Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(1), 386-396**
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.141038

Hans汉斯

一类链环的Writhe多项式及性质

刘芷夷

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年12月27日；录用日期：2025年1月18日；发布日期：2025年1月29日

摘　要

Writhe多项式在虚拟纽结理论中占据一定地位。Writhe多项式与虚拟纽结的虚拟交叉点数下界存在一定联系，并可以找到与利用奇writhe多项式和Henrich的多项式中任何一个判断出来的forbidden数下界相比一样强或更强的下界。本文针对给出的一类虚拟纽结，计算出其writhe多项式并利用writhe多项式和二阶writhe多项式研究其虚拟交叉点数的下界和forbidden数的下界，同时还讨论了writhe多项式和二阶writhe多项式对该类虚拟纽结和其突变体的影响。

关键词

高斯图，Writhe多项式，突变体

The Writhe Polynomials and Properties of a Class of Links

Zhiyi Liu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 27th, 2024; accepted: Jan. 18th, 2025; published: Jan. 29th, 2025

Abstract

The writhe polynomial occupies a certain position in virtual knot theory. The writhe polynomial has some relationship with the virtual crossing number lower bound of the virtual knot, and can find a lower bound as strong or stronger than the forbidden number lower bound judged using either of the odd writhe polynomial and Henrich's polynomial. In this paper, writhe polynomials are calculated for a class of virtual knots, the writhe polynomial and the second-order writhe polynomial are used to study a lower bound of virtual crossing number and a lower bound of the forbidden number for a class of virtual knots, and the effects of the writhe polynomial and the second-order writhe polynomial on the virtual knots and their mutants are also discussed.

文章引用: 刘芷夷. 一类链环的 Writhe 多项式及性质[J]. 应用数学进展, 2025, 14(1): 386-396.
DOI: 10.12677/aam.2025.141038

Keywords

Gauss Diagrams, Writhe Polynomial, Mutant

1. 引言

Kauffman [1]于 1996 年引入虚结理论，以图解和几何方式研究高斯编码。2013 年 Cheng and Cao [2]给出了 writhe 多项式 $W_K(t)$ 的定义并证明 $W_K(t)$ 是一个虚结不变量。Crans，Ganzell and Blake Mellor [3]根据交叉点数找到了 forbidden 数的上界，根据 Cheng 的奇 writhe 多项式[4]找到了下界。Sakurai [5]利用 Henrich [6]的多项式发现了另一个(通常更强的)下界。由于奇 writhe 多项式和 Henrich 的多项式都是由 writhe 多项式 $W_K(t)$ 导出的，因此可以使用 writhe 多项式找到与利用它们中的任何一个得到的下界相比一样强(或更强)的下界。2016 年 Blake Mellor [7]给出了 writhe 多项式 $W_K(t)$ 与虚拟纽结的虚拟交叉点数的关系，定义了二阶 writhe 多项式 $V_K(t)$，同时又在找出虚拟纽结 forbidden 数的下界以及一些情况下利用 $V_K(t)$ 区分虚拟纽结及其突变体方面给出了相关结论与方法。

本文的组织结构为：在第 2 节中，我们回顾了虚拟纽结和高斯图的相关定义，以及 writhe 多项式的定义。此外，在这一节中还回顾了 writhe 多项式与虚拟纽结的虚拟交叉点数的下界和 forbidden 数的下界的关系，在第 3 节中，对于给出的一类虚拟纽结利用 writhe 多项式和二阶 writhe 多项式研究其虚拟交叉点数的下界和 forbidden 数的下界并给出结果，在第 4 节中，讨论了 writhe 多项式和二阶 writhe 多项式对该类虚拟纽结和其突变体的影响。在第 5 节中，对本文的主要研究结果进行总结。

2. 预备知识

2.1. 虚拟纽结图等价[7]

虚拟纽结图中包含经典交叉点(正/负交叉点)和虚拟交叉点，如图 1 所示。如果两个虚拟纽结图可由图 2 所示的一系列 Reidemeister moves 联系起来，则它们是等价的。

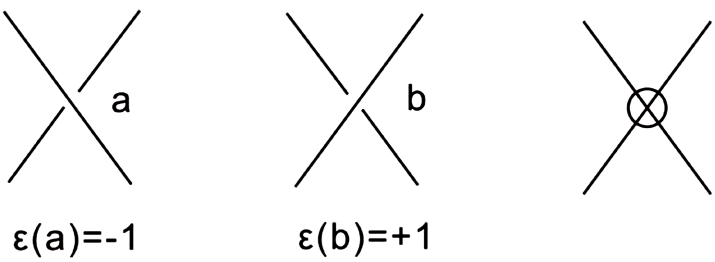

Figure 1. The crossings of three types in the virtual knot diagram
图 1. 虚拟纽结图中三种类型的交叉点

