Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(1), 374-385**
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.141037

Hans汉斯

边界条件和转移条件均含谱参数的二阶*J*-对称微分算子

付慧洁，许美珍*

内蒙古工业大学理学院，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2024年12月27日；录用日期：2025年1月18日；发布日期：2025年1月29日

摘 要

考虑一类耦合边界条件和转移条件均含谱参数的二阶复系数微分算子的*J*-自伴性和格林函数。在适当的Hilbert空间上定义一个与问题相关的线性算子，将所研究的问题转化为对此空间中算子的研究，并证明该算子是*J*-自伴的。另外，通过构造微分方程的基本解得到问题的格林函数。

关键词

二阶复系数微分算子，谱参数，*J*-自伴性，格林函数

Second-Order *J*-Symmetric Differential Operators with Eigenparameter-Dependent Boundary and Transmission Conditions

Huijie Fu, Meizhen Xu*

School of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia

Received: Dec. 27th, 2024; accepted: Jan. 18th, 2025; published: Jan. 29th, 2025

Abstract

In this paper, we consider the *J*-self-adjointness and Green's function of a class of discontinuous second-order complex coefficient differential operator with eigenparameters in boundary and transmission conditions. By introducing a linear operator related to the problem in a suitable Hilbert space, the considered problem can be interpreted as the study of the operator in this space, and this

*通讯作者。

文章引用: 付慧洁, 许美珍. 边界条件和转移条件均含谱参数的二阶 *J*-对称微分算子[J]. 应用数学进展, 2025, 14(1): 374-385. DOI: 10.12677/aam.2025.141037

operator is proved to be *J*-self-adjoint. In addition, the Green's function of the problem is obtained by constructing the fundamental solutions of the differential equation.

Keywords

Second-Order Complex Coefficient Differential Operator, Eigenparameter, *J*-Self-Adjointness, Green's Function

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

内部具有不连续性(即具有内部点条件或转移条件)的微分算子是解决热传导问题、弦的振动问题等物理问题的有力工具。例如在研究复合材料叠层板块的热量传导问题时，由于不同板块的热传导系数不同，板块与板块的结合部分热传导系数改变，则相应问题变为具有不连续性的问题[1]；在研究中间有结点的弦振动问题时，需要考虑在一点处附加的质量，结点两侧会产生一定的关联关系，这种关系赋予了适当的“转移条件”[2]。经典的微分算子问题，谱参数只出现在微分方程中，但随着力学、数学物理等领域的发展，谱参数不仅出现在微分方程中，还可能出现在边界条件和转移条件中。

关于边界条件含谱参数的对称微分算子的研究，Mukhtaro 和 Hao 等人考虑了边界条件一端含特征参数的二阶微分算子，得到了算子的谱性质以及格林函数和预解算子等[3] [4]。李昆和郑召文[5]进一步考虑了两端边界条件均含谱参数的不连续二阶微分算子的谱性质。随后，此类问题被推广到具有两个不连续点以及更高阶的情形[6] [7]。

关于转移条件含谱参数的对称微分算子(边界条件可能含谱参数，也可能不含谱参数)的研究，2005 年，Akdoğan [8]考虑了边界条件和转移条件均含谱参数的二阶边值问题的特征值及其对应特征函数的渐近性。2015 年，上述问题被推广到具有两个转移点的情形[9]。同年，郭永霞[10]研究了多个转移条件含谱参数的二阶 Sturm-Liouville 算子的谱及逆谱问题。之后，关于内部点条件含有谱参数的对称微分算子问题又涌现出了一些较新的研究成果[11] [12]。

另外，以上研究中微分算式系的数函数均为实值函数，当系数函数为复值函数时，由此生成的算子为非对称微分算子，其中，J-对称微分算子就是一类特殊的非对称微分算子。

关于 J-对称微分算子的 J-自伴扩张问题，Knowles I，Race D，Shang Z J 等对 J-对称微分算子 J-自伴扩张域进行了解析刻画[13]-[15]。之后，J-对称微分算子的 J-自伴扩张问题还被推广到具有转移条件的情形[16]。另外，关于 J-对称微分算子其他方面的研究，包括格林函数及预解算子，谱的离散性等也有一些基础性的工作[17]。以上关于 J-对称微分算子的研究中，谱参数只出现在微分方程中，于是受到边界条件和转移条件含有谱参数的对称微分算子研究成果的启发，我们要问，当边界条件和转移条件均含有谱参数时，一般的二阶复系数微分方程形式下所生成的微分算子是否具有 J-自伴性？格林函数的表达式是什么？这就是本文将要考虑的问题。

2. 预备知识

本节给出 C-自伴算子及 J-自伴算子的相关定义和结论。

设 H 是可分的 Hilbert 空间，$(\cdot,\cdot)$ 表示 H 上的内积。

定义 1 若 H 上的算子 C 满足：$C^2=I$，则 C 是幂等的；若

$$C(\alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}x+\bar{\beta}y,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C},x,y\in H,$$

则 C 是反线性的；若

$$(x,y)=(Cy,Cx),\ \forall x,y\in H,$$

则 C 是等距的。H 上幂等的等距反线性算子称为 C-算子。

定义 2 设 A：$D(A)\to H$ 是闭稠密线性算子，C 是 H 上的 C-算子，若 $\forall f,g\in D(A)$，有

$$(CAf,g)=(CAg,f)$$

即 $A\subset CA^*C$，则 A 是 C-对称算子。若 $A=CA^*C$，则 A 是 C-自伴算子。

定义 3 设 C 是 H 上的 C-算子，H 上的双线性型 $[\cdot,\cdot]$ 表示为

$$[x,y]=(x,Cy),\ \forall x,y\in H,$$

如果 $[x,y]=(x,Cy)=0$，则称 x 与 y 在 $[\cdot,\cdot]$ 下是正交的或 C-正交的。

定义 4 设 A 是 H 上的稠定线性算子，若

$$(Ax,Jy)=(x,JAy),\ \ \forall x,y\in D(A),$$

则 A 是 J-对称算子。其中 J 是 H 上取复共轭的算子，即 $\forall x\in H,\ Jx=\bar{x}$。

引理 1 [17] A 是 J-对称算子的充要条件是：$JA\subset A^*J$ （$A\subset JA^*J$，或 $JAJ\subset A^*$）

