Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(1), 397-409
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.141039

Hans汉斯

违约市场中内幕信息对投资组合的影响

赵凯悦

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2024年12月27日；录用日期：2025年1月18日；发布日期：2025年1月29日

摘　要

本文研究的是掌握可违约债券内幕信息的投资者的期望效用投资组合问题。内幕人士可以将资金分配到无风险资产，风险资产和可违约债券上。在以往研究中，内幕信息来源于扩散型风险资产过程，而本文假设投资者掌握的内幕信息是关于债券违约的预期信息。本文的研究表明，与仅使用公开信息相比，内幕信息能显著提高投资策略的效益。本文在以下两种内幕信息下借助扩大过滤技术结合鞅方法得到了最优投资策略：一种情况是在未来某个确定的日期发生违约，另一种情况是在投资到期前不可能违约。

关键词

最大期望效用，可违约债券，内幕信息，鞅方法，最优投资组合

The Impact of Inside Information on the Portfolios in a Default Market

Kaiyue Zhao

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Dec. 27th, 2024; accepted: Jan. 18th, 2025; published: Jan. 29th, 2025

Abstract

This paper investigates the expected utility portfolio optimization problem with inside information about defaultable bonds. The insider can allocate his funds to a risk-free asset, a risky asset and a defaultable bond. In previous studies, inside information comes from a diffuse risky asset process, whereas this paper assumes that the inside information possessed by the investor is expected information about the bond default. The research in this paper shows that inside information significantly improves the effectiveness of an investment strategy compared to using only publicly available information. The paper obtains the optimal investment strategy with the help of the expanded filtering technique combined with the martingale method under two types of inside information: a

文章引用: 赵凯悦. 违约市场中内幕信息对投资组合的影响[J]. 应用数学进展, 2025, 14(1): 397-409.
DOI: 10.12677/aam.2025.141039

situation where default occurs at a certain date in the future and a situation where default is unlikely to occur before the maturity of the investment.

Keywords

Expected Utility Maximization, Defaultable Bond, Inside Information, Martingale Method, Optimal Portfolio

1. 引言

随着世界经济的快速发展，人们的生活变得越来越富裕，因此许多人选择把资金投入到金融市场中理财。金融衍生品的不断增多为人们投资提供了多种选择的同时也带来了更多挑战，如何做出合理投资成为了投资者关心的重要问题。

在投资组合的选取问题上，一个重要的理论是 Von Neumann 等人[1]提出的期望效用理论。该理论用效用衡量人们对不同策略的偏好，指导人们如何在不确定环境中制定最优策略。Merton [2]首次将期望效用理论引入投资问题中：投资者希望通过选择合适的交易策略来最大化自己的效用。该问题主要有两种解答方式：动态规划方法和鞅方法。动态规划方法最早由 Bellman [3]提出，核心思想是将一个多阶段的决策问题分解成多个单阶段的问题，通过分析这些阶段之间的关系逐步求解出整个优化问题的解。连续时间的动态规划通常可转变为求解一个满足最优值函数和策略的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程组来解决问题。相关的文献有[2] [4] [5]。

运用动态规划方法可以得到最优投资策略的隐式解，这个解的表达式是一个非线性偏微分方程的形式，求解非线性偏微分方程是十分困难的。因此，动态规划方法存在着局限性，然而，鞅方法克服了这种局限性。鞅方法通过鞅理论找到鞅测度和相关的定价核，将动态问题简化为终端财富的静态优化问题，并通过凸对偶技术或拉格朗日对偶法求解。Harrison 和 Kreps [6]首次将鞅方法应用于连续时间的金融市场。Harrison 和 Pliska [7]在此基础上研究了期权定价问题，证明了证券市场是完备的当且仅当其向量价格过程具有一定的鞅表示性质。Karatzas 等人[8]在不完全市场中考虑最大效用问题，基于凸对偶理论得到了最优投资组合。Wang 等人[9]将鞅方法应用到保险人的最优投资研究中，丰富了保险人最优投资问题的研究方法。Liu 等人[10]利用鞅方法研究了风险过程为 Lévy 过程的最优投资和比例再保险问题。

以上研究都是假设资产管理者依据公共信息流做出决策，然而在现实生活中，资产管理者可能会获得一些有关金融市场的未来事件的信息，这些信息被称为内幕信息，持有内幕信息的资产管理者被称作内幕人士。在金融的最优化问题中，内幕信息对决策产生的影响引起了业内广泛关注。1996 年，Pikovsky 和 Karatzas [11]考虑了由布朗运动驱动的资产的内幕信息下，利用扩大过滤技术，得到了投资组合问题的最优策略。Amendinger 等人[12]考虑了两个不同信息水平的投资者在证券市场中如何最大化他们的期望效用的问题。Hanson [13]在一个关于 n 只股票的预期收益的部分信息的框架下，研究了具有非预期和预期私人信息的影响。最终得出了投资者的最优消费投资策略。Yan 等人[14]在保险金融领域考虑内幕信息，研究了两个保险公司之间的投资－再保险博弈问题，这两个保险公司对额外信息持有不同的看法。

