

# 图的强均匀点荫度

刘永超\*, 张静洁

青海师范大学数学与统计学院, 青海 西宁

收稿日期: 2024年12月9日; 录用日期: 2025年1月2日; 发布日期: 2025年1月13日

## 摘要

图 $G$ 的均匀 $k$ -划分是将图 $G$ 的顶点划分, 使得每个划分类导出的子图是一个森林且任意两个划分类中的顶点数最多相差1。图 $G$ 的强均匀点荫度是最小整数 $k$ , 使得对任意的 $k' \geq k$ , 图 $G$ 都有一个均匀 $k'$ -划分。本文证明每个无割点的外平面图 $G$ , 它的强均匀点荫度至多为2, 继而证明了无割点的外平面图满足猜想: 对任何平面图 $G$ , 强均匀点荫度至多是3。同时, 得到平方图的强均匀点荫度的下界为 $\left\lceil \frac{\Delta+1}{2} \right\rceil$ , 证明圈 $C_n$ 的平方图在 $n=5$ 时, 强均匀点荫度为3, 当 $n \neq 5$ 时, 强均匀点荫度为2, 从而证明圈的平方图满足强均匀点荫的猜想。

## 关键词

外平面图, 圈, 平方图, 强均匀点荫度

# Strong Equitable Vertex Arboricity of Graphs

Yongchao Liu\*, Jingjie Zhang

College of Mathematics and Statistics, Qinghai Normal University, Xining Qinghai

Received: Dec. 9<sup>th</sup>, 2024; accepted: Jan. 2<sup>nd</sup>, 2025; published: Jan. 13<sup>th</sup>, 2025

## Abstract

An equitable  $k$ -partition of a graph  $G$  is a partition of the vertex set of  $G$  such that the subgraph induced by each partition class is a forest and the sizes of any two parts differ by at most one. The strong equitable vertex arboricity of  $G$  is the minimum integer  $k$  so that  $G$  has an equitably  $k'$ -partitioned for an  $k' \geq k$ . This paper proves that the strong equitable vertex arboricity of each outerplanar has no cut-vertices  $G$  is at most 2, and then proves that the outerplanar satisfies the conjecture that for any plan  $G$ , the strong equitable vertex arboricity is at most 3. Meanwhile, the lower bound of the

\*通讯作者。

strong equitable vertex arboricity of the square graph is  $\left\lceil \frac{\Delta+1}{2} \right\rceil$ , which proved that the square graph of the circuits  $C_n$  is 3 when  $n = 5$ , and the strong equitable vertex arboricity is 2 when  $n \neq 5$ , so that the square graph of the circuits satisfies the conjecture of strong equitable vertex arboricity.

## Keywords

Outerplanar Graph, Circuits, Square Graph, Strong Equitable Vertex Arboricity

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

本文所涉及的图都是简单、有限的无向图, 使用  $V(G), E(G)$  分别表示图  $G$  的顶点集和边集。其它未标明的记号都来自[1]。对任意的点  $v \in V(G)$ ,  $d_G(v)$  表示图  $G$  中点  $v$  的度, 即图  $G$  中与点  $v$  相关联的边数。如果  $d_G(v) = k$ , 那么就称点  $v$  是一个  $k$  度点。 $k$ -度点是指度为  $k$  的点, 1-度点也被称为叶子。 $N_G(v)$  表示图  $G$  中与点  $v$  的相邻的顶点集合,  $N_G(v)$  中的每个点都称为  $v$  的邻点。对于图  $G$  中任意两点  $u, v$ , 它们之间的距离为连接这两个点的最短路的长度, 用  $d_G(u, v)$  表示。

图  $G$  的均匀  $k$ -划分是将图  $G$  的顶点划分为  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , 使得每个划分类导出的子图是一个森林, 且任意两个划分类中的顶点数最多相差一个。图  $G$  具有均匀  $k$ -划分的最小整数  $k$  称为图  $G$  的均匀点荫度, 用符号  $a_{eq}(G)$  表示。图  $G$  的强均匀点荫度是最小整数  $k$ , 使得对任意的  $k' \geq k$ , 图  $G$  都有一个均匀  $k'$ -划分, 用符号  $a_{eq}^*(G)$  表示。显然, 对任意的图  $G$ , 都有  $a_{eq}(G) \leq a_{eq}^*(G)$ , 而且  $a_{eq}(G)$  与  $a_{eq}^*(G)$  的差值可以很大。例如[2], 完全二部图  $K_{n,n}$ ,  $a_{eq}(K_{n,n}) = 2$ , 当是  $t$  奇数,  $2n = t(t+3)$  时,  $a_{eq}^*(K_{n,n}) = 2 \left\lceil \frac{\sqrt{8n+9}-1}{4} \right\rceil$ 。