2.2. 广义 Reidemeister Moves [8]

虚拟 Reidemeister moves 是由经典 Reidemeister moves 推广而来的。广义 Reidemeister moves 包括经典 Reidemeister moves 和虚拟 Reidemeister moves，变换方式如图 2 所示。

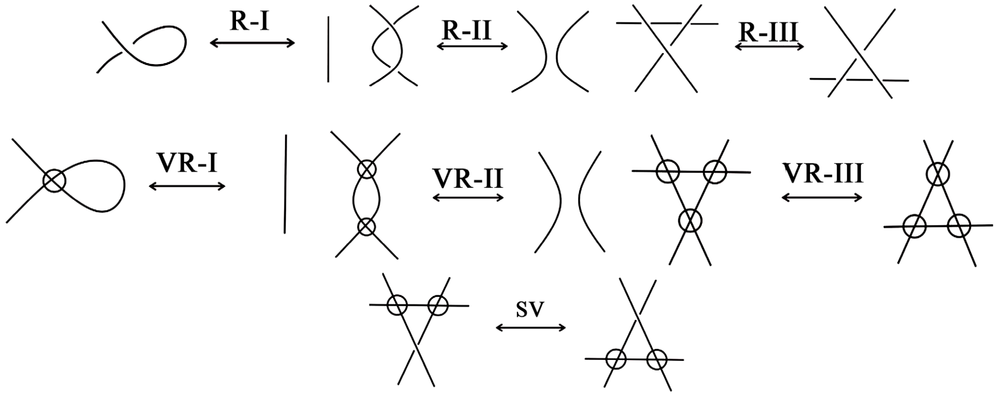

Figure 2. Generalized Reidemeister moves
图 2. 广义 Reidemeister moves

2.3. 高斯图及相关指标[7]

高斯图 G 由有向圆 S^1 和 m 个($m \geq 0$)有符号的有向弦组成，这些弦连接 S^1 上的 $2m$ 个点，这 $2m$ 个点对应高斯代码中的 $2m$ 个三元组，弦的方向是由上交叉点指向下交叉点，并用弦对应的交叉点的符号标记该弦。

设 $c=\overrightarrow{PQ}$ 是 G 中符号为 $\varepsilon(c)$，方向从 P 指向 Q 的弦，分别用 $\varepsilon(P)$ 和 $\varepsilon(Q)$ 表示端点 P，Q 的符号，使得 $\varepsilon(P)=-\varepsilon(c)$，$\varepsilon(Q)=\varepsilon(c)$。现令 α 为 S^1 上从 P 指向 Q 的弧，β 为 S^1 上从 Q 到 P 的弧(α,β 均遵循 S^1 的方向)，如图 3 所示。

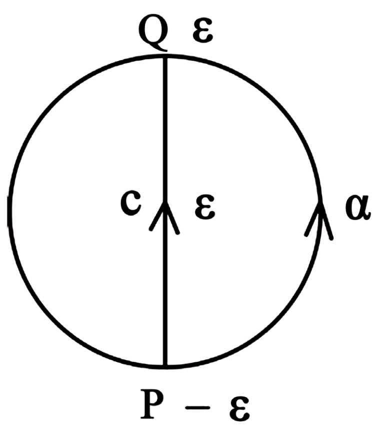

Figure 3. Gauss diagram
图 3. 高斯图

c 的右上指标：弧 α 上所有上交叉点的符号的和，记作 $RO(c)$；
c 的右下指标：弧 α 上所有下交叉点的符号的和，记作 $RU(c)$；
c 的左上指标：弧 β 上所有上交叉点的符号的和，记作 $LO(c)$；
c 的左下指标：弧 β 上所有下交叉点的符号的和，记作 $LU(c)$；
c 的指标，记作 $Ind(c)$：$Ind(c)=RO(c)+RU(c)=-LO(c)-LU(c)$。

2.4. 拧数[7]

给定一个纽结图 D，图 D 中所有交叉点的符号之和称为 D 的拧数，记作 $Wr(D)$。

2.5. *n*-拧数[9]

给定一个纽结图 D，图 D 中所有 $Ind = n$ 的交叉点的符号的和称为 n-拧数，记作 $\omega_n(D)$，即 $\omega_n(D) = \sum_{Ind(c)=n} \varepsilon(c)$。

2.6. Writhe 多项式[7]

对于具有图 D 的任意虚拟纽结 K，定义 $\omega_n(K) = \omega_n(D)\ (n \neq 0)$，$\omega_0(K) = \omega_0(D) - Wr(D)$，则 K 的 writhe 多项式 $W_K(t)$ 定义为 $W_K(t) = \sum_{n \in Z} \omega_n(K) t^n$。