现有的文献大多考虑金融市场是由无风险资产和风险资产构成的投资组合问题，然而，随着金融衍生品市场的不断扩张以及债券收益的日益提高，不少投资者考虑将现有资金投入违约债券中。因此，考

虑具有违约债券的投资组合问题具有重大意义。考虑违约债券的投资组合相关文献有[15]-[17]以及他们的参考文献。尽管内幕信息对投资组合的影响已经被广泛研究，但是以往的研究都是围绕布朗运动驱动的资产过程所产生的内幕信息。本文的创新之处在于考虑了违约债券相关的内幕信息。利用扩大过滤技术结合鞅方法，得到了在债券违约以及未发生违约情况下的最优投资组合策略。

本文其余部分的结构如下。第 2 节描述了金融市场中的动态价格过程以及本文要解决的最优化问题。第 3 节介绍了内幕信息并且分别推导了未来时刻债券发生违约和未发生违约情况下的最优投资组合策略和相应的值函数。第 4 节通过数值例子分析了一些重要参数对投资策略的影响。第 5 节给出了本文的结论。

2. 模型设置和问题表述

$[0,T]$ 为有限的时间跨度，其中 T 为投资的终端时刻。考虑一个完整的过滤概率空间 $(\Omega,\mathbb{F},\mathrm{P})$，其中 P 表示现实世界的概率测度。过滤 $\mathbb{F}:=\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ 由标准布朗运动 $\{B(t)\}_{t\ge0}$ 生成。将 $\{D(t)\}_{t\ge0}$ 定义为右连续递增过程，其中 $D(t):=1_{\{\tau\ge0\}}$ 并用 $\mathbb{D}=\{\mathcal{D}_t\}_{t\ge0}$ 表示它的自然过滤，其中 τ 是违约时刻。过滤 $\mathbb{D}$ 是使 τ 为停时的最小过滤。$\mathbb{G}=\{\mathcal{G}\}_{t\ge0}$ 表示 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{D}$ 的扩大过滤，其中 $\mathcal{G}_t:=\mathcal{F}_t\vee\mathcal{D}_t$。

资产的价格过程

假设金融市场由无风险资产和股票组成。在 P 下，无风险资产和股票的价格过程分别为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}S_0(t)=rS_0(t)\mathrm{d}t, && S_0(0)=s_0>0,\\
&\mathrm{d}S_1(t)=S_1(t)\big(\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B_2(t)\big), && S_1(0)=s_1>0,
\end{aligned}$$

其中，$r>0$ 为无风险利率，$\mu>r$ 表示股票的利率，$\sigma>0$ 为波动率。

假设 $\{D(t)\}_{t\ge0}$ 在 P 下具有固定强度 $d^{\mathrm{P}}>0$，相关的补偿过程 $\{M^{\mathrm{P}}(t)\}_{t\ge0}$ 定义为

$$M^{\mathrm{P}}(t):=D(t)-\int_0^t\big(1-D(u-)\big)d^{\mathrm{P}}\mathrm{d}u,$$

则 $\{M^{\mathrm{P}}(t)\}_{t\ge0}$ 是一个 $(\mathbb{G},\mathrm{P})$-鞅。

考虑一种面值为 1 且到期日为 T_1 的零息可违约债券。倘若在 T_1 之前发生违约，该债券将支付 $1-\zeta$；若未发生违约，则在 T_1 时支付全额。这里的 $\zeta\in[0,1]$ 表示损失率。在现实测度 P 下，可违约债券的定价可以通过风险中性测度下的定价表达式结合风险信用利差进行推导。用 d^{Q} 表示风险中性测度下的违约强度，$\delta=d^{\mathrm{Q}}\zeta$ 表示风险中性信用利差。违约风险溢价用 $\frac{1}{\Delta}:=\frac{d^{\mathrm{Q}}}{d^{\mathrm{P}}}$ 来表示。正如 Duffie 和 Singleton 在文献中[18]所述，风险中性测度下的违约概率会高于现实测度下的违约概率，基于此，本文假定 $\frac{1}{\Delta}\ge1$。根据 Bielecki 和 Jang [19]，P 下可违约债券的价格过程如下：

$$\mathrm{d}P(t,T_1)=P(t-,T_1)\Big[r\mathrm{d}t+\big(1-D(t)\big)(1-\Delta)\delta\mathrm{d}t-\big(1-D(t-)\big)\zeta\mathrm{d}M^{\mathrm{P}}(t)\Big].$$