图的均匀点荫度是吴建良、张欣[2]等人基于 Fan 和 Kierstead [3]等人对放松均匀染色的基础上提出的, 吴建良和张欣等人证明了每个围长至少是 5 的平面图强均匀点荫度最多是 3, 每个围长至少是 6 的平面图和外平面图的强均匀点荫度最多是 2。同时他们还提出了两个猜想。

**猜想 1** 对任何一个图  $G$ ,  $a_{eq}^*(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$ 。

**猜想 2** 对每个平面图  $G$ , 存在一个常数  $c$ , 使得  $a_{eq}^*(G) \leq c$ 。

猜想 1 (强均匀点荫度猜想)已经被证明对每个  $\Delta(G) \geq \frac{|G|}{2}$  的图[4], 亚立方体图[5], 5-退化图[6],  $\Delta(G) \geq 9.818d$  的  $d$ -退化图[7]成立。由于每个平面图都是 5-退化图, 所以陈冠涛[6]等人证明了对于每个平面图猜想 1 都成立。Esperet 和 Lemoine [8]证明了如果一个图  $G$  有无圈  $k$ -染色,  $k \geq 2$ , 则  $G$  能被均匀划分为  $k-1$  个导出森林。由于任意一个平面图有无圈 5-染色[9], 所以他们证明了对每个平面图  $a_{eq}^* \leq 4$ 。即猜想 1 被 Esperet 和 Lemoine 彻底解决了。Chartrand 和 Kronk [10]证明每个平面图的点荫度至多为 3, 所以张欣等人[11]提出:

**猜想 3** 每个平面图  $G$ ,  $a_{eq}^*(G) \leq 3$ 。

2015 年, 张欣[12]证明了对任意两个圈长至多是 4 的点不交的平面图以及围长至少是 4 且没有两个

相邻 4-圈的平面图的强均匀点荫度至多是 3。随后刘维婵和张欣[11]证明了外 1-平面图的强均匀点荫度至多是 3。

下面我们给出外平面图和平方图的相关定义及其性质。

对一个图, 如果它的某个面包含某个点, 则称这个面与这个点相关联。对一个图, 它的所有顶点都与同一个面相关联, 则这个图称为外平面图。用符号  $f = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  表示外平面图的面, 其中  $u_1, u_2, \dots, u_n$  是  $f$  的以循环次序被遍历一次的所有顶点。图  $G$  的平方图  $G^2$  是以  $V(G)$  为顶点集, 任意两点  $u, v$  在图  $G^2$  中相邻当且仅当  $1 \leq d_G(u, v) \leq 2$ 。

1996 年, 吴建良[13]证明了无割点的外平面图。

**引理 1 [13].** 设  $G$  是一个无割点的外平面图, 且  $|V(G)| \geq 3$ , 则至少有下列情况之一:

- (1) 存在两个相邻的 2-度点  $u, v$ ;
- (2) 存在一个 2-度点  $u$  和一个 3-度点  $v$  相邻,  $N_G(u) = \{v, w\}$ , 并使得  $vw \in E(G)$ ;
- (3) 存在一个 2-度点  $u$  相邻于两个 4-度点  $v$  和  $w$ , 使得  $vw \in E(G)$ ;
- (4) 存在两个不相邻的 2-度点  $u$  和  $v$  共邻于一个 4-度点  $w$ ,  $N_G(w) = \{u, v, x, y\}$ , 且使得  $ux, vy, xy \in E(G)$ 。