2.7. 虚拟交叉点数[8]

给定一个虚拟纽结图 D，设 $vc(D)$ 为 D 的虚拟交叉点数，则对于虚拟纽结 K，K 的虚拟交叉点数定义为表示 K 的所有图 D 中 $vc(D)$ 的最小值，记作 $vc(K)$。

3. 一类虚拟纽结的虚拟交叉点数的下界和 Forbidden 数的下界

定理 3.1 [7] 若 K 是虚拟纽结，则 $W_K(t)$ 的宽度 $\leq 2vc(K)$，其中 $W_K(t)$ 的宽度是 $W_K(t)$ 中 t 的最大幂次和最小幂次之差。

如果通过 $W_K(t) = (t-1)W_K'(t)$ 来定义 $W_K'(t)$，则有以下定理：

定理 3.2 [7] 设 K 是虚拟纽结，并且有 $W_K'(t) = \sum b_i t^i$，则 K 的 forbidden 数以 $\frac{1}{2}\sum|b_i|$ 为下界。

在上述两个定理的基础上，本节研究了关于给定的一类虚拟纽结 K 的虚拟交叉点数的下界以及 forbidden 数的下界情况。

定理 3.3 给定虚拟纽结 K 如图 4 所示，关于 $vc(K)$ 的下界和 K 的 forbidden 数的下界情况：

(1) 对于 $1 \leq k \leq 4$，$vc(K) \geq \frac{3}{2}$；对于 $k > 4$，$vc(K) \geq \frac{k-1}{2}$。

(2) 对于 $k = 1, 2$，K 的 forbidden 数的下界为 k；对于 $k \geq 3$，K 的 forbidden 数的下界为 $k-1$。

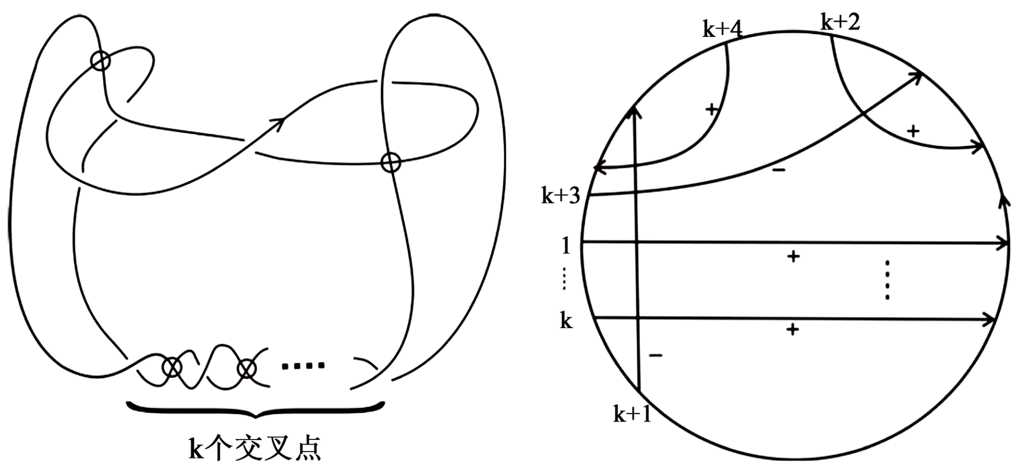

Figure 4. Knot diagram and Gauss diagram for virtual knot K

图 4. 虚拟纽结 K 的纽结图和高斯图

证明 首先，我们需要求出 K 的 writhe 多项式 $W_K(t)$。根据图 4 中 K 的纽结图可画出对应高斯图，通过高斯图可得到 K 中各交叉点的指标值和符号，结果如表 1 所示。

Table 1. The index value and sign of each crossing in the virtual knot K
表 1. 虚拟纽结 K 中各交叉点的指标值和符号

c_i	$Ind(c_i)$	$\varepsilon(c_i)$
$1\le i\le k$	1	+1
$i=k+1$	$k-2$	−1
$i=k+2$	1	+1
$i=k+3$	2	−1
$i=k+4$	−1	+1

将表中数据代入 $W_K(t)=\sum_{n\in Z}\omega_n(K)t^n$，计算出

$$W_K(t)=kt-t^{k-2}+t-t^2+t^{-1}-k=-t^{k-2}-t^2+(k+1)t+t^{-1}-k。$$

接下来根据定理 3.1 和定理 3.2，分别讨论 $vc(K)$ 的下界和 K 的 forbidden 数的下界情况。

先讨论 $vc(K)$ 的下界：

(1) 当 $-1\le k-2\le 2$ 时，即 $1\le k\le 4$， $W_K(t)$ 的宽度等于 3，则有 $vc(K)\ge\frac{3}{2}$；