定义 5 如果 $JA=A^*J$ （$A=JA^*J$，或 $JAJ=A^*$），则 A 是 J-自伴算子。

注 1 [17] C-对称和 C-自伴有时也称为 J-对称和 J-自伴，但在 Krein 空间中 C-自伴与 J-自伴不同。

3. 新空间与新算子

考虑一般形式的二阶复系数阶微分方程

$$l(y):=-\left(p(x)y'\right)'+q(x)y=\lambda w(x)y, \tag{1}$$

其中 $x\in I=[a,c)\cup(c,b]$，$p^{-1}(x)$，$q(x)$ 是 $[a,c),(c,b]$ 上的连续复值函数，且 $\lim\limits_{x\to c\pm}q((x))=q(c\pm)$ 存在有限极限，$w\in L^1(I,\mathbb{R}),w>0$，$\lambda\in\mathbb{C}$ 是谱参数。

含有谱参数的耦合型边界条件为

$$AY(a)+BY(b)=0, \tag{2}$$

含有谱参数的转移条件为

$$CY(c-)+DY(c+)=0, \tag{3}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1-\lambda\gamma_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\alpha_3 & 0\\ \beta_2-\lambda\gamma_2 & \beta_3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}\theta_1-\lambda\delta_1 & \theta_2\\ \sigma_1 & 0\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}\theta_3 & 0\\ \sigma_2-\lambda\delta_2 & \sigma_3\end{pmatrix},$$

$$Y(\cdot)=\left(y(\cdot),y^{[1]}(\cdot)\right)^{\mathrm{T}},\ y^{[1]}=py',\ \alpha_i,\beta_i,\theta_i,\sigma_i,\gamma_j,\delta_j\in\mathbb{R},\ i=1,2,3,\ j=1,2,$$

且假定

$$-\alpha_2\beta_1=-\theta_2\sigma_1=\rho>0,\ \alpha_3\beta_3=\theta_3\sigma_3=\eta>0. \tag{4}$$

定义 6 令微分算式 $l(y):=-\left(p(x)y'\right)'+q(x)y$，由微分算式 $l(y)$ 生成的最大算子 T_M 的定义为

$$T_M(y)=l(y), y\in D_M,\ D_M=\left\{y\in L_w^2(I)\,|\,y, y^{[1]}\in AC(I), l(y)\in L_w^2(I)\right\},$$

其中 D_M 称为 $l(y)$ 的最大算子域。

引理 2 [18] 对于任意的复数组 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4$，一定存在一个函数 $f\in D_M$，使得

$$f(a)=\xi_1, f(b)=\xi_2, f(c+)=\xi_3, f(c-)=\xi_4,\ f^{[1]}(a)=\tau_1, f^{[1]}(b)=\tau_2, f^{[1]}(c+)=\tau_3, f^{[1]}(c-)=\tau_4.$$

在空间 $L_w^2(I)$ 中定义内积

$$\langle f,g\rangle_w=\rho\int_a^c f\overline{g}w\mathrm{d}x+\eta\int_c^b f\overline{g}w\mathrm{d}x,\ \forall f,g\in L_w^2(I),$$

易知 $H_1\left(L_w^2(I),\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ 是 Hilbert 空间。在直和空间 $\mathcal{H}=H_1\oplus\mathbb{C}^4$ 中定义内积

$$\langle F,G\rangle=f,g_w+m_1f_1\overline{g_1}+m_2f_2\overline{g_2}+m_3f_3\overline{g_3}+m_4f_4\overline{g_4},$$

$$\forall F=(f,f_1,f_2,f_3,f_4)^{\mathrm{T}},\ G=(g,g_1,g_2,g_3,g_4)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H},$$

则 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间。其中

$$f(x),g(x)\in H_1, f_i,g_i\in\mathbb{C}, i=1,2,3,4,$$

$$f_1=\gamma_1f(a), f_2=\gamma_2f(b), f_3=\delta_1f(c-), f_4=\delta_2f(c+),$$

$$g_1=\gamma_1g(a), g_2=\gamma_2g(b), g_3=\delta_1g(c-), g_4=\delta_2g(c+),$$

$$m_1=-\frac{\rho}{\alpha_2\gamma_1}, m_2=\frac{\eta}{\beta_3\gamma_2}, m_3=\frac{\rho}{\theta_2\delta_1}, m_4=-\frac{\eta}{\sigma_3\delta_2},$$

在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上定义算子如下

$$TF=\begin{pmatrix}\dfrac{l(f)}{w}\\ \alpha_1f(a)+\alpha_2f^{[1]}(a)+\alpha_3f(b)\\ \beta_1f(a)+\beta_2f(b)+\beta_3f^{[1]}(b)\\ \theta_1f(c-)+\theta_2f^{[1]}(c-)+\theta_3f(c+)\\ \sigma_1f(c-)+\sigma_2f(c+)+\sigma_3f^{[1]}(c+)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda f\\ \lambda f_1\\ \lambda f_2\\ \lambda f_3\\ \lambda f_4\end{pmatrix}=\lambda F,$$

$$\forall F=(f,f_1,f_2,f_3,f_4)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H},$$

其中，算子 T 的定义域为

$$D(T)=\Big\{(f(x),f_1,f_2,f_3,f_4)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}\,|\,f,f^{[1]}\in AC_{loc}(I), l(f)\in H_1, AF(a)+BF(b)=0,$$
$$CF(c-)+DF(c+)=0, f_1=\gamma_1f(a), f_2=\gamma_2f(b), f_3=\delta_1f(c-), f_4=\delta_2f(c+)\Big\}.$$