$\phi_s(t)$ 和 $\phi_p(t)$ 分别表示投资于股票和可违约债券的金额。定义 $\phi=\{(\phi_s(t),\phi_p(t))\}_{t\in[0,T]}$ 为交易策略其中 $T<T_1$。在策略 ϕ 下，投资者的财富过程 $\{X^\phi(t)\}_{t\in[0,T]}$ 如下

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X^\phi(t)&=\phi_s(t)\frac{\mathrm{d}S_1(t)}{S_1(t)}+\phi_p(t)\frac{\mathrm{d}P(t,T_1)}{P(t-,T_1)}+\big(X^\phi(t)-\phi_s(t)-\phi_p(t)\big)\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)}\\
&=\big\{rX^\phi(t-)+\phi_s(t)(\mu-r)+\phi_p(t)\big(1-D(t)\big)(1-\Delta)\delta\big\}\mathrm{d}t\\
&\quad+\phi_s(t)\sigma\mathrm{d}B(t)-\phi_p(t)\zeta\mathrm{d}M^{\mathrm{P}}(t),
\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $X^{\phi}(0)=x_0$。

假设投资者具有 CRRA 偏好，效用函数为

$$u(x)=\frac{x^{\gamma}}{\gamma},\quad \gamma<1,\quad \gamma\neq 0.$$

本文的优化问题 $(\mathcal{P})$ 表示如下：

$$\text{问题}(\mathcal{P}):\max_{\phi(\cdot)} E\left[u\left(X(T)\right)\right],$$

定义 2.1 (可容许策略)

策略 $\phi=\left\{\left(\phi_s(u),\phi_p(u)\right)\right\}_{u\in[t,T]}$ 被称作可容许策略，如果它满足以下条件

(1) $\left(\phi_s(u),\phi_p(u)\right)$ 是 $\mathbb{G}$ -可测的；

(2) $\forall u\in[t,T], E\left[\int_t^T\left(\phi_s(u)^2+\phi_p(u)^2\right)\mathrm{d}u\right]<+\infty$；

(3) $\left(\phi_s(u),\phi_p(u)\right)$ 是随机微分方程(1)的唯一强解。

对于任意初始条件 $(t,x,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\{0,1\}$，将所有可容许策略的集合表示为 $\Phi(t,x,z)$。其中，z 表示 t 时刻的违约状态：$z=0$ 表示违约前 $(\tau>t)$ 的情况，$z=1$ 表示违约后 $(\tau\le t)$ 的情况。

定义 2.2 (最优策略与最优财富)

关于问题 $(\mathcal{P})$，如果对于任何容许策略 $\phi(\cdot)$，如果有

$$E\left[u\left(X^{\phi^*}(T)\right)\right]\ge E\left[u\left(X^{\phi}(T)\right)\right]$$

其中 $\phi^*(\cdot)$ 是给定的可容许策略。则 $\phi^*(\cdot)$ 被称为最优策略，$X^{\phi^*}(\cdot)$ 是问题 $(\mathcal{P})$ 在策略 $\phi^*(\cdot)$ 下的最优财富。

3. 内幕信息下最优问题的解

在金融市场中，总有部分代理人能够取得不同层级的信息，因此信息不对称性受到了学术界的广泛关注，这种不对称性对金融交易活动以及投资策略的制定均产生了重大影响。内幕信息模型是解释此类现象的一个关键模型。该模型假设投资者在交易刚开启之际便持有内幕信息，这些内幕信息并未被囊括于公共信息流 $\{\mathcal{G}_t\}$ 当中。用 $D(T_0):=1_{\{\tau\le T_0\}}$ 来表示投资者所获取的内幕信息，其中，$T_0>T$。投资者可以根据内幕信息 $D(T_0)$ 了解债券未来的违约情况并相应地调整决策进而优化资产配置。

定义一个新的过滤 $\mathbb{H}=\{\mathcal{H}_t\}_{t\in[0,T]}$，其中

$$\mathcal{H}_t=\mathcal{G}_t\cup\sigma\left(D(T_0)\right),$$

它满足右连续性和完备性的通常假设，并且 $\mathcal{G}_t\subset\mathcal{H}_t,\forall t\in[0,T]$。

3.1. 内幕信息 $D(T_0)=0$ 的情况

当投资者获取到内幕信息 $D(T_0)=1$ 时，这表明债券在未来直至 T_0 时刻之前都不会出现违约。鉴于投资的到期日 T 早于 T_0，站在内幕人士的视角，该债券退化为无违约风险的债券。同时，有 $\mathrm{d}M^{\mathrm{P}}(t)=-d^{\mathrm{P}}\mathrm{d}t$。相较于 S_0 而言，原本的违约债券演变成了收益率更高的无风险资产：

$$\mathrm{d}P(t,T_1)=P(t-,T_1)\left[r+(1-\Delta)\delta+\zeta d^{\mathrm{P}}\right]\mathrm{d}t=P(t-,T_1)(r+\delta)\mathrm{d}t,$$