## 2. 主要定理

**定理 1.** 如果图  $G$  是一个无割点的连通的外平面图, 那么  $a_{eq}^*(G) \leq 2$ 。

**定理 2.** 图  $G$  是一个简单图, 设它的最大度为  $\Delta$ , 则  $a_{eq}^*(G^2) \geq \left\lceil \frac{\Delta+1}{2} \right\rceil$ 。

**定理 3.** 圈  $C_n (n \geq 3)$  的平方图的强均匀点荫度

$$a_{eq}^*(C_n^2) = \begin{cases} 3 & n = 5; \\ 2 & \text{其它} \end{cases}$$

## 3. 定理 1 的证明

**证明.** 当  $V(G)=1$  时, 图  $G$  是由一个孤立点  $v$  构成的图, 则  $a_{eq}^*(G)=1$ 。

当  $V(G)=2$  时, 图  $G$  是由一条边  $e=uv$  构成, 则  $a_{eq}^*(G)=1$ 。

当  $V(G) \geq 3$  时, 假设  $a_{eq}^*(G) \geq 3$ , 且  $|E(G)| + |V(G)|$  尽可能小。

由引理 1, 当  $G$  中存在两个相邻的 2-度点  $u, v$  时, 由  $G$  的极小性知,  $V(G) - \{u, v\}$  能被均匀 2-划分为  $V_1, V_2$ 。因为  $|V_i \cap N_G(u)| \leq 1, |V_i \cap N_G(v)| \leq 1, i \in \{1, 2\}$ , 所以将  $u$  移到  $V_1$  中,  $v$  移到  $V_2$  中, 则图  $G$  中存在 2-划分  $V'_1 = V_1 \cup u, V'_2 = V_2 \cup v, G[V'_i]$  是森林。因为  $\|V_1\| - \|V_2\| \leq 1$ , 所以  $\|V'_1\| - \|V'_2\| \leq 1$ 。由强均匀点荫度的定义知,  $a_{eq}^*(G) \leq 2$ , 与  $a_{eq}^*(G) \geq 3$  矛盾, 所以假设不成立。

当  $G$  中有情况(2)时, 则图  $G$  中存在两点  $u, v, d_G(u)=2, d_G(v)=3$ 。由  $G$  的极小性知,  $V(G) - \{u, v\}$  能被均匀 2-划分为  $V_1, V_2$ 。因  $d_G(v)=3$ , 所以  $V(G) - \{u, v\}$  中存在一个划分类  $V_i, i \in \{1, 2\}$ , 使得  $|V_i \cap N_G(v)| = 1$  或  $|V_i \cap N_G(v)| = 2$ , 不妨设  $V_i = V_1$ 。将  $u$  移到  $V_1$  中,  $v$  移到  $V_2$  中, 则图  $G$  中存在 2-划分  $V'_1 = V_1 \cup u, V'_2 = V_2 \cup v$ 。因为  $\|V_1\| - \|V_2\| \leq 1$ , 所以  $\|V'_1\| - \|V'_2\| \leq 1$ 。又因为  $|V_1 \cap N_G(u)| \leq 1, |V_2 \cap N_G(v)| \leq 1$ , 所以  $G[V'_i]$  是森林,  $i \in \{1, 2\}$ 。由强均匀点荫度的定义知,  $a_{eq}^*(G) \leq 2$ , 与  $a_{eq}^*(G) \geq 3$  矛盾, 所以假设不成立。

当  $G$  中有情况(3)或(4)时, 则图  $G$  中存在两点  $u, w, d_G(u)=2, d_G(w)=4$ 。由  $G$  的极小性知,  $V(G) - \{u, w\}$  能被均匀 2-划分为  $V_1, V_2$ 。因为  $d_G(w)=4$ , 所以  $V(G) - \{u, w\}$  中存在一个划分类  $V_i, i \in \{1, 2\}$ , 使得  $|V_i \cap N_G(w)| = 2$  或  $|V_i \cap N_G(w)| = 3$ , 不妨设  $V_i = V_1$ 。将  $u$  移到  $V_1$  中,  $w$  移到  $V_2$  中, 则图  $G$  中存在 2-划分  $V'_1 = V_1 \cup u, V'_2 = V_2 \cup w$ 。因为  $\|V_1\| - \|V_2\| \leq 1$ , 所以  $\|V'_1\| - \|V'_2\| \leq 1$ 。又因为  $|V_1 \cap N_G(u)| \leq 1,$

$|V_2 \cap N_G(w)| \leq 1$ , 所以  $G[V_i]$  是森林,  $i \in \{1, 2\}$ 。由强均匀点荫度的定义知,  $a_{eq}^*(G) \leq 2$ , 与  $a_{eq}^*(G) \geq 3$  矛盾, 所以假设不成立。

