

具有Michaelis-Menten型离散捕食者 - 猎物模型的分岔分析

王秀叶, 李自尊, 姚庆娟

南宁师范大学数学与统计学院, 广西 南宁

收稿日期: 2024年12月26日; 录用日期: 2025年1月18日; 发布日期: 2025年1月29日

摘要

本文研究了捕食者具有Michaelis-Menten型离散捕食者 - 猎物模型的动力学问题。为了探索模型的丰富动力学性质, 采用欧拉近似得到离散时间的Leslie-Gower模型。给出了内部不动点的存在性及其局部渐近稳定性。在此基础上, 利用分岔理论和中心流形定理, 研究了倍周期分岔和Neimark-Sacker分岔。并取临界参数进行数值模拟, 验证了倍周期分岔和Neimark-Sacker分岔的存在性。

关键词

Michaelis-Menten型, 离散时间, 倍周期分岔, Neimark-Sacker分岔

Bifurcation Analysis of Discrete Predator-Prey Model with Michaelis-Menten Type

Xiuye Wang, Zizun Li, Qingjuan Yao

College of Mathematics and Statistics, Nanning Normal University, Nanning Guangxi

Received: Dec. 26th, 2024; accepted: Jan. 18th, 2025; published: Jan. 29th, 2025

Abstract

In this paper, we investigate the dynamics of predator with Michaelis-Menten discrete predator-prey model. In order to explore the rich dynamic properties of the model, the discrete-time Leslie-Gower model is obtained by using Euler approximation. The existence of internal fixed points and their local asymptotic stability are given. On this basis, using bifurcation theory and central manifold theorem, the period-doubling bifurcation and Neimark-Sacker bifurcation are studied. The existence of period-doubling bifurcation and Neimark-Sacker bifurcation is verified by numerical simulation with critical parameters.

Keywords

Michaelis-Menten Type, Discrete Time, Period-Doubling Bifurcation, Neimark-Sacker Bifurcation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

捕食者 - 猎物模型是生态学中的经典模型之一, 用于描述捕食者和猎物之间的相互作用关系。在生物数学领域, 离散时间模型常常被用于研究非重叠世代的种群, 如一年生植物或昆虫种群, 每年只有一代。种群的大小可以受到物种之间各种相互作用的影响, 包括掠食性、合作性和共栖性等相互作用。两个具有相互作用的物种的复杂问题可通过建立离散系统来研究[1]。

研究发现, 具有非重叠代特征的种群类型, 离散时间模型比连续模型更具描述性和适用性[2]。Elabbasy [3]表明, 与连续时间系统相比, 离散时间系统表现出更丰富、更复杂的动力学。Ajaz 和 Saeed [4]研究了一种改进的 Leslie-Gower 捕食者 - 捕食者模型的动态行为。为了探索模型的丰富动力学性质, 采用欧拉近似得到离散时间修正的 Leslie-Gower 模型。研究了正稳态下倍周期分岔和 Neimark-Sacker 分岔的存在性和稳定性。此外, Tassaddiq 和 Shabbir [5]采用分段常数参数法研究了具有 Holling-III 型功能响应的离散时间 Leslie-Gower 捕食者 - 猎物模型, 进行了稳定性、分岔和混沌分析, 确保了离散时间模型的丰富动力学。

1979 年, Clark [6]首先提出捕获项的 Michaelis-Menten 型函数 $H(x, E) = \frac{qEx}{cE + lx}$, 其中 q 表示捕获能力系数, E 表示捕获单个捕食者需要付出的努力, 其中 c 和 l 是合适的常数。一种描述捕获速率的非线性函数, 考虑了捕食者的饱和效应, 即当猎物数量增加到一定程度时, 捕食者的捕获速率将不再增加。将 Michaelis-Menten 型捕获函数引入捕食者 - 猎物模型, 可以更准确地描述捕食者和猎物之间的相互作用关系, 探究更丰富的动力学行为。

Hu 和 Cao [7]研究了捕食者具有 Michaelis-Menten 型捕获的 Leslie-Gower 捕食者 - 猎物系统的动力学问题。通过变换, 将 Michaelis-Menten 型捕获项变成只有两个参数的非线性捕获项, 并讨论了该模型的不同分支。所考虑的捕食者具有 Michaelis-Menten 型函数形式的捕获率的连续系统如下所示

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy, \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y \left(1 - \frac{y}{bx}\right) - \frac{qEy}{cE + ly}. \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示时刻 t 的猎物密度和捕食者密度; r_1 和 K 分别表示无捕食者时猎物的内在生长率和环境承载能力; a 表示单位时间内捕食者捕获猎物的效率系数; r_2 为捕食者的内在生长率; bx 表示捕食者依赖猎物的承载能力, b 表示捕食者的承载能力系数; 其中 q 表示可捕获能力系数, E 表示捕获单个捕食者需要付出的努力, 其中 c 和 l 是常数。

为了简化系统(1), 作以下变换

$$\bar{t} = r_1 t, \quad \bar{x} = \frac{x}{K}, \quad \bar{y} = \frac{ay}{r_1}.$$

将 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ 仍记为 (x, y, t) , 则方程组(1)可改写为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - xy, \\ \frac{dy}{dt} = y\left(\delta - \frac{\beta y}{x}\right) - \frac{\alpha y}{\gamma + y}. \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\delta = \frac{r_2}{r_1}$, $\beta = \frac{r_2}{abK}$, $\alpha = \frac{aqE}{lr_1^2}$, $\gamma = \frac{acE}{lr_1}$ 。

Hu 和 Cao [7]研究了系统(2)的连续时间模型, 讨论了几种不同局部分岔, 即 Hopf 分岔、鞍节点分岔、跨临界分岔和 Bogdanov-Takens 分岔, 研究表明, 具有非线性 Michaelis-Menten 型捕食者捕获的系统, 将有助于理解捕食者种群存在非线性 Michaelis-Menten 型收获效应时生态系统或物理系统的动态复杂性。这种非线性收获比恒产量收获和恒努力收获模型更现实、更合理。

本文考虑了该系统的离散时间模型, 采用欧拉方法研究系统(2)的离散时间模型

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h(x_n(1-x_n) - x_n y_n), \\ y_{n+1} = y_n + h\left(y_n\left(\delta - \frac{\beta y_n}{x_n}\right) - \frac{\alpha y_n}{\gamma + y_n}\right). \end{cases} \quad (3)$$

初始条件 $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, h 为积分步长。

将离散时间的捕食者 - 猎物模型通过映射来定义

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + h(x(1-x) - xy) \\ y + h\left(y\left(\delta - \frac{\beta y}{x}\right) - \frac{\alpha y}{\gamma + y}\right) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

2. 平衡点的存在性

为了探究模型(4)不动点的存在性, 设为(4)的任意不动点, 则 (x, y) 必须满足如下方程组:

$$\begin{cases} x(1-x) - xy = 0, \\ y\left(\delta - \frac{\beta y}{x}\right) - \frac{\alpha y}{\gamma + y} = 0. \end{cases}$$