则财富过程的表达式为：

$$\mathrm{d}X^{\phi}(t)=\left\{rX^{\phi}(t-)+\phi_s(t)(\mu-r)+\phi_p(t)\delta\right\}\mathrm{d}t+\phi_s(t)\sigma\mathrm{d}B(t),\tag{2}$$

其中，$X^{\phi}(0)=x_0$。这种情况下，无风险债券的收益率高于银行存款，投资人会尽可能地从向银行借款然

后将其分配到其他资产中。假设投资人借款的最大金额为 M，则有：

$$\phi_p(t) \le X^{\phi}(t) - \phi_s(t) + M.$$

当且仅当

$$\phi_p^*(t) = X^{\phi^*}(t) - \phi_s^*(t) + M, \tag{3}$$

问题 $(\mathcal{P})$ 取得最优解。将(3)式代入(2)式得到

$$\mathrm{d}X^{\phi}(t) = \{(r+\delta)X^{\phi}(t-) + \phi_s(t)(\mu - r - \delta)\}\mathrm{d}t + \phi_s(t)\sigma \mathrm{d}B(t). \tag{4}$$

鞅方法的主要思想是将最优终端财富的确定与最优投资组合过程的确定分离开来。本文涉及到的市场是完备的，这意味着在两种内幕下分别存在唯一的状态价格密度过程，而状态价格密度过程的确立与等价鞅测度确立时用到的 Radon-Nikodym 导数密切相关，因此先给出现实测度 P 的等价鞅测度。

通过 Radon-Nikodym 导数定义扩大过滤 $\mathbb{H}$ 下等价于测度 P 的风险中性测度 $\tilde{\mathrm{Q}}$：

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{Q}}}{\mathrm{dP}}\right|_{\mathbb{H}_t} = L_1(t),$$

其中

$$L_1(t) = \exp\left\{-\kappa B(t) - \frac{1}{2}\kappa^2 t\right\},$$

这里 $\kappa = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$ 表示风险溢价。定义状态价格密度 $\xi_1(t) := \dfrac{L_1(t)}{S_0(t)}$，那么

$$\xi_1(t) = \exp\left\{-\kappa B(t) - \frac{1}{2}\kappa^2 t - rt\right\},$$

并且 $\xi_1(t)$ 满足：

$$\mathrm{d}\xi_1(t) = -\xi_1(t)[r\mathrm{d}t + \kappa \mathrm{d}B(t)].$$

由于 $\dfrac{X^{\phi}(t)}{S_0(t)}$ 是 $(\mathcal{H}_t, \tilde{\mathrm{Q}})$-局部鞅，且 $\xi_1(t)X^{\phi}(t) \ge 0$，所以 $\xi_1(t)X^{\phi}(t)$ 是 $(\mathcal{H}_t, \mathrm{P})$-上鞅。因此问题 $(\mathcal{P})$ 转化为带有一个约束的静态最优化问题：

$$\begin{aligned} &\max_{X(T)} E[u(X(T))] \\ &E[\xi_1(T)X(T)] \le x_0, \end{aligned} \tag{5}$$

最优问题(5)有一个边界条件

$$E[\xi_1(T)X(T)] = x_0,$$

应用拉格朗日乘子法解决静态优化问题(5)，假设 $\lambda > 0$，有：

$$\max E\{u(X(T)) - \lambda[Z(T)X(T) - x_0]\}. \tag{6}$$

即

$$\max \int_{\Omega} \{u(X^{\phi}(\omega)) - \lambda(\xi_1(T)(\omega)X^{\phi}(\omega) - x_0)\}\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega),$$