为简便，令

$$\begin{aligned}&M_1(f)=\alpha_1f(a)+\alpha_2f^{[1]}(a)+\alpha_3f(b),\ M_2(f)=\beta_1f(a)+\beta_2f(b)+\beta_3f^{[1]}(b),\\&N_1(f)=\theta_1f(c-)+\theta_2f^{[1]}(c-)+\theta_3f(c+),\ N_2(f)=\sigma_1f(c-)+\sigma_2f(c+)+\sigma_3f^{[1]}(c+),\end{aligned}\tag{5}$$

$$M_1'(f)=\gamma_1f(a),\ M_2'(f)=\gamma_2f(b),\ N_1'(f)=\delta_1f(c-),\ N_2'(f)=\delta_2f(c+),\tag{6}$$

即

$$F=\left(f,M_1'(f),M_2'(f),N_1'(f),N_2'(f)\right)^{\mathrm{T}},$$

于是，问题(1)-(3)可转化为算子问题$TF=\lambda F$。

4. 算子的 J-自伴性

引理 3 $D(T)$在$\mathcal{H}$中稠密。

证明 设$F=\left(f(x),f_1,f_2,f_3,f_4\right)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{H}$，且$F\perp D(T)$。令$\widetilde{C_0^\infty}$表示下列函数的集合

$$\phi(x)=\begin{cases}\phi_1(x),x\in[a,c),\\ \phi_2(x),x\in(c,b],\end{cases}$$

其中，$\phi_1(x)\in C_0^\infty[a,c),\phi_2(x)\in C_0^\infty(c,b]$。于是，$\widetilde{C_0^\infty}\oplus\{0\}\oplus\{0\}\oplus\{0\}\oplus\{0\}\subset D(T),(0\in\mathbb{C})$。设$U=(u(x),0,0,0,0)\in\widetilde{C_0^\infty}\oplus\{0\}\oplus\{0\}\oplus\{0\}\oplus\{0\}$。则$F\perp U$。由$\langle F,U\rangle=\langle f,u\rangle_1=0$知$f(x)$在$H_1$中正交于$\widetilde{C_0^\infty}$，故$f(x)$为零。设$G(x)=\left(g(x),g_1,0,0,0\right)\in\widetilde{C_0^\infty}\oplus\{0\}\oplus\{0\}\oplus\{0\}$，则$\langle F,G\rangle=\langle f,g\rangle_w+m_1f_1\overline{g_1}=0$，由于$g_1$是任意选取的，故$f_1=0$。设$G(x)=\left(g(x),0,g_2,0,0\right)\in\widetilde{C_0^\infty}\oplus\{0\}\oplus\{0\}\oplus\{0\}$，则$\langle F,G\rangle=\langle f,g\rangle_w+m_2f_2\overline{g_2}=0$，由于$g_2$是任意选取的，故$f_2=0$。同理可以证明$f_3=0,f_4=0$。于是$F=(0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$。所以与$D(T)$正交的只有零元素，从而证得$D(T)$在$\mathcal{H}$中稠密。

定理 1 算子T是定义在$\mathcal{H}$中的J-自伴算子。

证明 对$\forall F,G\in D(T)$，由分部积分得

$$\begin{aligned}\langle TF,JG\rangle&=\left\langle\frac{l(f)}{w},Jg\right\rangle_w+m_1M_1(f)\overline{JM_1'(g)}+m_2M_2(f)\overline{JM_2'(g)}+m_3N_1(f)\overline{JN_1'(g)}+m_4N_2(f)\overline{JN_2'(g)}\\&=\langle F,JTG\rangle+\rho[f,g]_a^{c-}+\eta[f,g]_{c+}^b+m_1\left[M_1(f)M_1'(g)-M_1'(f)M_1(g)\right]\\&\quad+m_2\left[M_2(f)M_2'(g)-M_2'(f)M_2(g)\right]+m_3\left[N_1(f)N_1'(g)-N_1'(f)N_1(g)\right]\\&\quad+m_4\left[N_2(f)N_2'(g)-N_2'(f)N_2(g)\right],\end{aligned}$$

其中

$$[f,g](x)=f(x)g^{[1]}(x)-f^{[1]}(x)g(x),\tag{7}$$

根据(4)，(5)，(6)式，经推导计算可得

$$m_1\left[M_1(f)M_1'(g)-M_1'(f)M_1(g)\right]+m_2\left[M_2(f)M_2'(g)-M_2'(f)M_2(g)\right]=\rho[f,g](a)-\eta[f,g](b),$$

$$m_3\left[N_1(f)N_1'(g)-N_1'(f)N_1(g)\right]+m_4\left[N_2(f)N_2'(g)-N_2'(f)N_2(g)\right]=\eta[f,g](c+)-\rho[f,g](c-),$$

因此

$$\langle TF,JG\rangle=\langle F,JTG\rangle,$$

故算子T是J-对称的。接下来利用J-自伴算子的定义来证明算子T的J-自伴性。

下面只需证明：若对于任意的$F=\left(f,M_1'(f),M_2'(f),N_1'(f),N_2'(f)\right)^{\mathrm{T}}\in D(T)$，有$\langle TF,JG\rangle=\langle F,Z\rangle$成立，则$G\in D(T)$且$JTG=Z$，其中$G=\left(g,g_1,g_2,g_3,g_4\right)^{\mathrm{T}}$，$Z=\left(z,z_1,z_2,z_3,z_4\right)^{\mathrm{T}}$，即

(i) $g(x),g^{[1]}(x)\in AC_{loc}(I),\dfrac{l(g)}{w}\in H_1$；

(ii) $g_1=\gamma_1g(a),g_2=\gamma_2g(b),g_3=\delta_1g(c-),g_4=\delta_2g(c+)$；

(iii) $z_1=J\left[\alpha_1g(a)+\alpha_2g^{[1]}(a)+\alpha_3g(b)\right]$，$z_2=J\left[\beta_1g(a)+\beta_2g(b)+\beta_3g^{[1]}(b)\right]$，

$$z_3=J\left[\theta_1g(c-)+\theta_2g^{[1]}(c-)+\theta_3g(c+)\right],\quad z_4=J\left[\sigma_1g(c-)+\sigma_2g(c+)+\sigma_3g^{[1]}(c+)\right];$$