综上所述, 当图  $G$  是一个无割点的外平面图时, 则  $a_{eq}^*(G) \leq 2$ 。□

#### 4. 定理 2 和定理 3 的证明

**证明定理 2.** 设  $v \in V(G)$ ,  $d_G(v) = \Delta$ 。由平方图的定义知, 在  $G^2$  中点  $v$  及其与  $v$  相邻的点构成一个完全图  $K_{\Delta+1}$ 。因为完全图中任意三点构成一个三圈, 所以  $K_{\Delta+1}$  在每个划分类中的顶点数至多为 2。所以  $a_{eq}^*(K_{\Delta+1}) = \left\lceil \frac{\Delta+1}{2} \right\rceil$ 。因为  $K_{\Delta+1}$  是  $G^2$  子图, 所以  $a_{eq}^*(G^2) \geq a_{eq}^*(K_{\Delta+1})$ , 即  $a_{eq}^*(G^2) \geq \left\lceil \frac{\Delta+1}{2} \right\rceil$ 。

**证明定理 3.** 当  $n=3$  时,  $C_3^2 = K_3$ , 则  $a_{eq}^*(C_3^2) = 2$ 。

当  $n=4$  时,  $C_4^2 = K_4$ , 则  $a_{eq}^*(C_4^2) = 2$ 。

当  $n=5$  时,  $C_5^2 = K_5$ , 则  $a_{eq}^*(C_5^2) = 3$ 。

当  $n \geq 6$  时, 设  $V(C) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $G = C_n^2$ 。用正整数  $\{1, 2, \dots, k\}$  表示颜色, 设  $f$  一个从  $V(C)$  到  $\{1, 2, \dots, k\}$  映射,  $V_i = \{v \mid f(v) = i\}$ ,  $1 \leq i \leq k$ 。

若  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , 那么选定以  $x_1$  为起点进行下列染色:  $f(x_1) = f(x_2) = 1$ ,  $f(x_3) = f(x_4) = 2$ ,  $f(x_5) = f(x_6) = 1$ ,  $f(x_7) = f(x_8) = 2$ ,  $\dots$ ,  $f(x_{n-3}) = f(x_{n-2}) = 1$ ,  $f(x_{n-1}) = f(x_n) = 2$ 。如此染色之后, 得到  $|V_1| = |V_2| = n/2$ ,  $V_1, V_2$  中都是  $d_{C_n}(x_a, x_b) = 1$  的两点构成的边,  $a \neq b$ ,  $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 且这些边在  $V_i$  中都是相互独立的, 所以  $G[V_i]$  是森林,  $i \in \{1, 2\}$ , 则  $G$  有均匀 2-划分。

若  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , 那么选定以  $x_1$  为起点进行下列染色:  $f(x_1) = f(x_2) = 1$ ,  $f(x_3) = f(x_4) = 2$ ,  $f(x_5) = f(x_6) = 1$ ,  $f(x_7) = f(x_8) = 2$ ,  $\dots$ ,  $f(x_{n-4}) = f(x_{n-3}) = 1$ ,  $f(x_{n-2}) = 2$ ,  $f(x_{n-1}) = 1$ ,  $f(x_n) = 2$ 。如此染色之后, 得到  $|V_1| = \frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n-1}{2}$ ,  $|V_2| = \frac{n-3}{2} + 2 = \frac{n+1}{2}$ ,  $V_1, V_2$  中的边都是相互独立, 所以  $\|V_1\| - \|V_2\| = 1$ ,  $G[V_i]$  是森林,  $i \in \{1, 2\}$ , 则  $G$  有均匀 2-划分。

若  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , 那么选定以  $x_1$  为起点进行下列染色:  $f(x_1) = f(x_2) = 1$ ,  $f(x_3) = f(x_4) = 2$ ,  $f(x_5) = f(x_6) = 1$ ,  $f(x_7) = f(x_8) = 2$ ,  $\dots$ ,  $f(x_{n-3}) = f(x_{n-2}) = 2$ ,  $f(x_{n-1}) = 1$ ,  $f(x_n) = 2$ 。得到  $|V_1| = |V_2| = \frac{n}{2}$ ,  $G[V_i]$  是森林,  $i \in \{1, 2\}$ , 则  $G$  有均匀 2-划分。