(2) 当 $k-2>2$ 时，即 $k>4$， $W_K(t)$ 的宽度等于 $(k-2)-(-1)$，即 $k-1$，则有 $vc(K)\ge\frac{k-1}{2}$。

通过上述过程，整理得出如下结论：

(i) 对于 $1\le k\le 4$， $vc(K)\ge\frac{3}{2}$；

(ii) 对于 $k>4$， $vc(K)\ge\frac{k-1}{2}$。

接下来讨论 K 的 forbidden 数的下界：

(1) 当 $k-2=-1$ 时，即 $k=1$，此时 $W_K(t)=-t^2+2t-1=(t-1)(1-t)$，则 $W_K'(t)=1-t$；

(2) 当 $k-2=0$ 时，即 $k=2$，此时 $W_K(t)=-t^2+3t+t^{-1}-3=(t-1)(-t^{-1}-t+2)$，则 $W_K'(t)=-t^{-1}-t+2$；

(3) 当 $k-2=1$ 时，即 $k=3$，此时 $W_K(t)=-t^2+3t+t^{-1}-3=(t-1)(-t^{-1}-t+2)$，$W_K'(t)$ 结果与上一情况相同；

(4) 当 $k-2=2$ 时，即 $k=4$， 此时 $W_K(t)=-2t^2+5t+t^{-1}-4=(t-1)(-t^{-1}-2t+3)$， 则 $W_K'(t)=-t^{-1}-2t+3$；

(5) 当 $k>4$ 时，此时

$$W_K(t)=-t^{k-2}-t^2+(k+1)t+t^{-1}-k=(t-1)\left(-\sum_{i=2}^{k-3}t^i-2t-t^{-1}+(k-1)\right),$$

则 $W_K'(t)=-\sum_{i=2}^{k-3}t^i-2t-t^{-1}+(k-1)$。

通过上述讨论，结合定理 3.2 可整理得出以下结论：

(i) 对于 $k=1$，2，K 的 forbidden 数的下界为 k；

(ii) 对于 $k\ge 3$，K 的 forbidden 数的下界为 $k-1$。 □

$V_K(t)$ 也有关于 forbidden 数的信息，有时 $W_K(t)$ 平凡，可用 $V_K(t)$ 判断。下面简单介绍 $V_K(t)$。先给

出弦对的交替构型，即当我们绕边界圆一周时，它们的端点将出现上交叉点和下交叉点交替的情况。如图 5 所示，两条弦会有两种交替构型。同理，对于三条弦则有五种交替构型。

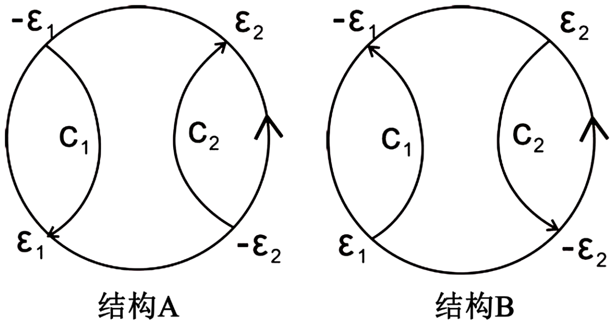

Figure 5. Alternating configurations of pairs of chords
图 5. 弦对的交替构型

给定虚拟纽结图 D，设 S_1 和 S_2 为结构 A 和 B 中弦对的集合(如图 5 所示)。定义[7]

$$V_D(t)=\frac{Wr(D)(Wr(D)+1)}{2}+\sum_{c}\varepsilon(c)t^{Ind(c)}\left[LO(c)-\left(\frac{1+\varepsilon(c)}{2}\right)\right]$$

$$+\sum_{\{c_i,c_j\}\in S_1}\varepsilon(c_i)\varepsilon(c_j)t^{Ind(c_i)+Ind(c_j)}-\sum_{\{c_i,c_j\}\in S_2}\varepsilon(c_i)\varepsilon(c_j)t^{Ind(c_i)+Ind(c_j)}.$$

命题 3.1 [7] 假设 K 是一个 forbidden 数为 1 的虚拟纽结，那么 $V_K(t)$ 最多可以写成 4 项，其中最多两项涉及到 t 的偶次幂，最多两项涉及到 t 的奇次幂。