(iv) $z(x)=-(pg')'+qg$。

对 $\forall F\in C_0^\infty\oplus\{0\}^4\subset D(T)$，由 $\langle TF,JG\rangle=\langle F,Z\rangle$ 可得

$$\rho\int_a^c l(f)gw\mathrm{d}x+\eta\int_c^b l(f)gw\mathrm{d}x=\rho\int_a^c f\overline{z}w\mathrm{d}x+\eta\int_c^b f\overline{z}w\mathrm{d}x,$$

即 $\left\langle\frac{l(f)}{w},Jg\right\rangle_w=\langle f,z\rangle_w$，由标准 Sturm-Liouville 理论，(i)和(iv)成立。

由 $\langle TF,JG\rangle=\langle F,Z\rangle$ 及(iv)可知

$$\begin{aligned}&\left\langle\frac{l(f)}{w},g\right\rangle_w+m_1M_1(f)\overline{Jg_1}+m_2M_2(f)\overline{Jg_2}+m_3N_1(f)\overline{Jg_3}+m_4N_2(f)\overline{Jg_4}\\&=\left\langle f,\frac{Jl(g)}{w}\right\rangle_w+m_1M_1'(f)\overline{z_1}+m_2M_2'(f)\overline{z_2}+m_3N_1'(f)\overline{z_3}+m_4N_2'(f)\overline{z_4},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{l(f)}{w},Jg\right\rangle_w=&\left\langle f,\frac{Jl(g)}{w}\right\rangle_w+m_1\left[M_1'(f)\overline{z_1}-M_1(f)g_1\right]+m_2\left[M_2'(f)\overline{z_2}-M_2(f)g_2\right]\\&+m_3\left[N_1'(f)\overline{z_3}-N_1(f)g_3\right]+m_4\left[N_2'(f)\overline{z_4}-N_2(f)g_4\right].\end{aligned}$$

另一方面，

$$\left\langle\frac{l(f)}{w},Jg\right\rangle_w=\left\langle f,\frac{Jl(g)}{w}\right\rangle_w+\rho[f,g](c-)-\rho[f,g](c-)+\eta[f,g](b)-\eta[f,g](c+),$$

因此，结合(7)式有

$$\begin{aligned}&m_1\left[M_1'(f)\overline{z_1}-M_1(f)g_1\right]+m_2\left[M_2'(f)\overline{z_2}-M_2(f)g_2\right]\\&+m_3\left[N_1'(f)\overline{z_3}-N_1(f)g_3\right]+m_4\left[N_2'(f)\overline{z_4}-N_2(f)g_4\right]\\&=\rho[f,g](c-)-\rho[f,g](a)+\eta[f,g](b)-\eta[f,g](c+)\\&=\rho\mathcal{G}^{\mathrm{T}}(c-)\mathcal{E}\mathcal{F}(c-)-\rho\mathcal{G}^{\mathrm{T}}(a)\mathcal{E}\mathcal{F}(a)+\eta\mathcal{G}^{\mathrm{T}}(b)\mathcal{E}\mathcal{F}(b)-\eta\mathcal{G}^{\mathrm{T}}(c+)\mathcal{E}\mathcal{F}(c+).\end{aligned}\tag{8}$$

其中，$\mathcal{F}=\left(f,f^{[1]}\right)^{\mathrm{T}}$，$\mathcal{G}=\left(g,g^{[1]}\right)$，$\mathcal{E}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$。

根据引理 2，结合 J-自伴算子的定义可知，存在函数 $\mathcal{F}\in D(T)$，使得

$$\mathcal{F}(c+)=\mathcal{F}(c-)=\mathcal{F}(b)=\mathbf{0},f(a)=0,f'(a)=-\frac{\gamma_1}{\rho},$$

此时

$$M_1'(f)=M_2'(f)=N_1'(f)=N_2'(f)=M_2(f)=N_1(f)=N_2(f)=0,M(f)=-\frac{\alpha_2\gamma_1}{\rho},$$

于是结合(8)式可知 $g_1=\gamma_1 g(a)$。同理，根据引理 2，令

$$\mathcal{F}(c+)=\mathcal{F}(c-)=\mathcal{F}(a)=\mathbf{0},f(b)=0,f^{[1]}(b)=-\frac{\gamma_2}{\eta},\tag{9}$$

$$\mathcal{F}(c+)=\mathcal{F}(a)=\mathcal{F}(b)=\mathbf{0},f(c-)=0,f^{[1]}(c-)=-\frac{\delta_1}{\rho},\tag{10}$$

$$\mathcal{F}(c+)=\mathcal{F}(a)=\mathcal{F}(b)=\mathbf{0}, f(c-)=0, f^{[1]}(c-)=-\frac{\delta_1}{\rho}, \tag{11}$$

将(9)~(11)式分别代入(8)式，即可求得

$$g_2=\gamma_2 g(b),\ g_3=\delta_1 g(c-),\ g_4=\delta_2 g(c+),$$

所以(ii)成立。

利用与(ii)的证明类似的方法，可以证明(iii)成立。事实上，根据引理 2，选取

$$\mathcal{F}(c+)=\mathcal{F}(c-)=\mathbf{0}, f(b)=0, f(a)=1, f^{[1]}(a)=-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, f^{[1]}(b)=-\frac{\beta_1}{\beta_3}, \tag{12}$$

$$\mathcal{F}(c+)=\mathcal{F}(c-)=\mathbf{0}, f(a)=0, f(b)=1, f^{[1]}(a)=-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}, f^{[1]}(b)=-\frac{\beta_2}{\beta_3}, \tag{13}$$

$$\mathcal{F}(a)=\mathcal{F}(b)=\mathbf{0}, f(c+)=0, f(c-)=1, f^{[1]}(c-)=-\frac{\theta_1}{\theta_2}, f^{[1]}(c+)=-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \tag{14}$$

$$\mathcal{F}(a)=\mathcal{F}(b)=\mathbf{0}, f(c-)=0, f(c+)=1, f^{[1]}(c-)=-\frac{\theta_3}{\theta_2}, f^{[1]}(c+)=-\frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \tag{15}$$