显然, $(1, 0)$ 为系统(4)的边界不动点, 考虑满足方程组的正不动点, 可得

$$\begin{cases} (\beta + \delta)x^2 + (\alpha - \beta\gamma - 2\beta - r\delta - \delta)x + \beta(\gamma + 1) = 0, \\ y = 1 - x. \end{cases} \quad (5)$$

为了分析(5)中正根的情况, 令

$$f(x) = (\beta + \delta)x^2 + (\alpha - \beta\gamma - 2\beta - r\delta - \delta)x + \beta(\gamma + 1),$$

则有

$$f'(x) = 2(\beta + \delta)x + (\alpha - \beta\gamma - 2\beta - r\delta - \delta), f''(x) = 2(\beta + \delta) > 0.$$

$$\Delta = (\alpha - \beta\gamma - 2\beta - r\delta - \delta)^2 - 4(\beta + \delta)\beta(\gamma + 1).$$

情况 1: $\alpha - \beta\gamma - 2\beta - r\delta - \delta \geq 0$

则有 $f'(x)$ 对于 $x > 0$ 都是递增的。 $f'(0) = \alpha - \beta\gamma - 2\beta - r\delta - \delta \geq 0$, 对于 $x > 0$, $f(x)$ 严格递增, 所

以 $f(x) > f(0) = \beta(r+1)$ 。此时, 系统(4)没有正不动点。

情况 2: $\alpha - \beta r - 2\beta - r\delta - \delta < 0$

因此, $f'(0) < 0$, 如果存在一个正根 x_1 , 使得 $f'(x_1) = 0$, 那么 $f'(x_1)$ 为最小值, $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上严格递减, 在 $(x_1, +\infty)$ 上严格递增。

如果, $f(x_1) > 0$, 则 $f(x) \geq f(x_1) > 0$, 系统(4)没有正不动点。

如果, $f(x_1) = 0$, 则 $f(x) = 0$ 只有一个正根, 系统(4)有唯一一个正不动点。其中

$$x_1 = \frac{\beta r + 2\beta + r\delta + \delta - \alpha}{2(\beta + \delta)}, \quad y_1 = 1 - x_1。$$

如果, $f(x_1) < 0$, 则 $f(x) = 0$ 有两个正根, 系统(4)有两个不相同的正不动点。分别为

$$x_{2,3} = \frac{\beta r + 2\beta + r\delta + \delta - \alpha \pm \sqrt{\Delta}}{2(\beta + \delta)}, \quad y_{2,3} = 1 - x_{2,3}。$$

3. 平衡点的稳定性

系统(4)在任意不动点 (x, y) 处的雅可比矩阵为

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 1+h-2hx-hy & -hx \\ \frac{h\beta y}{x^2} & 1+h\delta - \frac{2h\beta y}{x} - \frac{\alpha hr}{(\gamma+y)^2} \end{bmatrix}。$$

对应的特征方程为 $f(\lambda) = \lambda^2 - Tr\lambda + Det = 0$, 其中

$$Tr = 2+h-2hx-hy+h\delta - \frac{2h\beta y}{x} - \frac{\alpha hr}{(r+h)^2},$$

$$Det = (1+h-2hx-hy) \left(1+h\delta - \frac{2h\beta y}{x} - \frac{\alpha hr}{(\gamma+h)^2} \right) + \frac{h^2\beta y}{x}。$$

为了研究不动点的动力学行为, 根据[8]运用引理 1 进行分类。

引理 1 令多项式 $f(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D$, 且 $f(1) > 0$, 假设 λ_1 和 λ_2 是特征值。则有

- (1) $|\lambda_1| < 1$ 和 $|\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow f(-1) > 0$ 和 $D < 1$;
- (2) $|\lambda_1| < 1$ 和 $|\lambda_2| > 1$ 或 $|\lambda_1| > 1$ 和 $|\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow f(-1) < 0$;
- (3) $|\lambda_1| > 1$ 和 $|\lambda_2| > 1 \Leftrightarrow f(-1) > 0$ 和 $D > 1$;
- (4) $\lambda_1 = -1$ 和 $|\lambda_2| \neq 1 \Leftrightarrow f(-1) = 0$ 和 $D < 1$;
- (5) λ_1 和 λ_2 是复共轭且 $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 \Leftrightarrow T^2 - 4D < 0$ 和 $D = 1$ 。

由于 λ_1 和 λ_2 是特征方程的特征值, 可得到拓扑结果: 当 $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ 时, 不动点 (x, y) 称为局部渐近稳定的汇; 当 $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| > 1$ 时, 不动点 (x, y) 称为源, 因此, 源是不稳定的。此外, 当 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| > 1$ 或 $|\lambda_1| > 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 时, 不动点 (x, y) 称为鞍点。在非双曲不动点 (x, y) 的情况下, $|\lambda_1| = 1$ 或 $|\lambda_2| = 1$ 。

首先, 我们探讨了边界不动点 $(1, 0)$ 的稳定性, 其雅可比矩阵为

$$J(1, 0) = \begin{bmatrix} 1-h & -h \\ 0 & 1+h\delta - \frac{\alpha h}{\gamma} \end{bmatrix},$$

可得, 特征值 $\lambda_1 = 1-h < 1$, $\lambda_2 = 1+h\left(\delta - \frac{\alpha}{\gamma}\right)$ 。因为 $0 < h < 1$, 当 $\delta > \frac{\alpha}{\gamma}$ 时, $|\lambda_2| > 1$, 所以 $(1, 0)$ 为鞍

点：当 $\delta < \frac{\alpha}{\gamma}$ 时， $|\lambda_2| < 1$ ，所以 $(1,0)$ 为汇；当 $\delta = \frac{\alpha}{\gamma}$ 时， $|\lambda_2| = 1$ ，所以 $(1,0)$ 为非双曲点。

接下来，研究正不动点的稳定性，对于正不动点 $(x_*, 1-x_*)$ 的雅可比矩阵为

$$J(x_*, 1-x_*) = \begin{bmatrix} 1-hx_* & -hx_* \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

其中， $a_{21} = \frac{h\beta}{x_*^2} - \frac{h\beta}{x_*}$ ， $a_{22} = 1+h\delta+2h\beta - \frac{2h\beta}{x_*} - \frac{\alpha h\gamma}{(\gamma+1-x_*)^2}$ 。

可得特征方程为：

$$f(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D, \tag{6}$$

其中 $T = 1-hx_* + a_{22}$ ， $D = (1-hx_*)a_{22} + hx_*a_{21}$ 。

根据引理 1 特征根与系数之间的关系，可得正不动点 (x, y) 的稳定性如下所示：

(1) 正不动点 (x, y) 是稳定的汇，当

$$(hx_* - 2)(1+a_{22}) < hx_*a_{21} \text{ 和 } (1-hx_*)a_{22} + hx_*a_{21} < 1;$$

