **118**, 99-115. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099

[2] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.

[3] 卓里奇. 数学分析(下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[4] 迈克尔·斯皮瓦克. 流形上的微积分[M]. 北京: 世界图书出版社, 2022.

[5] 龚昇. 微积分五讲[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[6] 龚昇. 对微积分中主要矛盾的粗浅认识[J]. 高等数学研究, 1999, 2(1): 9-12.