将(12)~(15)式分别代入(8)式，可以得到

$$\overline{z_1}=\alpha_1 g(a)+\alpha_2 g^{[1]}(a)+\alpha_3 g(b), \overline{z_2}=\beta_1 g(a)+\beta_2 g(b)+\beta_3 g^{[1]}(b),$$

$$\overline{z_3}=\theta_1 g(c-)+\theta_2 g^{[1]}(c-)+\theta_3 g(c+), \overline{z_4}=\sigma_1 g(c-)+\sigma_2 g(c+)+\sigma_3 g^{[1]}(c+),$$

所以(iii)成立。

综上所述，算子 T 是 J-自伴算子。

根据定义 3 及 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中内积的定义可得：

推论 1 若 λ_1 和 λ_2 是算子 T 两个不同的特征值，则相应的特征函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在如下内积意义下是 C-正交的：

$$\rho\int_a^c fgw\mathrm{d}x+\eta\int_c^b fgw\mathrm{d}x+m_1M_1'(f)M_1'(g)+m_2M_2'(f)M_2'(g)+m_3N_1'(f)N_1'(g)+m_4N_2'(f)N_2'(g)=0\,.$$

5. 格林函数

首先，定义微分方程(1)的基本解为 $\varphi(x,\lambda)=\begin{cases}\varphi_1(x,\lambda), & x\in[a,c)\\ \varphi_2(x,\lambda), & x\in(c,b]\end{cases}$ 和 $\chi(x,\lambda)=\begin{cases}\chi_1(x,\lambda), & x\in[a,c)\\ \chi_2(x,\lambda), & x\in(c,b]\end{cases}$。

设 $\varphi_1(x,\lambda),\chi_1(x,\lambda)$ 是方程(1)在区间 $[a,c)$ 上满足如下初始条件的线性无关解

$$\varphi_1(a,\lambda)=1, \varphi_1^{[1]}(a,\lambda)=0, \chi_1(a,\lambda)=0, \chi_1^{[1]}(a,\lambda)=1,$$

其中 $\varphi^{[1]}=p\varphi'$，它们的 Wronski 行列式独立于变量 x，记为 $\omega_1(\lambda)$，且

$$\omega_1(\lambda)=\omega_1(\lambda)\big|_{x=a}=\begin{vmatrix}\varphi_1(a,\lambda) & \varphi_1^{[1]}(a,\lambda)\\ \chi_1(a,\lambda) & \chi_1^{[1]}(a,\lambda)\end{vmatrix}=1\,.$$

设 $\varphi_2(x,\lambda),\chi_2(x,\lambda)$ 是方程(1)在区间 $(c,b]$ 上满足如下初始条件的解

$$\varphi_2(c+,\lambda)=-\frac{1}{\theta_3}\Big[(\theta_1-\lambda\delta_1)\varphi_1(c-,\lambda)+\theta_2\varphi_1^{[1]}(c-,\lambda)\Big], \tag{16}$$

$$\varphi_2^{[1]}(c+,\lambda)=\frac{1}{\eta}\left\{\left[(\sigma_2-\lambda\delta_2)(\theta_1-\lambda\delta_1)-\theta_3\sigma_1\right]\varphi_1(c-,\lambda)+(\sigma_2-\lambda\delta_2)\theta_2\varphi_1^{[1]}(c-,\lambda)\right\}, \tag{17}$$

$$\chi_2(c+,\lambda)=-\frac{1}{\theta_3}\left[(\theta_1-\lambda\delta_1)\chi_1(c-,\lambda)+\theta_2\chi_1^{[1]}(c-,\lambda)\right], \tag{18}$$

$$\chi_2^{[1]}(c+,\lambda)=\frac{1}{\eta}\left\{\left[(\sigma_2-\lambda\delta_2)(\theta_1-\lambda\delta_1)-\theta_3\sigma_1\right]\chi_1(c-,\lambda)+(\sigma_2-\lambda\delta_2)\theta_2\chi_1^{[1]}(c-,\lambda)\right\}. \tag{19}$$

函数 $\varphi_2(x,\lambda),\chi_2(x,\lambda)$ 的 Wronski 行列式独立于变量 x，记为 $\omega_2(\lambda)$。

引理 4 对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$，有 $\eta\omega_2(\lambda)=\rho\omega_1(\lambda)$ 成立。

证明 因为 Wronski 行列式独立于变量 x，所以有

$$\omega_2(\lambda)=\omega_2(\lambda)\big|_{x=c}=\begin{vmatrix}\varphi_2(c+,\lambda) & \varphi_2^{[1]}(c+,\lambda)\\ \chi_2(c+,\lambda) & \chi_2^{[1]}(c+,\lambda)\end{vmatrix},$$

将(16)~(19)代入上式，经计算化简得

$$\begin{aligned}\omega_2(\lambda)&=-\frac{1}{\theta_3\eta}\left\{\begin{vmatrix}\theta_2\varphi_1^{[1]}(c-,\lambda) & 0\\ (\sigma_2-\lambda\delta_2)\theta_2\varphi_1^{[1]}(c-,\lambda) & -\theta_3\sigma_1\chi_1(c-,\lambda)\end{vmatrix}\right.\\ &\quad\left.+\begin{vmatrix}0 & \theta_2\chi_1^{[1]}(c-,\lambda)\\ -\theta_3\sigma_1\varphi_1(c-,\lambda) & (\sigma_2-\lambda\delta_2)\theta_2\chi_1^{[1]}(c-,\lambda)\end{vmatrix}\right\}\\ &=\frac{\rho}{\eta}\omega_1(\lambda).\end{aligned}$$

引理 5 设

$$y(x,\lambda)=\begin{cases}y_1(x,\lambda), & x\in[a,c),\\ y_2(x,\lambda), & x\in(c,b],\end{cases}$$

是微分方程(1)的任意一个解，则此解可以表示为

$$y(x,\lambda)=\begin{cases}d_1\varphi_1(x,\lambda)+d_2\chi_1(x,\lambda), & x\in[a,c),\\ d_3\varphi_2(x,\lambda)+d_4\chi_2(x,\lambda), & x\in(c,b],\end{cases}$$