这是一个可分离的问题，最大化每一个 ω，最优条件为

$$u'\left(X^{\phi}(T)\right)=\lambda\xi_1(T),$$

则静态优化问题(5)的解为

$$X^*(T)=I\left(\lambda\xi_1(T)\right), \tag{7}$$

其中，$I(\cdot)$ 是 $u'(\cdot)$ 的逆函数，且 $\lambda\neq 0$，将以上方程代入边界条件可以得到

$$E\left[\xi_1(T)I\left(\lambda\xi_1(T)\right)\right]=x_0,$$

则 λ 的值可以由上式确定。

$\xi_1(t)X^*(t)$ 是 $(\mathcal{H}_t,\mathrm{P})$-鞅，因此可以从下式中推导出 $X^*(t)$：

$$\xi_1(t)X^*(t)=E\left[\xi_1(T)X^*(T)\mid\mathcal{H}_t\right].$$

在过滤 $\mathbb{H}$ 下，$\ln\dfrac{\xi_1(T)}{\xi_1(t)}$ 服从均值为 $-\left(r+\dfrac{\kappa^2}{2}\right)(T-t)$，方差为 $\kappa^2(T-t)$ 的正态分布。将式(7)代入上面的条件期望，得到最优财富过程：

$$\begin{aligned}
X^*(t)&=\xi_1^{-1}(t)E\left[\xi_1(T)X^*(T)\mid\mathcal{H}_t\right]\\
&=E\left[\frac{\xi_1(T)}{\xi_1(t)}\left(\lambda\xi_1(T)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\middle|\mathcal{H}_t\right]\\
&=I\left(\lambda\xi_1(t)\right)E\left[\left(\frac{\xi_1(T)}{\xi_1(t)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\middle|\mathcal{H}_t\right]\\
&=I\left(\lambda\xi_1(t)\right)\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{1}{2}\kappa^2+r\right)(T-t)\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma\kappa}{1-\gamma}\right)^2(T-t)\right\}\\
&=I\left(\lambda\xi_1(t)\right)\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}(T-t)\left[\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}+r\right]\right\}.
\end{aligned}$$

可以注意到，X^* 可以写作 t 和 $\xi_1(t)$ 的函数。根据 Itô 公式可以得到

$$\mathrm{d}X^*\left(t,\xi_1(t)\right)=\mathcal{A}_1\left(X^*\right)\left(t,\xi_1(t)\right)\mathrm{d}t-\kappa\xi_1(t)\frac{\partial}{\partial\xi_1}X^*\mathrm{d}B(t), \tag{8}$$

其中

$$\mathcal{A}_1\left(X^*\right)(t,\xi_1)=\frac{\partial}{\partial t}X^*-r\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}X^*+\frac{1}{2}\kappa^2\xi_1^2\frac{\partial}{\partial\xi_1\xi_1}X^*.$$

结合(4)式，(8)式和(3)式可以得到最优投资策略为

$$\begin{aligned}
\phi_s^*(t)&=-\frac{\kappa}{\sigma}\xi_1(t)\frac{\partial}{\partial\xi_1(t)}X^*\left(t,\xi_1(t)\right)\\
&=\frac{\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\left(\lambda\xi_1(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}(T-t)\left[\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}+r\right]\right\},\\
\phi_p^*(t)&=X^*(t)-\phi_s^*(t)+M\\
&=\left[1-\frac{\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\right]\left(\lambda\xi_1(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}(T-t)\left[\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}+r\right]\right\}+M,
\end{aligned} \tag{9}$$

相应的期望效用为：

$$E\left[u\left(X^*(T)\right)\right]=\frac{1}{\gamma}\lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}\left[r+\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}\right]T\right\}.$$

3.2. 内幕信息 $D(T_0)=1$ 的情况

在 $D(T_0)=1$ 的情况下，违约可能在到期日 T 前的任何时刻发生。债券在内幕信息下的违约强度会比公共信息流下的违约强度更高。为了说明这一点，本文基于扩大的过滤 $\mathbb{H}$ 来构造 $M^{\mathrm{P}}(t)$ 的半鞅分解。由[20]的命题 8.5.1.1 可以得到下面的引理。

引理 1. 过程 $\left\{M^P(t),t\ge 0\right\}$ 在 $\mathbb{H}$ 下有如下的半鞅分解

$$M^{\mathrm{P}}(t)=\tilde{M}^{\mathrm{P}}(t)+\int_0^t\omega(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $\tilde{M}^{\mathrm{P}}(t)$ 是 $(\mathbb{H},\mathrm{P})$-鞅，并且

$$\omega(t)=\left(1-D(t-)\right)\left(\frac{D(T_0)-D(t)}{T_0-t}-d^{\mathrm{P}}\right),0\le t<T_0.$$

结合引理 1 以及 $D(T_0)=1$ 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X^{\phi}(t)=&\left\{rX^{\phi}(t-)+\phi_s(t)(\mu-r)+\phi_p(t)\left[\left(1-D(t)\right)(1-\Delta)\delta-\left(\frac{1-D(t)}{T_0-t}-d^{\mathrm{P}}\right)\zeta\right]\right\}\mathrm{d}t\\&+\phi_s(t)\sigma\mathrm{d}B(t)-\phi_p(t)\zeta\mathrm{d}\tilde{M}^{\mathrm{P}}(t).\end{aligned}\tag{10}$$