(2) 不动点 (x, y) 是鞍点时，当且仅当

$$hx_*a_{21} < (hx_* - 2)(1+a_{22});$$

(3) 正不动点 (x, y) 是源时，当

$$(hx_* - 2)(1+a_{22}) < hx_*a_{21} \text{ 和 } (1-hx_*)a_{22} + hx_*a_{21} > 1;$$

(4) 正不动点 (x, y) 是非双曲点时，当

$$(1-hx_* + a_{22})^2 < 4[(1-hx_*)a_{22} + hx_*a_{21}] \text{ 和 } (1-hx_*)a_{22} + hx_*a_{21} = 1。$$

4. 分岔分析

在本节中，利用分岔定理[9]讨论了系统(4)正不动点 (x_*, y_*) 的分岔。令

$$I_{PDB} = \left\{ (\alpha, \beta, \delta, \lambda, h) : h = \frac{2+5a_{22}}{x_* + 4x_*a_{22} - 4x_*a_{21}}, D \neq 1, \alpha, \beta, \delta, \lambda, h > 0 \right\},$$

$$I_{NS} = \left\{ (\alpha, \beta, \delta, \lambda, h_2) : h_2 = \frac{1-a_{22}}{x_*(a_{21}-a_{22})}, |1-h_2x_* + a_{22}| < 2, \alpha, \beta, \delta, \lambda, h_2 > 0 \right\}.$$

下面研究参数在 I_{PDB} ， I_{NS} 小邻域内变化时，系统发生的倍周期分岔和 Neimark-Sacker 分岔。

4.1. 倍周期分岔

首先，本文研究了系统(4)在正不动点 (x_*, y_*) 处的倍周期分岔。为了研究倍周期分岔，根据引理 1 考虑特征方程(6)在正不动点 (x_*, y_*) 处具有特征值 $\lambda_1 = -1$ 和 $|\lambda_2| \neq 1$ 。由系统(4)在 (x, y) 处的特征方程可假设 $T^2 > 4D$ ，则有

$$(1-hx_* + a_{22})^2 > 4((1-hx_*)a_{22} + hx_*a_{21}).$$

且 $T+D+1=0$ ，可得

$$h = \frac{2+5a_{22}}{x_* + 4x_*a_{22} - 4x_*a_{21}},$$

则 $f(\lambda)=0$ 的解是 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = -D$ 。由条件 $|\lambda_2| \neq 1$ ，所以 $(1-hx_*)a_{22} + hx_*a_{21} \neq \pm 1$ 。

定理 1 在系统(4)正不动点 (x_*, y_*) 处，当改变 I_{PDB} 邻域内分岔参数 h 的数值时，系统(4)将发生倍周期分岔。

证明 令 $h = \frac{2+5a_{22}}{x_* + 4x_*a_{22} - 4x_*a_{21}} = h_1$ ，系统(4)可变成如下映射

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + h_1(x(1-x) - xy) \\ y + h_1\left(y\left(\delta - \frac{\beta y}{x}\right) - \frac{\alpha y}{\gamma + y}\right) \end{pmatrix},$$

取 h_* 为较小的扰动，则映射可变为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + (h_1 + h_*)(x(1-x) - xy) \\ y + (h_1 + h_*)\left(y\left(\delta - \frac{\beta y}{x}\right) - \frac{\alpha y}{\gamma + y}\right) \end{pmatrix},$$

其中 $h_* \ll 1$ ，令 $u = x - x_*$ ， $v = y - y_*$ ，映射可变为

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u + (h_1 + h_*)\left[(u + x_*)(1 - u - x_*) - (u + x_*)(v + y_*)\right] \\ v + (h_1 + h_*)\left[(v + y_*)\left(\delta - \frac{\beta(v + y_*)}{u + x_*}\right) - \frac{\alpha(v + y_*)}{\gamma + v + y_*}\right] \end{pmatrix},$$

对上式进行泰勒展开，则有

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u, v, h_*) \\ g(u, v, h_*) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} f(u, v, h_*) &= b_{13}u^2 + b_{14}uv + b_{15}uh_* + b_{16}vh_* + c_1u^2h_* + c_2uvh_*, \\ g(u, v, h_*) &= b_{23}u^2 + b_{24}uv + b_{25}uh_* + b_{26}v^2 + b_{27}vh_* + c_1u^3 + c_2u^2v + c_3u^2h_* + c_4uv^2 \\ &\quad + c_5uvh_* + c_6v^3 + c_7v^2h_* + O\left((|u| + |v| + |h_*|)^4\right), \\ b_{11} &= 1 + h_1(1 - 2x_* - y_*), b_{12} = -h_1x_*, \\ a_{21} &= \frac{h_1\beta y_*^2}{x_*^2}, a_{22} = 1 + h_1\left(\delta - \frac{2\beta y_*}{x_*} - \frac{\alpha\gamma}{(\gamma + y_*)^2}\right), \\ b_{13} &= -h_1; b_{14} = -h_1; b_{15} = 1 - 2x_* - y_*; b_{16} = -x_*; c_1 = -1; c_2 = -1, \\ b_{23} &= -\frac{\beta h_1 y_*^2}{x_*^3}; b_{24} = \frac{2\beta h_1 y_*}{x_*^2}; b_{25} = \frac{\beta y_*^2}{x_*^2}; b_{26} = h_1\left(\frac{-2\beta}{x_*} + \frac{2\alpha\gamma}{(\gamma + y_*)^3}\right); b_{27} = \delta - \frac{2\beta y_*}{x_*} - \frac{\alpha\gamma}{(\gamma + y_*)^2}; \\ c_1 &= \frac{\beta h_1 y_*^2}{x_*^4}; c_2 = -\frac{2\beta h_1 y_*}{x_*^3}; c_3 = -\frac{\beta y_*^2}{x_*^3}; c_4 = \frac{\beta h_1}{x_*^2}; c_5 = \frac{2\beta y_*}{x_*^2}; c_6 = -\frac{h_1\alpha\gamma}{(\gamma + y_*)^4}; c_7 = \frac{\alpha\gamma}{(\gamma + y_*)^3} - \frac{\beta}{x_*}. \end{aligned}$$

为了得到方程组(7)的正则形式，令

$$T = \begin{bmatrix} b_{12} & b_{12} \\ -1 - b_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{bmatrix},$$