若 $y(x,\lambda)$ 满足转移条件(3)，则 $d_1=d_3,d_2=d_4$。

证明 将 $y(x,\lambda)$ 的表达式代入转移条件(3)，有

$$\begin{pmatrix}\theta_1-\lambda\delta_1 & \theta_2\\ \sigma_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\varphi_1(c-,\lambda)+d_2\chi_1(c-,\lambda)\\ d_1\varphi_1^{[1]}(c-,\lambda)+d_2\chi_1^{[1]}(c-,\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\theta_3 & 0\\ \sigma_2-\lambda\delta_2 & \sigma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_3\varphi_2(c+,\lambda)+d_4\chi_2(c+,\lambda)\\ d_3\varphi_2^{[1]}(c+,\lambda)+d_4\chi_2^{[1]}(c+,\lambda)\end{pmatrix}=0, \tag{20}$$

将(16)~(19)代入(20)式，得到关于 d_1-d_3,d_2-d_4 的方程组

$$\begin{cases}\left[(\theta_1-\lambda\delta_1)\varphi_1(c-,\lambda)+\theta_2\varphi_1^{[1]}(c-,\lambda)\right](d_1-d_3)+\left[(\theta_1-\lambda\delta_1)\chi_1(c-,\lambda)+\theta_2\chi_1^{[1]}(c-,\lambda)\right](d_2-d_4)=0,\\ \sigma_1\varphi_1(c-,\lambda)(d_1-d_3)+\sigma_1\chi_1(c-,\lambda)(d_2-d_4)=0.\end{cases} \tag{21}$$

方程组(21)的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}(\theta_1-\lambda\delta_1)\varphi_1(c-,\lambda)+\theta_2\varphi_1^{[1]}(c-,\lambda) & (\theta_1-\lambda\delta_1)\chi_1(c-,\lambda)+\theta_2\chi_1^{[1]}(c-,\lambda)\\ \sigma_1\varphi_1(c-,\lambda) & \sigma_1\chi_1(c-,\lambda)\end{vmatrix}=\rho\omega_1(\lambda)\neq 0,$$

从而可得 $d_1=d_3,d_2=d_4$。

设 $\Phi_1(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda) & \chi_1(x,\lambda)\\ \varphi_1^{[1]}(x,\lambda) & \chi_1^{[1]}(x,\lambda)\end{pmatrix}$，$\Phi_2(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_2(x,\lambda) & \chi_2(x,\lambda)\\ \varphi_2^{[1]}(x,\lambda) & \chi_2^{[1]}(x,\lambda)\end{pmatrix}$，则有

定理 2 复数 λ 是问题(1)~(3)的特征值，当且仅当 λ 满足 $\Delta(\lambda)=\det(A+B\Phi(b,\lambda))=0$。

证明 设 λ_0 是问题(1)~(3)的特征值，$y(x,\lambda_0)$ 为相应的特征函数。由引理 5 知，存在不全为零的常数 c_1,c_2，使得

$$y(x,\lambda_0)=\begin{cases}c_1\varphi_1(x,\lambda_0)+c_2\chi_1(x,\lambda_0),x\in[a,c),\\ c_1\varphi_2(x,\lambda_0)+c_2\chi_2(x,\lambda_0),x\in(c,b].\end{cases}$$

将 $y(x,\lambda_0)$ 代入边界条件(2)可得

$$A\begin{pmatrix}c_1\varphi_1(a,\lambda_0)+c_2\chi_1(a,\lambda_0)\\ c_1\varphi_1^{[1]}(a,\lambda_0)+c_2\chi_1^{[1]}(a,\lambda_0)\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}c_1\varphi_2(b,\lambda_0)+c_2\chi_2(b,\lambda_0)\\ c_1\varphi_2^{[1]}(b,\lambda_0)+c_2\chi_2^{[1]}(b,\lambda_0)\end{pmatrix}=0,$$

即

$$\left(A+B\Phi(b,\lambda_0)\right)(c_1,c_2)^{\mathrm{T}}=0, \tag{22}$$

反之，若 $\det(A+B\Phi(b,\lambda_0))=0$，则关于 c_1,c_2 的齐次线性方程组(22)有非零解 $(c_1',c_2')^{\mathrm{T}}$。令

$$y(x,\lambda_0)=\begin{cases}c_1'\varphi_1(x,\lambda_0)+c_2'\chi_1(x,\lambda_0),x\in[a,c),\\ c_1'\varphi_2(x,\lambda_0)+c_2'\chi_2(x,\lambda_0),x\in(c,b],\end{cases}$$

则 $y(x,\lambda_0)$ 是方程(1)满足条件(2)和(3)的非零解。因此 λ_0 是问题(1)~(3)的特征值。

令 $\Omega=\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,\Delta(\lambda)\neq 0\}$。考虑非齐次微分方程

$$l(y)-\lambda wy=f(x)w,\quad x\in I, \tag{23}$$

具有边界条件和转移条件(2)~(3)，其中 $\lambda\in\Omega, f\in H$，

设齐次微分方程 $l(y)-\lambda wy=0, x\in I$ 的通解为

$$y(x,\lambda)=\begin{cases}y_1(x,\lambda)=C_1\varphi_1(x,\lambda)+C_2\chi_1(x,\lambda),\ x\in[a,c),\\ y_2(x,\lambda)=C_3\varphi_2(x,\lambda)+C_4\chi_2(x,\lambda),\ x\in(c,b],\end{cases}$$

则非齐次微分方程(23)的通解为

$$y(x,\lambda)=\begin{cases}y_1(x,\lambda)=C_1(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda)+C_2(x,\lambda)\chi_1(x,\lambda),\ x\in[a,c),\\ y_2(x,\lambda)=C_3(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)+C_4(x,\lambda)\chi_2(x,\lambda),x\in(c,b].\end{cases}$$