其中， $X^{\phi}(0)=x_0$ 。

类比 $D(T_0)=0$ 的情况，通过 Radon-Nikodym 导数定义过滤 $\mathbb{H}$ 下等价于测度 P 的风险中性测度 $\tilde{\mathrm{Q}}$：

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{Q}}}{\mathrm{dP}}\right|_{\mathbb{H}_t}=L_2(t),$$

其中

$$L_2(t)=\exp\left\{-\kappa B(t)-\frac{1}{2}\kappa^2t\right\}\exp\left\{-\left(d^Q-\frac{1-D(t)}{T_0-t}\right)t\wedge\tau\right\}\exp\left\{-D(t)\ln\frac{1-D(t)}{d^Q(T_0-t)}\right\},$$

则状态价格密度 $\xi_2(t):=\frac{L_2(t)}{S_0(t)}$ 为

$$\xi_2(t)=\exp\left\{-\left(r+\frac{1}{2}\kappa^2\right)t-\kappa B(t)-\left(d^Q-\frac{1-D(t)}{T_0-t}\right)t\wedge\tau-D(t)\ln\left(\frac{1-D(t)}{d^Q(T_0-t)}\right)\right\},$$

并且 $\xi_2(t)$ 满足：

$$\mathrm{d}\xi_2(t)=\xi_2(t-)\left[-r\mathrm{d}t-\kappa\mathrm{d}B(t)+\left(d^Q\left(\frac{1-D(t)}{T_0-t}\right)^{-1}-1\right)\mathrm{d}\tilde{M}^P(t)\right].$$

接下来在两种情况下考虑 $\ln\left(\frac{\xi_2(T)}{\xi_2(t)}\right)$ 的分布：

- 违约发生后， $\ln\left(\frac{\xi_2(T)}{\xi_2(t)}\right)$ 服从正态分布 $N\left(f(t),v^2(t)\right)$，其中

$$f(t)=-\left(r+\frac{1}{2}\kappa^2\right)(T-t),\quad v^2(t)=\kappa^2(T-t).$$

- 违约发生前，$\ln\left(\frac{\xi_2(T)}{\xi_2(t)}\right)$服从正态分布$N\left(f(t,\tau),v^2(t)\right)$，其中

$$f(t,\tau)=-\left(r+\frac{1}{2}\kappa^2\right)(T-t)-\ln\frac{1}{d^Q(T_0-t)}1_{\{\tau\le T\}}-\left(d^Q-\frac{1}{T_0-t}\right)(T\wedge\tau-t),$$
$$v^2(t)=\kappa^2(T-t).$$

与$D(T_0)=0$情况下解决最优化问题的方法相同，将随机优化问题转化为静态的最优化问题：

$$\begin{aligned}&\max_{X(T)}E\left[u\left(X(T)\right)\right]\\&E\left[\xi_2(T)X(T)\right]\le x_0,\end{aligned}\tag{11}$$

优化问题(11)与优化问题(5)的解决方法相同，在此不做赘述。根据拉格朗日乘子法得到最优终端财富为

$$X^*(T)=I\left(\lambda\xi_2(t)\right),\tag{12}$$

其中$\lambda\ne0$，λ的值可以由$E\left[\xi_2(T)I\left(\lambda\xi_2(T)\right)\right]=x_0$确定。

3.2.1. 违约后：$z=1$

在这种情况下，违约已经发生，投资者将不会对债券进行投资，因此$\phi_p=0$。最优投资组合问题退化为纯扩散市场下的投资组合问题。同$D(T_0)=0$的情况，最优财富过程为

$$\begin{aligned}X^*(t)&=\xi_2^{-1}(t)E\left[\xi_2(T)X^*(T)\,|\,\mathcal{H}_t\right]\\&=E\left[\frac{\xi_2(T)}{\xi_2(t)}\left(\lambda(\xi_2(T)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\middle|\mathcal{H}_t\right]\\&=I\left(\lambda\xi_2(t)\right)E\left[\left(\frac{\xi_2(T)}{\xi_2(t)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\middle|\mathcal{H}_t\right]\\&=I\left(\lambda\xi_2(t)\right)\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{1}{2}\kappa^2+r\right)(T-t)\right\}\\&=I\left(\lambda\xi_2(t)\right)\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}(T-t)\left[\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}+r\right]\right\}.\end{aligned}\tag{13}$$