例 3.1 [7] 设虚拟纽结 K_1 如图 6 所示，图 7 为对应高斯图，计算得 $W_{K_1}(t)=0$，$W_{K_1}(t)$ 平凡，而此时 $V_{K_1}(t)$ 是非平凡的，$V_{K_1}(t)=t^2-2t-2t^{-1}+t^{-2}+2$，由命题 3.1 可得，$K_1$ 的 forbidden 数≥2。而根据 K_1 对应的高斯图可知，只需两次 forbidden 变换就可实现解结操作，因此该虚拟纽结 K_1 的 forbidden 数为 2。

4. 正旋转突变和正反射突变

Folwaczny 和 Kauffman [10]表明 writhe 多项式可以区分某些正旋转突变对，但不能区分正反射突变对，而二阶 writhe 多项式有时可以区分正反射突变对。下面我们分析 writhe 多项式和二阶 writhe 多项式对上面已给出的一类虚拟纽结 K 和其突变体的影响。

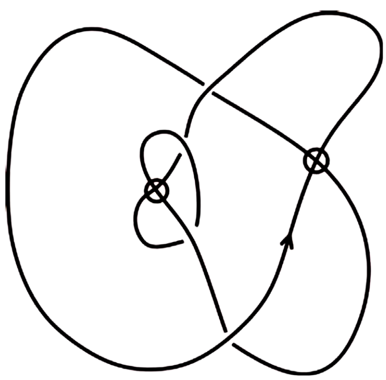

Figure 6. Virtual knot K_1
图 6. 虚拟纽结 K_1

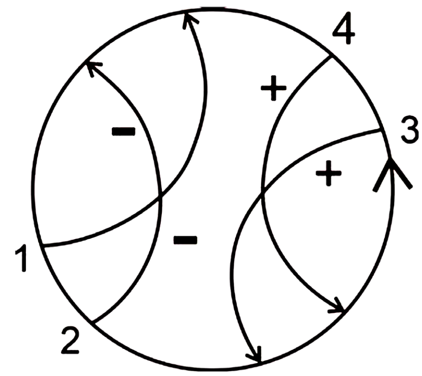

Figure 7. Gauss diagram for virtual knot K_1
图 7. 虚拟纽结 K_1 对应的高斯图

先回顾一下纽结的 Conway 突变，Conway 突变是从纽结图中切断一个缠绕 L，通过水平翻转，垂直翻转或 180 度旋转来转换缠绕，并将其粘合回去的过程，这三种类型的突变如图 8 所示。

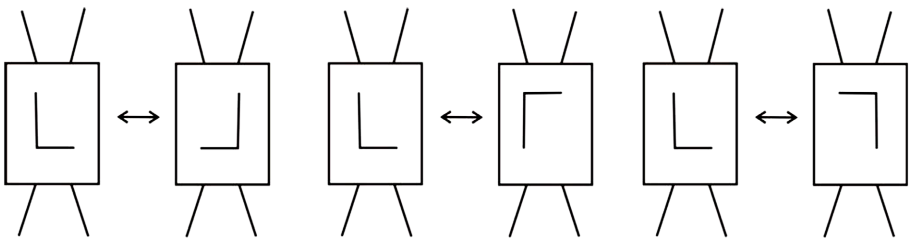

Figure 8. Conway mutations on a tangle L within a knot diagram
图 8. 在纽结图中缠绕 L 上的 Conway 突变

定义 4.1. [10] 如果缠绕的方向在重新粘合后匹配，则称为正突变；如果缠绕的方向在重新粘合后需要逆转，则称为负突变。

在纽结图上完成的所有正突变都可以通过图 9 中的两种突变来实现，我们称它们为正反射和正旋转。

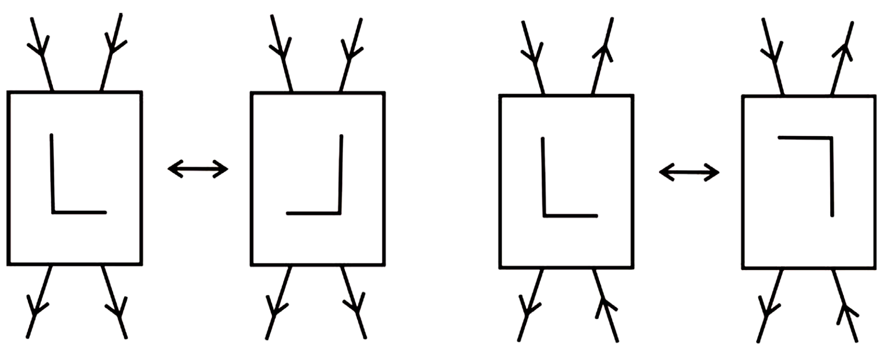

Figure 9. Positive reflection and positive rotation
图 9. 正反射和正旋转

定理 4.1 对于虚拟纽结 K，writhe 多项式可区分 K 和 K 的正旋转突变体 MK；而 writhe 多项式不可区分 K 和 K 的正反射突变体 MK'，但二阶 writhe 多项式可区分 K 和 MK'。