且当 $\det T \neq 0$ 时, 取如下变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

系统(7)的范式可表示为

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(X, Y, h_*) \\ g_1(X, Y, h_*) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(X, Y, h_*) &= \left(\frac{b_{13}(\lambda_2 - b_{11})}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} - \frac{b_{23}}{\lambda_2 + 1} \right) u^2 + \left(b_{14} \frac{\lambda_2 - b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} - \frac{b_{24}}{\lambda_2 + 1} \right) uv + \left(c_1 \frac{\lambda_2 - b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} - \frac{c_3}{\lambda_2 + 1} \right) u^2 h_* \\ &\quad + \left(c_2 \frac{\lambda_2 - b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} - \frac{c_5}{\lambda_2 + 1} \right) uv h_* + \left(b_{15} \frac{\lambda_2 - b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} - \frac{b_{25}}{\lambda_2 + 1} \right) u h_* + \left(b_{16} \frac{\lambda_2 - b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} - \frac{b_{27}}{\lambda_2 + 1} \right) v h_*, \\ g_1(X, Y, h_*) &= \left(\frac{b_{13}(1 + b_{11})}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} + \frac{b_{23}}{\lambda_2 + 1} \right) u^2 + \left(b_{14} \frac{1 + b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} + \frac{b_{24}}{\lambda_2 + 1} \right) uv + \left(b_{15} \frac{1 + b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} + \frac{b_{25}}{\lambda_2 + 1} \right) u h_* \\ &\quad + \left(b_{16} \frac{1 + b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} + \frac{b_{27}}{\lambda_2 + 1} \right) v h_* + \frac{c_1}{\lambda_2 + 1} u^3 + \frac{c_2}{\lambda_2 + 1} u^2 v + \left(c_1 \frac{1 + b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} + \frac{c_3}{\lambda_2 + 1} \right) u^2 h_* \\ &\quad + \frac{c_4}{\lambda_2 + 1} uv^2 + \left(c_2 \frac{1 + b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} + \frac{c_5}{\lambda_2 + 1} \right) uv h_* + \frac{c_6}{\lambda_2 + 1} v^3 + \frac{c_7}{\lambda_2 + 1} v^2 h_* + O\left(\left(|X| + |Y| + |h_*|\right)^4\right), \end{aligned}$$

这里 $u = b_{12}(X + Y)$, $v = -(1 + b_{11})X + b_{12}(\lambda_2 + 1)Y$.

接下来, 使用依赖于参数 h_* 的中心流形定理来近似系统(8)原点处的中心流形。在 $h_* = 0$ 邻域内, 在原点处的中心流形 $W^c(0, 0, 0)$ 可以近似的表示为

$$W^c(0, 0, 0) = \{(X, Y, h_*) \in \mathbb{R}^3 \mid Y = h(X, h_*), h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0\},$$

假设

$$h(X, h_*) = a_1 X^2 + a_2 X h_* + a_3 h_*^2 + O\left(\left(|X| + |h_*|\right)^3\right), \tag{9}$$

则根据(8)中心流形满足

$$h(-X + f_1(X, h(X, h_*), h_*), h_*) - \lambda_2 h(X, h_*) - g_1(X, h(X, h_*), h_*) = 0. \tag{10}$$

将式(8)、式(9)代入式(10), 比较系数可得

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{-\lambda_2 + 1} \left[\left(b_{13} \frac{1 + b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} + \frac{b_{23}}{\lambda_2 + 1} \right) b_{12}^2 + \left(b_{14} \frac{1 + b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} + \frac{b_{24}}{\lambda_2 + 1} \right) b_{12}(-1 - b_{11}) + b_{26} \frac{(-1 - b_{11})^2}{\lambda_2 + 1} \right], \\ a_2 &= \frac{-1}{\lambda_2 + 1} \left[\left(b_{15} \frac{1 + b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} + \frac{b_{25}}{\lambda_2 + 1} \right) b_{12} + \left(b_{16} \frac{1 + b_{11}}{b_{12}(\lambda_2 + 1)} + \frac{b_{27}}{\lambda_2 + 1} \right) (-1 - b_{11}) \right], \\ a_3 &= 0. \end{aligned}$$

因此, 中心流形 $W^c(0, 0, 0)$ 的映射表示为:

$$F: -X + K_1 X^2 + K_2 X h_* + K_3 X^2 h_* + K_4 X h_*^2 + K_5 X^3 + O\left(\left(|X| + |h_*|\right)^4\right), \tag{11}$$

如果映射(11)发生倍周期分岔, 则必须满足判断倍周期分岔发生和判断周期轨道稳定性的横截条件和非退化条件[10] [11], 如下所示

$$l_1 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial h_*} + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial h_*} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right)_{(0,0)} = K_2 \neq 0,$$

$$l_2 = \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial X^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right)^2 \right)_{(0,0)} = K_1^2 + K_5 \neq 0.$$

因此, 当 $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0$, 且参数 h_1 在 (x_*, y_*) 的小邻域内变化时, 模型(4)在 (x_*, y_*) 处发生倍周期分岔。此外, 如果 $l_2 > 0$, 则周期轨道是稳定的, 如果 $l_2 < 0$, 则周期轨道不稳定。

4.2. Neimark-Sacker 分岔

根据特征方程(6), 考虑当 $f(\lambda) = 0$ 的解为模为 1 的共轭复数时, 即满足 $T^2 - 4D < 0, D = 1, |T| < 2$ 时, $|1 - hx_* + a_{22}| < 2, h_2 = \frac{1 - a_{22}}{x_*(a_{21} - a_{22})}$, 系统(4)的分岔情况。

定理 2 当分岔参数 $h = h_2$ 在 l_{NS} 的小邻域内变化时, 系统(4)在正不动点 (x_*, y_*) 处发生 Neimark-Sacker 分岔。

证明 从 l_{NS} 中选取参数 $(\alpha, \beta, \delta, \gamma, h_2)$, 系统(4)可以用下面映射表示

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + h_2(x(1-x) - xy) \\ y + h_2\left(y\left(\delta - \frac{\beta y}{x}\right) - \frac{\alpha y}{\gamma + y}\right) \end{pmatrix},$$

以 \bar{h} 为扰动参数, 考虑系统如下

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + (h_2 + \bar{h})(x(1-x) - xy) \\ y + (h_2 + \bar{h})\left(y\left(\delta - \frac{\beta y}{x}\right) - \frac{\alpha y}{\gamma + y}\right) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中 $\bar{h} \ll 1$ 为小的扰动参数, 接下来考虑变换 $u = x - x_*, v = y - y_*$, 将不动点平移到原点, 映射(12)变换为如下形式:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u + (h_2 + \bar{h})\left[(u + x_*)(1 - u - x_*) - (u + x_*)(v + y_*)\right] \\ v + (h_2 + \bar{h})\left[(v + y_*)\left(\delta - \frac{\beta(v + y_*)}{u + x_*}\right) - \frac{\alpha(v + y_*)}{\gamma + v + y_*}\right] \end{pmatrix}, \tag{13}$$

将映射(13)右侧在原点处进行泰勒级数展开, 则映射(13)可写成

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

其中

$$f(u, v) = b_{13}u^2 + b_{14}uv,$$

$$g(u, v) = b_{23}u^2 + b_{24}uv + b_{26}v^2 + c_1u^3 + c_2u^2v + c_4uv^2 + c_6v^3 + O\left((|u| + |v|)^4\right).$$