最优投资策略为：

$$\begin{aligned}&\phi_s^*(t)=\frac{\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\left(\lambda\xi_2(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}(T-t)\left[\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}+r\right]\right\},\\&\phi_p^*(t)=0.\end{aligned}\tag{14}$$

相应的期望效用为：

$$E\left[u\left(X^*(T)\right)\right]=\frac{1}{\gamma}\lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}\left[r+\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}\right]T\right\}.$$

3.2.2. 违约后：$z=0$

$z=0$ 表明 t 时刻违约尚未发生，但违约的风险依然存在，投资者可以基于 $D(T_0)=1$ 的内幕信息将资金投资于三种资产中。根据最优终端财富(12)可以得到最优财富过程：

$$
\begin{aligned}
X^*(t) &= \xi_2^{-1}(t)E\left(\xi_2(T)X^*(T)\,|\,\mathcal{H}_t\right)\\
&= E\left[E\left[\frac{\xi_2(T)}{\xi_2(t)}X^*(T)\middle|,\mathcal{F}_t\vee\mathcal{D}_T\right]\middle|,\mathcal{D}_t\right]\\
&= E\left[E\left[\left(\frac{\xi_2(T)}{\xi_2(t)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\lambda\xi_2(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\middle|,\mathcal{F}_t\vee\mathcal{D}_T\right]\middle|,\mathcal{D}_t\right]\\
&= E\left[\left(\lambda\xi_2(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}E\left[\left(\frac{\xi_2(T)}{\xi_2(t)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\middle|,\mathcal{F}_t\vee\mathcal{D}_T\right]\middle|,\mathcal{D}_t\right]\\
&= E\left[\left(\lambda\xi_2(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{\gamma-1}f(t,\tau)\right\}\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2 v^2(t)\middle|,\mathcal{D}_t\right\}\right]\\
&= \left(\lambda\xi_2(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2 v^2(t)\right\}\int_t^T\exp\left\{\frac{\gamma}{\gamma-1}f(t,s)-\frac{1}{T_0-t}(s-t)\right\}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

由于违约时间 τ 是未知的，因此上述计算过程中 $f(t,\tau)$ 是随机的。在给定 t 和 T_0，违约时间 τ 服从参数为 $\frac{1}{T_0-t}$ 的指数分布，因此条件期望可以通过积分来计算。

记

$$
A(t)=\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2 v^2(t)\right\},
$$

$$
B(t,s)=\exp\left\{\frac{\gamma}{\gamma-1}f(t,s)-\frac{1}{T_0-t}(s-t)\right\}.
$$

根据 Itô 公式可以得到

$$
\begin{aligned}
d\left(X^*,\xi_2(t)\right) &= \mathcal{A}_2\left(X^*\right)\left(t,\xi_2(t)\right)\mathrm{d}t+\frac{\kappa}{1-\gamma}\left(\lambda\xi_2(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}A(t)\int_t^T B(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}B(t)\\
&\quad+\left[\left(d^Q(T_0-t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}-1\right]\left(\lambda\xi_2(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}A(t)\int_t^T B(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tilde{M}^p(t),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_2\left(X^*\right)(t,\xi_2) &= \frac{\partial}{\partial t}X^*(t,\xi_2)-r\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}X^*(t,\xi_2)+\frac{1}{2}\kappa^2\xi_2^2\frac{\partial}{\partial\xi_2\xi_2}X^*(t,\xi_2)\\
&\quad+\frac{1}{T_0-t}\left[X^*\left(t,d^Q(T_0-t)\xi_2(t)\right)-X^*\left(t,\xi_2(t)\right)-\left[d^Q(T_0-t)-1\right]\frac{\partial}{\partial\xi_2}X^*\right].
\end{aligned}
$$

比较(16)式和(10)式的连续鞅部分和跳跃鞅部分可以得到

$$\begin{aligned}\phi_s^*(t) &= \frac{\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\left(\lambda\xi_2(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} A(t)\int_t^T B(t,s)\mathrm{d}s,\\ \phi_p^*(t) &= \frac{1-\left[d^Q(T_0-t)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\zeta}\left(\lambda\xi_2(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} A(t)\int_t^T B(t,s)\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{17}$$

相应的期望效用为：

$$E\left[u\left(X^*(T)\right)\right] = \frac{1}{\gamma}\lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}\left[r+\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}\right]T\right\}\int_0^T \exp\left\{\frac{\gamma}{\gamma-1}f(0,s)-\frac{1}{T_0-t}s\right\}\mathrm{d}s.$$