证明 首先分析 writhe 多项式对 K 和 K 的正旋转突变体 MK 的影响，图 10 和图 11 分别为虚拟纽结 K 和 MK 的纽结图和高斯图。

根据图 10 和图 11 中的高斯图可分别计算出 K 和 MK 中交叉点的一些指标，结果在表 2 和表 3 中给出。

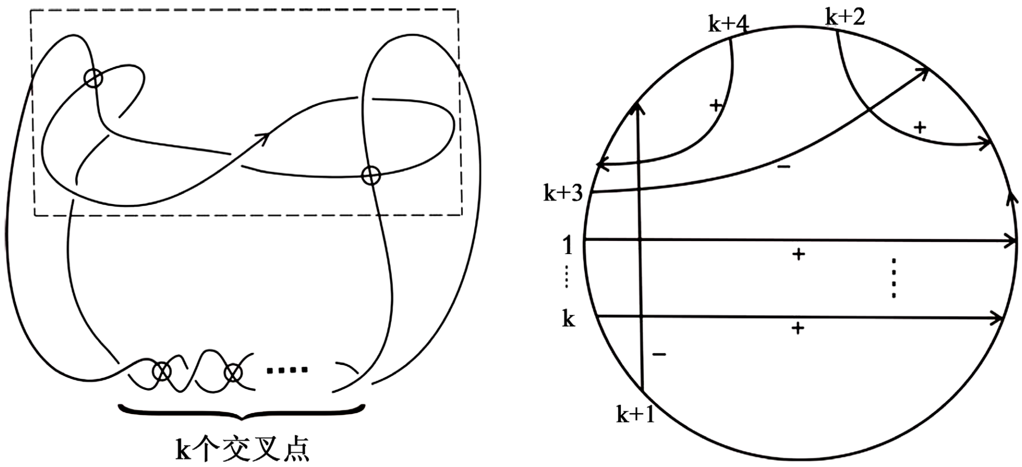

Figure 10. Knot diagram and Gauss diagram for virtual knot K
图 10. 虚拟纽结 K 的纽结图和高斯图

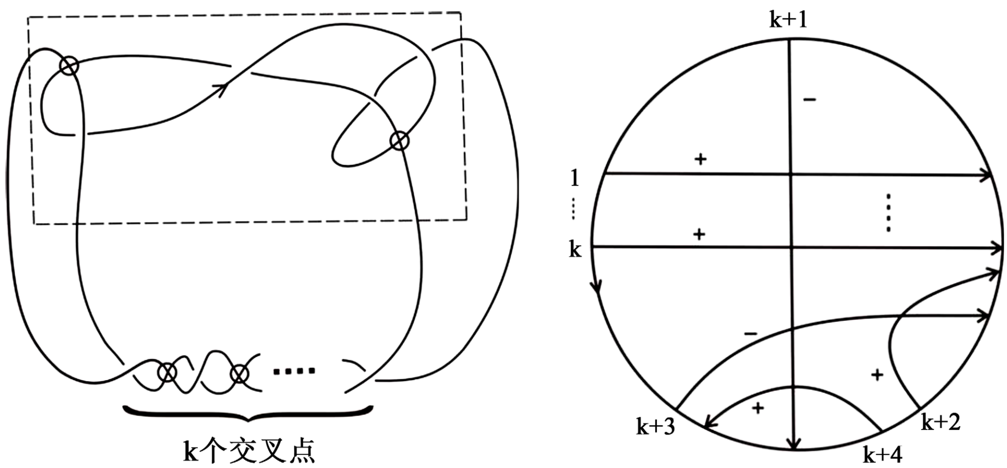

Figure 11. Knot diagram and Gauss diagram for positive rotation mutant MK
图 11. 正旋转突变体 MK 的纽结图和高斯图

Table 2. Some indicators of crossings in K
表 2. K 中交叉点的一些指标

c_i	LO	Ind	LU	$\varepsilon(c_i)$
$1 \le i \le k$	$-i$	1	$i-1$	$+1$
$i = k+1$	$1-k$	$k-2$	1	-1
$i = k+2$	0	1	-1	$+1$
$i = k+3$	-2	2	0	-1
$i = k+4$	$1-k$	-1	k	$+1$

Table 3. Some indicators of crossings in *MK*
表 3. *MK* 中交叉点的一些指标

c_i	LO	Ind	LU	$\varepsilon(c_i)$
$1 \le i \le k$	$2-i$	-1	$i-1$	$+1$
$i=k+1$	-2	$2-k$	k	-1
$i=k+2$	$1-k$	-1	k	$+1$
$i=k+3$	$1-k$	-2	$k+1$	-1
$i=k+4$	0	1	-1	$+1$