将 $h_1 = h_2 + \bar{h}$ 代入式(7)中可得到系统(14)所有系数。设系统(14)在原点处的特征方程为

$$\lambda^2 - T(\bar{h})\lambda + D(\bar{h}) = 0, \tag{15}$$

其中

$$T = 1 - (h_2 + \bar{h})x_* + a_{22}, D = (1 - (h_2 + \bar{h})x_*)a_{22} + (h_2 + \bar{h})x_*a_{21}.$$

因为 $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, 使得 λ_1 和 λ_2 为(15)的共轭复根, 则有

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{T(\bar{h})}{2} \pm \frac{i\sqrt{4D(\bar{h}) - T^2(\bar{h})}}{2},$$

因此,

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{D(\bar{h})},$$

$$\left(\frac{d\sqrt{D(\bar{h})}}{d\bar{h}} \right)_{\bar{h}=0} = 1 \neq 0.$$

为了保证 $\bar{h} = 0$ 时, 特征方程的根不在坐标轴单位圆的交点上, 我们需要当 $\bar{h} = 0$ 时, $\lambda_1^m, \lambda_2^m \neq 1$, $m = 1, 2, 3, 4$, 其等价于 $T(0) \neq 2, 1, 0, -2$, 令

$$\theta = \frac{T(\bar{h})}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{4D(\bar{h}) - T^2(\bar{h})}}{2}.$$

作变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

其中 $T = \begin{pmatrix} b_{12} & 0 \\ \theta - b_{11} & -\omega \end{pmatrix}$, 且 $\det T \neq 0$ 则映射(14)可以写成

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \theta & -\omega \\ \omega & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_2(X, Y) \\ g_2(X, Y) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

其中

$$f_2(X, Y) = \frac{b_{13}}{b_{12}}u^2 + \frac{b_{14}}{b_{12}}uv,$$

$$g_2(X, Y) = \left(\frac{(\theta - b_{11})b_{13}}{b_{12}\omega} - \frac{b_{23}}{\omega} \right)u^2 + \left(\frac{(\theta - b_{11})b_{13}}{b_{12}\omega} - \frac{b_{24}}{\omega} \right)uv - \frac{b_{26}}{\omega}v^2 - \frac{c_1}{\omega}u^3$$

$$- \frac{c_2}{\omega}u^2v - \frac{c_4}{\omega}uv^2 - \frac{c_6}{\omega}v^3 + O(|X| + |Y|)^4,$$

这里, $u = b_{12}X$, $v = (\theta - b_{11})X - \omega Y$ 。

为了确定(16)发生 Neimark-Sacker 分岔时闭合轨道的局部稳定性, 需要计算判别量 L , 且不能为零 [10] [12], 其中

$$L = \left(\operatorname{Re} \left(\frac{(1 - 2\lambda_1)\lambda_2^2}{1 - \lambda_1} \Phi_{20}\Phi_{11} \right) - \frac{1}{2}|\Phi_{11}|^2 - |\Phi_{02}|^2 + \operatorname{Re}(\lambda_2\Phi_{21}) \right)_{\bar{h}=0}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \frac{1}{4} [f_{uu} + f_{vv} + i(g_{uu} + g_{vv})], \\ \Phi_{02} &= \frac{1}{8} [f_{uu} - f_{vv} - 2g_{uv} + i(g_{uu} - g_{uv} + f_{uv})], \\ \Phi_{20} &= \frac{1}{8} [f_{uu} - f_{vv} - 2g_{uv} + i(g_{uu} - g_{vv} - 2f_{uv})], \\ \Phi_{21} &= \frac{1}{16} [f_{uuu} + f_{uvv} + g_{uvv} + g_{vvv} + i(g_{uuu} + g_{uvv} - f_{uvv} - f_{vvv})] \end{aligned}$$

基于上述计算, 如果条件(17)成立且 $L \neq 0$, 则当参数 $h_2 = \frac{1-a_{22}}{x_*(a_{21}-a_{22})}$ 在其小邻域内变化时, 系统(4)在 (x_*, y_*) 处发生 Neimark-Sacker 分岔。如果 $L > 0$, 则在正不动点处分岔出一条排斥不变闭曲线, 称为亚临界 Neimark-Sacker 分岔; 当 $L < 0$ 时, 从正不动点 (x_*, y_*) 处分岔出一条吸引不变闭曲线, 称为超临界 Neimark-Sacker 分岔。

5. 数值模拟

为了验证理论结果, 利用 Matlab 给出了具体参数值的相图。以 h 作为分岔参数, 证明系统(4)在其参数 $(\alpha, \beta, \delta, \gamma)$ 的特定值下正不动点 (x_*, y_*) 存在倍周期分岔和 Neimark-Sacker 分岔。

首先, 在保持参数为 $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = (1.5, 0.5, 0.4, 0.01)$ 固定的情况下, 给定初始值为 $(x, y) = (0.9311, 0.00689)$, 分岔参数 h 在 $(0.0519, 0.074)$ 的小邻域内发生变化时, 研究系统(4)在正不动点 (x_*, y_*) 处的倍周期分岔。

通过计算确定其分岔值为 $h = 0.05195$ 。当 $0 < h < 0.05195$, 系统在正不动点处具有局部渐近稳定性; 当 $0.05195 < h < 0.074$ 时, 稳定性消失, 最终进入混沌状态。从图 2(b)的相位图中也可看出, 不动点在 $h < 0.05195$ 时是稳定的, 而倍周期分岔发生在 $h = 0.05195$ 左右。图 1 绘制了系统(4)的分岔图, 证实了系统(4)中存在倍周期分岔, 并最终进入混沌区域。同时图 1(a)和图 1(b)相关的相图绘制在图 2 中。