当 $x\in[a,c)$ 时，$C_1(x,\lambda),C_2(x,\lambda)$ 满足线性方程组

$$\begin{cases}C_1'(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda)+C_2'(x,\lambda)\chi_1(x,\lambda)=0,\\ C_1'(x,\lambda)\varphi_1^{[1]}(x,\lambda)+C_2'(x,\lambda)\chi_1^{[1]}(x,\lambda)=-f(x)w(x),\end{cases} \tag{24}$$

当 $x\in(c,b]$ 时，$C_3(x,\lambda),C_4(x,\lambda)$ 满足线性方程组

$$\begin{cases}C_3'(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)+C_4'(x,\lambda)\chi_2(x,\lambda)=0,\\ C_3'(x,\lambda)\varphi_2^{[1]}(x,\lambda)+C_4'(x,\lambda)\chi_2^{[1]}(x,\lambda)=-f(x)w(x),\end{cases} \tag{25}$$

当 $x\in[a,c)$ 时，方程组(24)的解可以表示为

$$C_1(x,\lambda)=\int_a^x \chi_1(t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t+k_1,\ C_2(x,\lambda)=-\int_a^x \varphi_1(t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t+k_2,$$

当 $x\in(c,b]$ 时，方程组(25)的解可以表示为

$$C_3(x,\lambda)=\frac{\eta}{\rho}\int_c^x \chi_2(t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t+k_3,\ C_4(x,\lambda)=-\frac{\eta}{\rho}\int_c^x \varphi_2(t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t+k_4,$$

于是

$$y_1(x,\lambda)=\int_a^x\left[\varphi_1(x,\lambda)\chi_1(t,\lambda)-\chi_1(x,\lambda)\varphi_1(t,\lambda)\right]f(t)w(t)\mathrm{d}t+k_1\varphi_1(x,\lambda)+k_2\chi_1(x,\lambda), \tag{26}$$

$$y_2(x,\lambda)=\frac{\eta}{\rho}\int_c^x\left[\varphi_2(x,\lambda)\chi_2(t,\lambda)-\chi_2(x,\lambda)\varphi_2(t,\lambda)\right]f(t)w(t)\mathrm{d}t+k_3\varphi_2(x,\lambda)+k_4\chi_2(x,\lambda), \tag{27}$$

其中 k_1,k_2,k_3,k_4 为任意常数。

下面求常数 k_1,k_2,k_3,k_4。将(26)，(27)代入转移条件(3)，根据 $\varphi_2(x,\lambda),\chi_2(x,\lambda)$ 满足的初始条件(16)~(19)可得如下方程组

$$\begin{cases}\chi_2(c+,\lambda)\int_a^c\varphi_1(t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t-\varphi_2(c+,\lambda)\int_a^c\chi_1(t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t+(k_3-k_1)\varphi_2(c+,\lambda)+(k_4-k_2)\chi_2(c+,\lambda)=0,\\ \chi_1(c-,\lambda)\int_a^c\varphi_1(t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t-\varphi_1(c-,\lambda)\int_a^c\chi_1(t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t+(k_3-k_1)\varphi_1(c-,\lambda)+(k_4-k_2)\chi_1(c-,\lambda)=0,\end{cases}$$

由此方程组求出

$$k_3=k_1+\int_a^c\chi_1(t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t,\ k_4=k_2-\int_a^c\varphi_1(t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t, \tag{28}$$

将(28)代入(27)中，可得

$$\begin{aligned}y_2(x,\lambda)=&\int_a^c\left[\varphi_2(x,\lambda)\chi_1(t,\lambda)-\chi_2(x,\lambda)\varphi_1(t,\lambda)\right]f(t)w(t)\mathrm{d}t\\&+\frac{\eta}{\rho}\int_c^x\left[\varphi_2(x,\lambda)\chi_2(t,\lambda)-\chi_2(x,\lambda)\varphi_2(t,\lambda)\right]f(t)w(t)\mathrm{d}t\\&+k_1\varphi_2(x,\lambda)+k_2\chi_2(x,\lambda).\end{aligned}$$

从而 $y(x,\lambda)$ 可以表示为

$$y(x,\lambda)=\int_a^b K(x,t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t+k_1\varphi(x,\lambda)+k_2\chi(x,\lambda), \tag{29}$$

其中

$$K(x,t,\lambda)=\begin{cases}\varphi_1(x,\lambda)\chi_1(t,\lambda)-\chi_1(x,\lambda)\varphi_1(t,\lambda), & a\le t\le x<c,\\ 0, & a\le x\le t<c,\\ 0, & a\le x<c,c<t\le b,\\ \varphi_2(x,\lambda)\chi_1(t,\lambda)-\chi_2(x,\lambda)\varphi_1(t,\lambda), & a\le t<c,c<x\le b,\\ \eta/\rho\left[\varphi_2(x,\lambda)\chi_2(t,\lambda)-\chi_2(x,\lambda)\varphi_2(t,\lambda)\right], & c<t\le x\le b,\\ 0, & c<x\le t\le b.\end{cases}$$

将边界条件(2)表示为如下形式

$$\begin{aligned}U_1(y)=(\alpha_1-\lambda\gamma_1)y(a)+\alpha_2 y^{[1]}(a)+\alpha_3 y(b)=0,\\ U_2(y)=\beta_1 y(a)+(\beta_2-\lambda\gamma_2)y(b)+\beta_3 y^{[1]}(b)=0,\end{aligned} \tag{30}$$

将(29)代入(30)可得

$$\begin{cases} k_1U_1(\varphi(x,\lambda))+k_2U_1(\chi(x,\lambda))=-\int_a^b U_1(K)f(t)w(t)\mathrm{d}t, \\ k_1U_2(\varphi(x,\lambda))+k_2U_2(\chi(x,\lambda))=-\int_a^b U_2(K)f(t)w(t)\mathrm{d}t, \end{cases}$$

关于 k_1,k_2 的方程组系数行列式为

$$\begin{vmatrix} U_1(\varphi(x,\lambda)) & U_1(\chi(x,\lambda)) \\ U_2(\varphi(x,\lambda)) & U_2(\chi(x,\lambda)) \end{vmatrix} = \det(A+B\Phi(b,\lambda))=\Delta(\lambda)\neq 0 .$$