由表 2 和表 3 可知 $Ind_{MK}(c_i) = -Ind_K(c_i)$， $\varepsilon_{MK}(c_i) = \varepsilon_K(c_i)$，其中 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k+4$ 。

可计算出

$$W_K(t) = kt - t^{k-2} + t - t^2 + t^{-1} - k = -t^{k-2} - t^2 + (k+1)t + t^{-1} - k \text{，}$$

$$W_{MK}(t) = kt^{-1} - t^{2-k} + t - t^{-2} + t^{-1} - k = -t^{2-k} - t^{-2} + (k+1)t^{-1} + t - k \text{，}$$

则有 $W_{MK}(t) = W_K(t^{-1})$ 。

由此可知，writhe 多项式可区分 K 和它的正旋转突变体 MK。

下面分析 writhe 多项式对 K 和 K 的正反射突变体 MK' 的影响。图 10 和图 12 分别为虚拟纽结 K 和 MK' 的纽结图和高斯图。

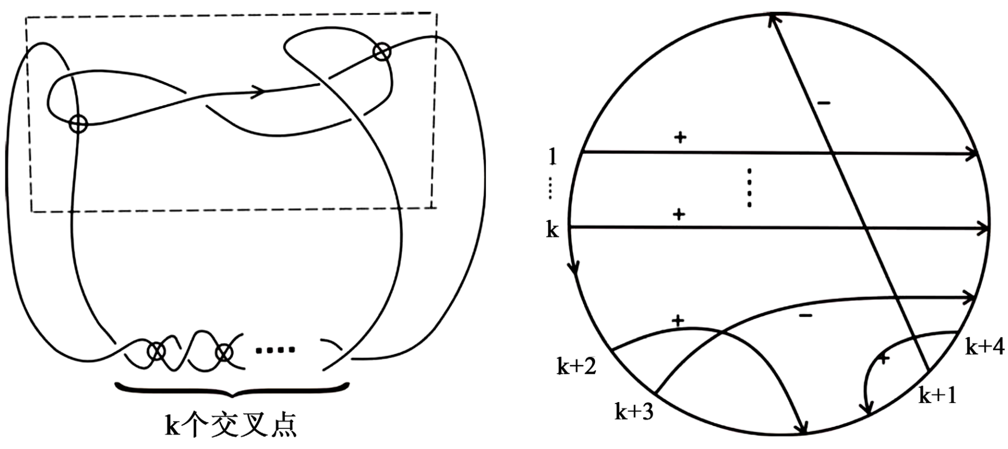

Figure 12. Knot diagram and Gauss diagram for positive reflection mutant MK'
图 12. 正反射突变体 MK' 的纽结图和高斯图

同样，根据图 12 中的高斯图可计算出 MK' 中交叉点的一些指标，结果如表 4 所示。

根据表 2 和表 4 中的数据，有

$$Ind_{MK'}(c_i) = Ind_K(c_i) \text{，}\quad \varepsilon_{MK'}(c_i) = \varepsilon_K(c_i) \text{，}$$

其中 $i = 1,2,\cdots,k+4$ 。因此 $W_{MK'}(t) = W_K(t) = -t^{k-2} - t^2 + (k+1)t + t^{-1} - k$ ，即 writhe 多项式不可区分 K 和 K 的正反射突变体 MK' 。

于是我们选择接着分析二阶 writhe 多项式对 K 和 K 的正反射突变体 MK' 的影响。

Table 4. Some indicators of crossings in MK'
表 4. MK' 中交叉点的一些指标

c_i	LO	Ind	LU	$\varepsilon(c_i)$
$1 \le i \le k$	$1-i$	1	$i-2$	$+1$
$i=k+1$	$-k$	$k-2$	2	-1
$i=k+2$	$-k$	1	$k-1$	$+1$
$i=k+3$	$-1-k$	2	$k-1$	-1
$i=k+4$	1	-1	0	$+1$

根据图 5 给出的弦对的交替构型，分别观察图 10 和图 12 中 K 和 MK' 的高斯图可知，K 和 MK' 中可交替的弦对为 $\{k+3,k+4\}$，$\{k+1,k+2\}$，$\bigcup_{i=1}^{k}\{i,k+4\}$，其中在 K 中 $\{k+3,k+4\}$ 和 $\bigcup_{i=1}^{k}\{i,k+4\}$ 是构型 A，$\{k+1,k+2\}$ 是构型 B；而在 MK' 中 $\{k+1,k+2\}$ 是构型 A，$\{k+3,k+4\}$ 和 $\bigcup_{i=1}^{k}\{i,k+4\}$ 是构型 B。