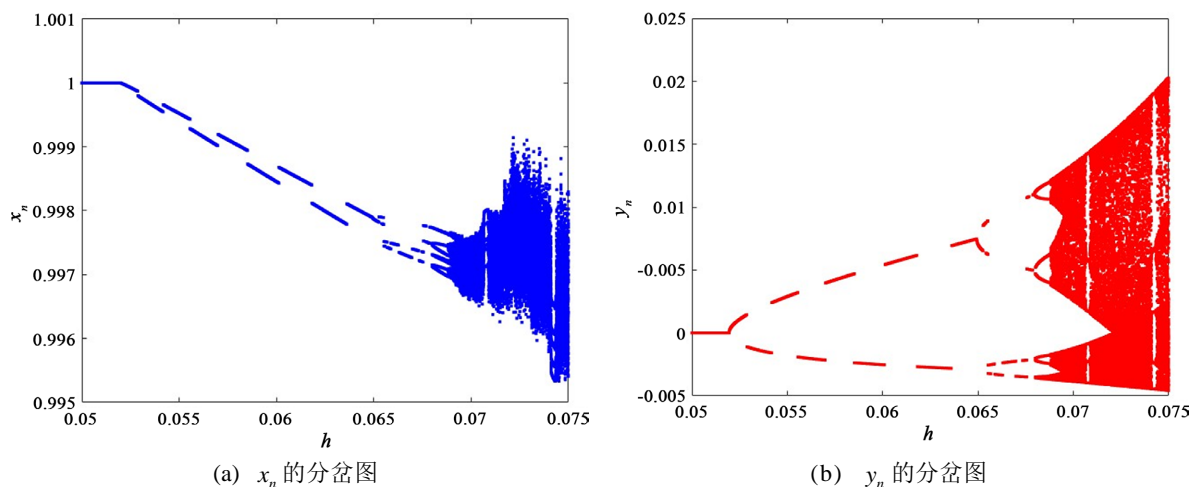


Figure 1. The bifurcation diagram of model (4) over the interval where $0.05 \leq h \leq 0.074$, given the parameters $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = (1.5, 0.5, 0.4, 0.01)$ and the initial condition $(x, y) = (0.7311, 0.2689)$

图 1. 当参数 $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = (1.5, 0.5, 0.4, 0.01)$, 初始条件 $(x, y) = (0.7311, 0.2689)$ 时, 模型(4)在 $0.05 \leq h \leq 0.074$ 区间的分岔图

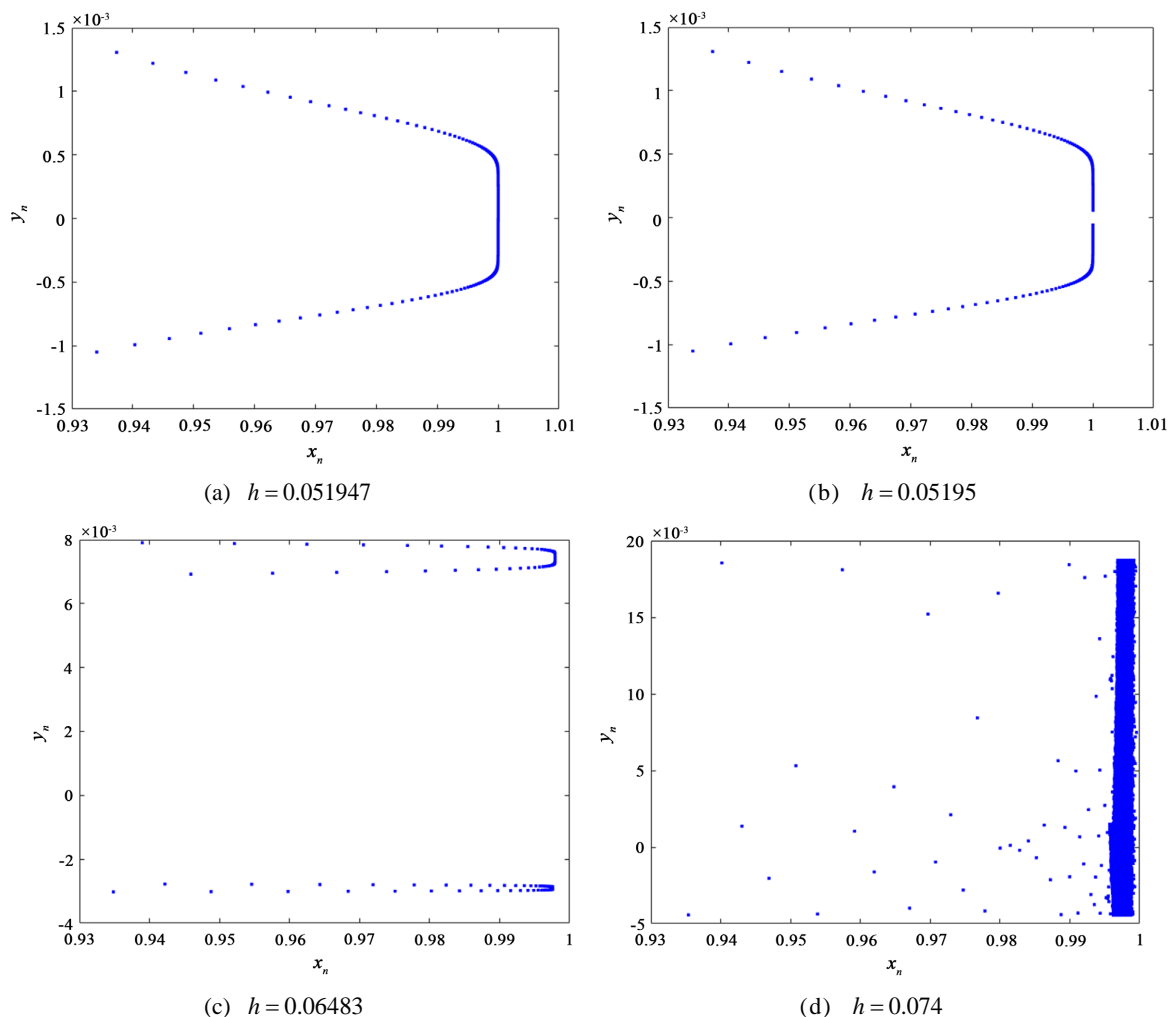


Figure 2. The phase diagrams of model (4) for different values of h , given the parameters $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = (1.5, 0.5, 0.4, 0.01)$ and the initial condition $(x, y) = (0.7311, 0.2689)$

图 2. 当参数 $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = (1.5, 0.5, 0.4, 0.01)$ ，初始条件 $(x, y) = (0.7311, 0.2689)$ 时，模型(4)在不同 h 值时的相图

其次，在保持参数为 $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = (0.5, 0.1, 0.3, 0.7)$ 固定的情况下，给定初始值为 $(x, y) = (0.3736, 0.6364)$ ，分岔参数 h 在 $(1.5, 2.5)$ 的小邻域内发生变化时，研究系统(4)在正不动点 (x_*, y_*) 处的 Neimark-Sacker 分岔。

通过计算，当 $h = 1.66034$ 时，系统(4)发生 Neimark-Sacker 分岔。随着 h 逐渐增大，不动点从局部稳定变成内部渐进稳定的闭轨，即出现吸引不变闭合曲线，最后闭轨消失。图 3 绘制了系统(4)发生 Neimark-Sacker 分岔时的分岔图。同时图 3(a)和图 3(b)相关的相图绘制在图 4 中。

6. 总结

本文研究了捕食者具有 Michaelis-Menten 型函数的离散捕食者 - 猎物模型的动力学问题。为了探索模型的动力学性质，采用向前欧拉近似得到离散 Leslie-Gower 模型。利用分岔理论和中心流形定理等方法对系统不动点的存在性和稳定性进行了理论分析，从理论上揭示了系统可能存在的分支现象，并验证了正不动点的倍周期分岔和 Neimark-Sacker 分岔，给出了数值模拟的结果。