若  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , 那么选定以  $x_1$  为起点进行下列染色:  $f(x_1) = f(x_2) = 1$ ,  $f(x_3) = f(x_4) = 2$ ,  $f(x_5) = f(x_6) = 1$ ,  $f(x_7) = f(x_8) = 2$ ,  $\dots$ ,  $f(x_{n-2}) = f(x_{n-1}) = 1$ ,  $f(x_n) = 2$ 。得到  $|V_1| = \frac{n-3}{2} + 2 = \frac{n+1}{2}$ ,  $|V_2| = \frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n-1}{2}$ ,  $V_1, V_2$  中的边都是相互独立, 所以  $\|V_1\| - \|V_2\| = 1$ ,  $G[V_i]$  是森林, 则  $G$  有均匀 2-划分。

因为  $G = C_n^2$ , 所以  $G$  中没有均匀 1-划分。对任意大于 2 的整数  $k$ , 以  $x_1$  为起点依次用颜色  $\{1, 2, \dots, k\}$  进行染色, 得到每个类中都是孤立点或孤立点和一条边, 所以  $G[V_i]$  是森林,  $|V_i| = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$  或  $|V_i| = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 即  $\|V_i\| - \|V_j\| \leq 1$ 。综上, 对任意大于 2 的整数  $k$ ,  $G$  都有一个均匀  $k$ -划分。

综上所述, 当  $n \geq 6$  时, 圈  $C_n$  ( $n \geq 3$ ) 的平方图的强均匀点荫度  $a_{eq}^*(C_n^2) = 2$ 。□

#### 5. 结语

均匀点荫度虽然是 2013 年提出来的, 但是人们对它的研究才刚刚开始, 而且猜想 1, 即均匀点荫度猜想还没有被完全证明, 猜想 3 也只是证明了对一些特殊图结论成立。我们对无割点的外平面图和圈的平方图的强均匀点荫度进行讨论, 丰富了此领域在外平面图和平方图上的研究成果。

## 参考文献

- [1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory. Springer.
- [2] Wu, J.L., Zhang, X. and Li, H.L. (2013) Equitable Vertex Arboricity of Graphs. *Discrete Mathematics*, **313**, 2696-2701. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2013.08.006>
- [3] Fan, H., Kierstead, H.A., Liu, G., Molla, T., Wu, J. and Zhang, X. (2011) A Note on Relaxed Equitable Coloring of Graphs. *Information Processing Letters*, **111**, 1062-1066. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2011.08.001>
- [4] Zhang, X. and Wu, J. (2014) A Conjecture on Equitable Vertex Arboricity of Graphs. *Filomat*, **28**, 217-219. <https://doi.org/10.2298/fil1401217z>
- [5] Zhang, X. (2016) Equitable Vertex Arboricity of Subcubic Graphs. *Discrete Mathematics*, **339**, 1724-1726. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.02.003>
- [6] Chen, G., Gao, Y., Shan, S., Wang, G. and Wu, J. (2016) Equitable Vertex Arboricity of 5-Degenerate Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **34**, 426-432. <https://doi.org/10.1007/s10878-016-9997-8>
- [7] Zhang, X., Niu, B., Li, Y. and Li, B. (2021) Equitable Vertex Arboricity Conjecture Holds for Graphs with Low Degeneracy. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **37**, 1293-1302. <https://doi.org/10.1007/s10114-021-0663-4>
- [8] Esperet, L., Lemoine, L. and Maffray, F. (2015) Equitable Partition of Graphs into Induced Forests. *Discrete Mathematics*, **338**, 1481-1483. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2015.03.019>
- [9] Borodin, O.V. (1979) On Acyclic Colorings of Planar Graphs. *Discrete Mathematics*, **25**, 211-236. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(79\)90077-3](https://doi.org/10.1016/0012-365x(79)90077-3)
- [10] Chartrand, G. and Kronk, H.V. (1969) The Point-Arboricity of Planar Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **1**, 612-616. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-44.1.612>
- [11] 刘维婵, 张欣. 外 1-平面图均匀点荫度[J]. 计算机工程与应用, 2018, 54(10): 51-53+80.
- [12] Zhang, X. (2015) Equitable Vertex Arboricity of Planar Graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **19**, 123-131. <https://doi.org/10.11650/tjm.19.2015.4422>
- [13] 吴建良. 外平面图的完备染色[J]. 山东矿业学院学报, 1996(2): 219-222.