根据克莱姆法则可得

$$k_1=\frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)},\ \ k_2=\frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

其中

$$\Delta_1(\lambda)=\begin{vmatrix} -\int_a^b U_1(K)f(t)w(t)\mathrm{d}t & U_1(\chi(x,\lambda)) \\ -\int_a^b U_2(K)f(t)w(t)\mathrm{d}t & U_2(\chi(x,\lambda)) \end{vmatrix},\ \Delta_2(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(\varphi(x,\lambda)) & -\int_a^b U_1(K)f(t)w(t)\mathrm{d}t \\ U_2(\varphi(x,\lambda)) & -\int_a^b U_2(K)f(t)w(t)\mathrm{d}t \end{vmatrix},$$

将 k_1,k_2 代入(29)中可得

$$\begin{aligned} y(x,\lambda)&=\int_a^b K(x,t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left(\Delta_1(\lambda)\varphi(x,\lambda)+\Delta_2(\lambda)\chi(x,\lambda)\right) \\ &=\int_a^b\left(K(x,t,\lambda)+\frac{1}{\Delta(\lambda)}B(x,t,\lambda)\right)f(t)w(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

进一步，$y(x,\lambda)$ 亦可表示为

$$y(x,\lambda)=\int_a^b G(x,t,\lambda)f(t)w(t)\mathrm{d}t, \tag{31}$$

其中

$$G(x,t,\lambda)=K(x,t,\lambda)+\frac{1}{\Delta(\lambda)}B(x,t,\lambda),\ \ B(x,t,\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(\varphi(x,\lambda)) & U_1(\chi(x,\lambda)) & U_1(K) \\ U_2(\varphi(x,\lambda)) & U_2(\chi(x,\lambda)) & U_2(K) \\ \varphi(x,\lambda) & \chi(x,\lambda) & 0 \end{vmatrix}.$$

定义 7 由式(31)表出的积分核 $G(x,t,\lambda)$ 称为算子 T 的格林函数。

基金项目

国家自然科学基金(12261066)；内蒙古自然科学基金(2023LHMS01015)；内蒙古自治区直属高校基本科研业务费项目(JY20240043)。

参考文献

[1] Titeux, I. and Yakubov, Y. (1997) Completeness of Root Functions for Thermal Conduction in a Strip with Piecewise Continuous Coefficients. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **7**, 1035-1050. https://doi.org/10.1142/s0218202597000529

[2] Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A. (1963) Equations of Mathematical Physics. Pergamon Press.

[3] Mukhtarov, O.S. and Kadakal, M. (2005) Some Spectral Properties of One Sturm-Liouville Type Problem with Discontinuous Weight. *Siberian Mathematical Journal*, **46**, 681-694. https://doi.org/10.1007/s11202-005-0069-z

[4] Hao, X., Sun, J., Wang, A. and Yao, S. (2009) Completeness of Eigenfunctions of Sturm-Liouville Problems with

Transmission Conditions. *Methods and Applications of Analysis*, **16**, 299-312. https://doi.org/10.4310/maa.2009.v16.n3.a2

[5] 李昆, 郑召文. 一类具有转移条件的 Sturm-Liouville 方程的谱性质[J]. 数学物理学报, 2015, 35(5): 910-926.

[6] Zhang, X. and Sun, J. (2017) Green Function of Fourth-Order Differential Operator with Eigenparameter-Dependent Boundary and Transmission Conditions. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Series*, **33**, 311-326. https://doi.org/10.1007/s10255-017-0661-6

[7] Cai, J., Zheng, Z. and Li, K. (2022) A Class of Singular Sturm-Liouville Problems with Discontinuity and an Eigenparameter-Dependent Boundary Condition. *Mathematics*, **10**, Article 4430. https://doi.org/10.3390/math10234430

[8] Akdoğan, Z., Demirci, M. and Mukhtarov, O.S. (2005) Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter-Dependent Boundary and Transmissions Conditions. *Acta Applicandae Mathematicae*, **86**, 329-344. https://doi.org/10.1007/s10440-004-7466-3

[9] Hıra, F. and Altınışık, N. (2015) Sampling Theory for Sturm-Liouville Problem with Boundary and Transmission Conditions Containing an Eigenparameter. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **66**, 1737-1749. https://doi.org/10.1007/s00033-015-0505-2

[10] 郭永霞. 常型 Sturm-Liouville 算子的逆谱问题[D]: [博士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2015.

[11] Bartels, C., Currie, S. and Watson, B.A. (2021) Sturm-Liouville Problems with Transfer Condition Herglotz Dependent on the Eigenparameter: Eigenvalue Asymptotics. *Complex Analysis and Operator Theory*, **15**, Article No. 71. https://doi.org/10.1007/s11785-021-01119-1

[12] Du, G., Gao, C. and Wang, J. (2023) Spectral Analysis of Discontinuous Sturm-Liouville Operators with Herglotzs Transmission. *Electronic Research Archive*, **31**, 2108-2119. https://doi.org/10.3934/era.2023108

[13] Knowles, I. (1981) On the Boundary Conditions Characterizing J-Selfadjoint Extensions of J-Symmetric Operators. *Journal of Differential Equations*, **40**, 193-216. https://doi.org/10.1016/0022-0396(81)90018-8

[14] Race, D. (1985) The Theory of J-Selfadjoint Extensions of J-Symmetric Operators. *Journal of Differential Equations*, **57**, 258-274. https://doi.org/10.1016/0022-0396(85)90080-4

[15] Shang, Z. (1988) On J-Selfadjoint Extensions of J-Symmetric Ordinary Differential Operators. *Journal of Differential Equations*, **73**, 153-177. https://doi.org/10.1016/0022-0396(88)90123-4

[16] Li, J. and Xu, M. (2022) J-Selfadjointness of a Class of High-Order Differential Operators with Transmission Conditions. *Frontiers of Mathematics*, **17**, 1025-1035. https://doi.org/10.1007/s11464-022-1032-z

[17] 王忠, 傅守忠. 线性算子谱理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[18] Zettl, A. (2005) Sturm-Liouville Theory. American Mathematical Society, New York.