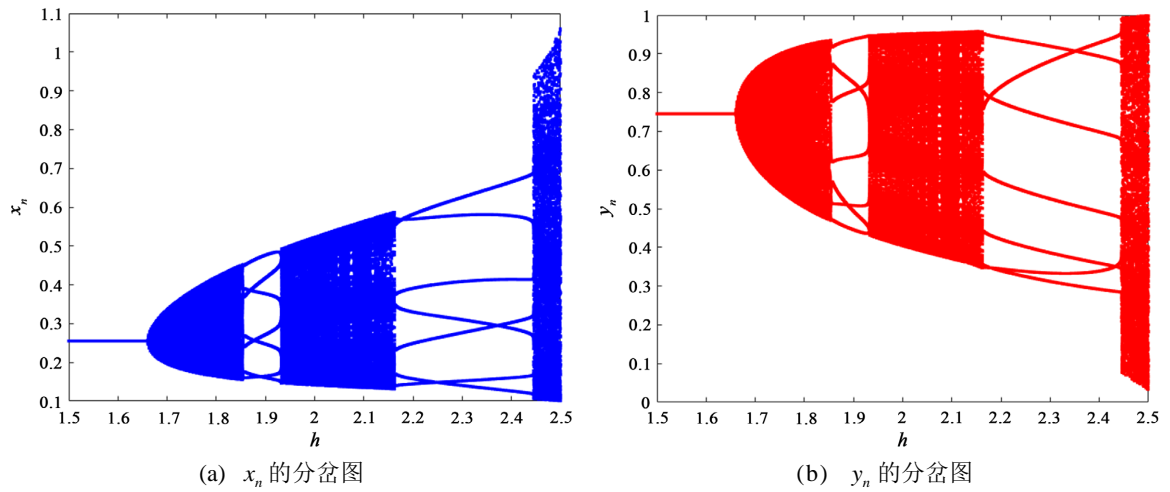
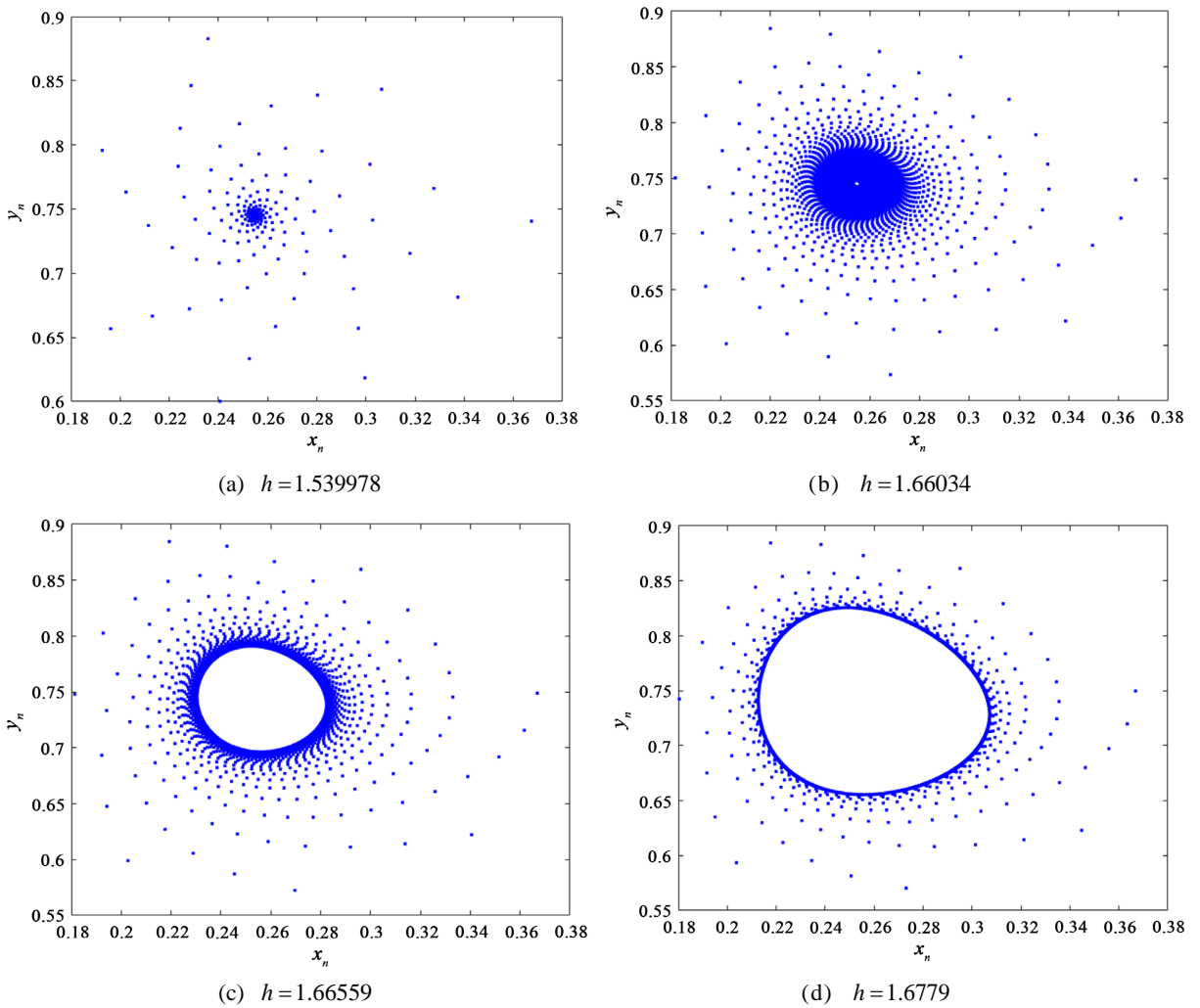


Figure 3. The bifurcation diagram of model (4) over the interval where $1.5 \leq h \leq 2.5$, given the parameters $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = (0.5, 0.1, 0.3, 0.7)$ and the initial condition $(x, y) = (0.3736, 0.6364)$

图 3. 当参数 $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = (0.5, 0.1, 0.3, 0.7)$, 初始条件 $(x, y) = (0.3736, 0.6364)$ 时, 模型(4)在 $1.5 \leq h \leq 2.5$ 区间的分岔图