那么通过计算可得

$$\begin{aligned}
V_K(t) &= \frac{k(k+1)}{2} + \sum_{i=1}^{k} t(-i-1) - t^{k-2}\left[(1-k)-0\right] + t(0-1) - t^2(-2-0) \\
&\quad + t^{-1}\left[(1-k)-1\right] + (-1)t + kt^0 - (-1)t^{k-1} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} - \frac{(3+k)kt}{2} - (1-k)t^{k-2} - t + 2t^2 - kt^{-1} - t + k + t^{k-1} \\
&= \frac{k^2+3k}{2} - \frac{k^2+3k+4}{2}t - (1-k)t^{k-2} + 2t^2 - kt^{-1} + t^{k-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{MK'}(t) &= \frac{k(k+1)}{2} + \sum_{i=1}^{k} t\left[(1-i)-1\right] - t^{k-2}(-k-0) + t(-k-1) - t^2(-1-k-0) \\
&\quad + t^{-1}(1-1) + (-1)t^{k-1} - (-1)t - kt^0 \\
&= \frac{k(k+1)}{2} - \frac{(1+k)kt}{2} + kt^{k-2} - (k+1)\ t + (k+1)t^2 - t^{k-1} + t - k \\
&= \frac{k^2-k}{2} - \frac{k^2+3k}{2}t + kt^{k-2} + (k+1)t^2 - t^{k-1}.
\end{aligned}$$

接下来计算

$$V_K(t) - V_{MK'}(t) = 2k - 2t - t^{k-2} + (1-k)t^2 - kt^{-1} + 2t^{k-1}\text{。}$$

因此可以得到 $V_K(t) - V_{MK'}(t)$ 不是 $W_K(t)$ 的倍数。因为 K 和 MK' 的 writhe 多项式没有 t^{k-1} 项，所以 $V_K(t)$ 和 $V_{MK'}(t)$ 关于模 $W_K(t)$ 不同余，即二阶 writhe 多项式可将 K 和 MK' 区分开来。 □

5. 结语

本文主要针对给出的一类虚拟纽结 K，利用 writhe 多项式和二阶 writhe 多项式研究其虚拟交叉点数的下界和 forbidden 数的下界情况。接着讨论了 $W_K(t)$ 和 $V_K(t)$ 对虚拟纽结 K 和它突变体的影响，其结果

为 writhe 多项式可区分 K 和 K 的正旋转突变体 MK，而 writhe 多项式不可区分 K 和 K 的正反射突变体 MK'，但二阶 writhe 多项式可区分 K 和 K 的正反射突变体 MK'。

参考文献

[1] Kauffman, L.H. (1999) Virtual Knot Theory. *European Journal of Combinatorics*, **20**, 663-691. https://doi.org/10.1006/eujc.1999.0314

[2] Cheng, Z. and Gao, H. (2013) A Polynomial Invariant of Virtual Links. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **22**, Article 1341002. https://doi.org/10.1142/s0218216513410022

[3] Crans, A., Ganzell, S. and Mellor, B. (2013) The Forbidden Number of a Knot. arXiv: 1305.5200.

[4] Cheng, Z. (2017) A Transcendental Function Invariant of Virtual Knots. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **69**, 1583-1599. https://doi.org/10.2969/jmsj/06941583

[5] Sakurai, M. (2013) An Estimate of the Unknotting Numbers for Virtual Knots by Forbidden Moves. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **22**, Article 1350009. https://doi.org/10.1142/s0218216513500090

[6] Henrich, A. (2010) A Sequence of Degree One Vassiliev Invariants for Virtual Knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **19**, 461-487. https://doi.org/10.1142/s0218216510007917

[7] Mellor, B. (2016) Alexander and Writhe Polynomials for Virtual Knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **25**, Article 1650050. https://doi.org/10.1142/s0218216516500504

[8] Boden, H.U., Dies, E., Gaudreau, A.I., Gerlings, A., Harper, E. and Nicas, A.J. (2015) Alexander Invariants for Virtual Knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **24**, Article 1550009. https://doi.org/10.1142/s0218216515500091

[9] Satoh, S. and Taniguchi, K. (2014) The Writhes of a Virtual Knot. *Fundamenta Mathematicae*, **225**, 327-341. https://doi.org/10.4064/fm225-1-15

[10] Folwaczny, L.C. and Kauffman, L.H. (2013) A Linking Number Definition of the Affine Index Polynomial and Applications. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **22**, Article 1341004. https://doi.org/10.1142/s0218216513410046