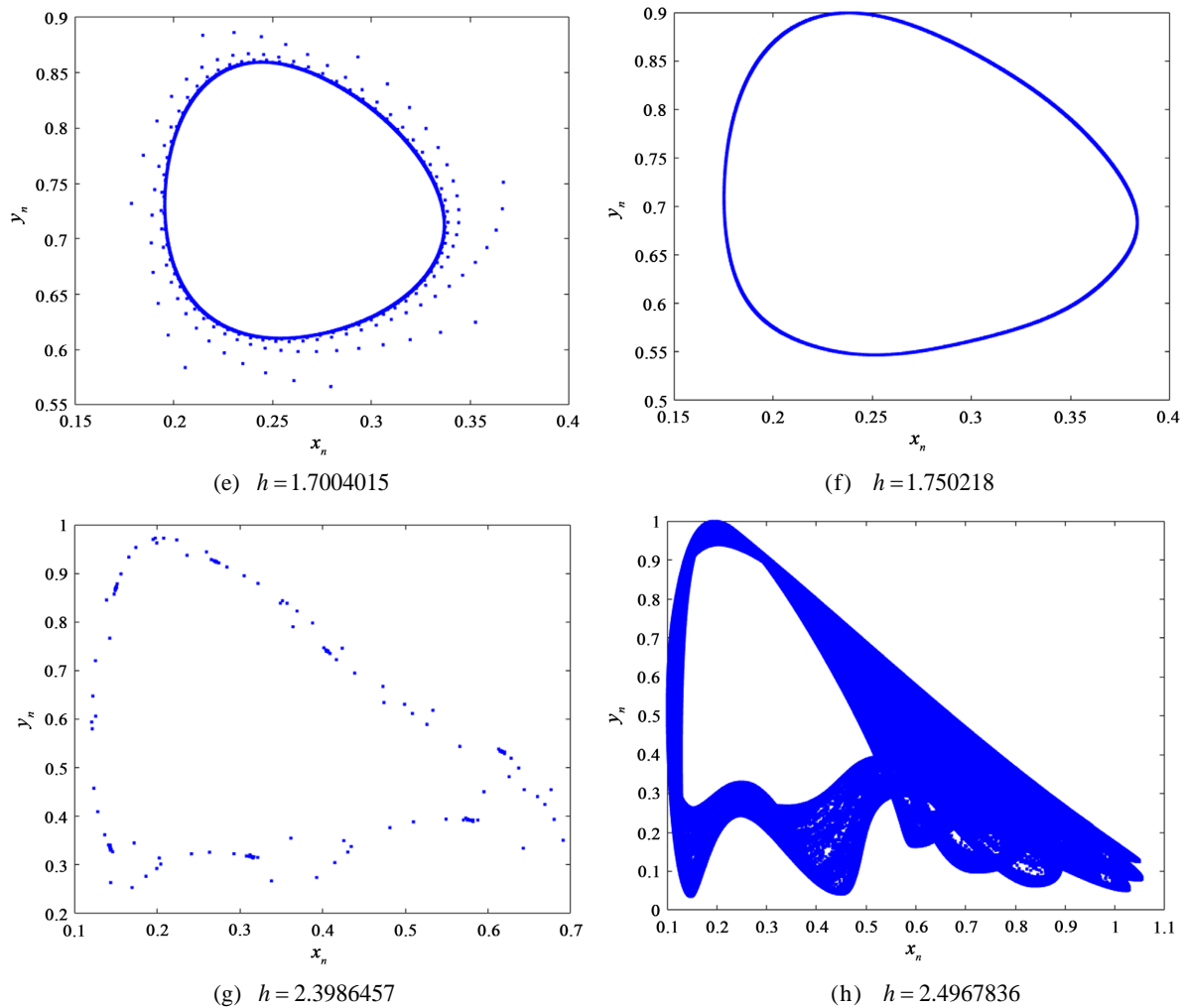


Figure 4. The phase diagrams of model (4) for different values of h , given the parameters $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = (0.5, 0.1, 0.3, 0.7)$ and the initial condition $(x, y) = (0.3736, 0.6364)$

图 4. 当参数 $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = (0.5, 0.1, 0.3, 0.7)$ ，初始条件 $(x, y) = (0.3736, 0.6364)$ 时，模型(4)在不同 h 值时的相图

结果表明，当选择积分步长 h 作为分岔参数时，具有 Michaelis-Menten 型捕食者捕获的离散时间 Leslie-Gower 系统表现出更丰富的动力学行为，有助于进一步认识捕食者种群存在非线性 Michaelis-Menten 型收获效应时生态系统或物理系统的动态复杂性，维护生态系统的长期可持续发展。

基金项目

国家自然科学基金(12161060); 广西自然科学基金项目(2023GXN5PAA026204)。

参考文献

- [1] Danca, M., Codreanu, S. and Bakó, B. (1997) Detailed Analysis of a Nonlinear Prey-Predator Model. *Journal of Biological Physics*, **23**, 11-20. <https://doi.org/10.1023/a:1004918920121>
- [2] Kuznetsov, Y.A. (1998) Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-22007-4>
- [3] Salman, S.M., Yousef, A.M. and Elsadany, A.A. (2016) Stability, Bifurcation Analysis and Chaos Control of a Discrete Predator-Prey System with Square Root Functional Response. *Chaos, Solitons & Fractals*, **93**, 20-31. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.09.020>

-
- [4] Bilal Ajaz, M., Saeed, U., Din, Q., Ali, I. and Israr Siddiqui, M. (2020) Bifurcation Analysis and Chaos Control in Discrete-Time Modified Leslie-Gower Prey Harvesting Model. *Advances in Difference Equations*, **2020**, Article No. 45. <https://doi.org/10.1186/s13662-020-2498-1>
- [5] Tassaddiq, A., Shabbir, M.S., Din, Q. and Naaz, H. (2022) Discretization, Bifurcation, and Control for a Class of Predator-Prey Interactions. *Fractal and Fractional*, **6**, Article 31. <https://doi.org/10.3390/fractalfract6010031>
- [6] Clark, C.W. (1979) Aggregation and Fishery Dynamics: A Theoretical Study of Schooling and the Purse Seine Tuna Fisheries, *Fish. Bull.*, **77**, 317-337.
- [7] Hu, D. and Cao, H. (2017) Stability and Bifurcation Analysis in a Predator-Prey System with Michaelis-Menten Type Predator Harvesting. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **33**, 58-82. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2016.05.010>
- [8] Luo, A.C. (2012) Regularity and Complexity in Dynamical Systems. Springer. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-1524-4>
- [9] Wiggins, S. (1990) Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. In: *Texts in Applied Mathematics*, Springer, 512-523. <http://dx.doi.org/10.1007/b97481>
- [10] Carr, J. (1981) Application of Center Manifold Theory. Springer. <https://doi.org/10.1002/zamm.19820621019>
- [11] Li, X. and Shao, X. (2023) Flip Bifurcation and Neimark-Sacker Bifurcation in a Discrete Predator-Prey Model with Michaelis-Menten Functional Response. *Electronic Research Archive*, **31**, 37-57. <https://doi.org/10.3934/era.2023003>
- [12] Khan, M.S., Abbas, M., Bonyah, E. and Qi, H. (2022) Michaelis-Menten-Type Prey Harvesting in Discrete Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model. *Journal of Function Spaces*, **2022**, 1-23. <https://doi.org/10.1155/2022/9575638>