以上对投资组合问题$(\mathcal{P})$的计算结果可以总结为以下定理：

定理 3.1. 对于拥有债券内幕信息$D(T_0)=0$的投资者来说，最大化终端财富问题$(\mathcal{P})$的最优策略为

$$\begin{aligned}\phi_s^*(t) &= \frac{\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\left(\lambda\xi_1(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}(T-t)\left[\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}+r\right]\right\},\\ \phi_p^*(t) &= \left[1-\frac{\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\right]\left(\lambda\xi_1(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}(T-t)\left[\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}+r\right]\right\}+M,\end{aligned} \tag{18}$$

期望效用为：

$$E\left[u\left(X^*(T)\right)\right] = \frac{1}{\gamma}\lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}\left[r+\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}\right]T\right\}.$$

对于拥有债券内幕信息$D(T_0)=1$的投资者来说，最优策略为：

$$\begin{aligned}\phi_s^*(t) &= \frac{\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\left(\lambda\xi_2(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}(T-t)\left[\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}+r\right]\right\}1_{\{\tau\le t\}}\\ &\quad+\frac{\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\left(\lambda\xi_2(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}A(t)\int_t^T B(t,s)\mathrm{d}s1_{\{\tau>t\}},\\ \phi_p^*(t) &= \frac{1-\left[d^Q(T_0-t)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\zeta}\left(\lambda\xi_2(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}A(t)\int_t^T B(t,s)\mathrm{d}s1_{\{\tau>t\}},\end{aligned} \tag{19}$$

期望效用为：

$$E\left[u\left(X^*(T)\right)\right] = \frac{1}{\gamma}\lambda^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}\left[r+\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}\right]T\right\}\left\{\int_0^T\exp\left\{\frac{\gamma}{\gamma-1}f(0,s)-\frac{1}{T_0-t}s\right\}\mathrm{d}s1_{\{\tau>t\}}\right\}.$$

对比定理 3.1.中最优投资策略$\phi_s^*(t),\phi_p^*(t)$与最优财富过程的表达式，可以发现，债券内幕信息的变动并不影响在风险资产上投资的比例。而当提前确定债券没有违约风险的情况下，投资者会从银行尽可能借款，同时将所有资金投入到无风险债券中；当债券有可能在决策终端时刻之前发生违约时，投资在违约债券上的比例是与时间间隔T_0-t相关的量。

备注 3.1. (没有内幕信息的情况) 在没有内幕信息的情况下，投资者根据公开信息流$\{\mathcal{G}_t\}$做出决策。重新定义状态价格密度过程为

$$\xi_3(t) = \exp\left\{-rt-\frac{1}{2}\kappa^2 dt-\kappa B(t)-\ln\Delta D(t)-d^Q(1-\Delta)(t\wedge\tau)\right\},$$

问题$(\mathcal{P})$的最优策略为

$$\phi_s^*(t)=\frac{\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\left(\lambda\xi_3(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{\gamma}{1-\gamma}(T-t)\left(\frac{\kappa^2}{2(1-\gamma)}+r\right)\right\}1_{\tau<t}$$

$$+\frac{\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\left(\lambda\xi_3(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{1}{2}v^2(t)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2\right\}\int_t^T\frac{\gamma}{\gamma-1}m(t,s)-d^P(s-t)\mathrm{d}s1_{\{\tau>t\}}$$

$$\phi_p^*(t)=\frac{1}{\zeta}\left[1-\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]\left(\lambda\xi_3(t)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\exp\left\{\frac{1}{2}v^2(t)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^2\right\}\int_t^T\frac{\gamma}{\gamma-1}f_1(t,s)-d^P(s-t)\mathrm{d}s1_{\{\tau>t\}},$$

其中

$$f_1(t,\tau)=-\left(r+\frac{1}{2}\kappa^2\right)(T-t)-\ln\Delta1_{\{\tau\le T\}}-d^Q(1-\Delta)(\tau\wedge T-t).$$

对比定理 3.1 的结论，可违约债券内幕信息的存在同样不会影响投资在股票上的比例。此外，在没有内幕信息的情况下，投资在违约债券上的比例为一个固定的常数，与时间无关。

4. 数值分析

本节将通过一些数值示例来说明参数对最优时间一致策略和最优值函数的影响。除非另有说明，否则基本参数设置如下所示：$r=0.03$，$t=0$，$T=10$，$T_0=50$，$\mu=0.07$，$\sigma=0.3$，$\gamma=0.5$，$d^Q=0.008$。

图 1 表明最优时间一致投资策略 $\phi_s^*(0)$ 会随收益率 μ 的增加而增加，随股票波动率 σ 的增加而减小。收益率 μ 越高的股票越有可能给投资人带来较高回报，因此投资人会增加投资股票的金额以获得潜更高收益。而当波动率 σ 增加时，股票的收益更加不稳定，潜在的风险上升，因此投资者会变得更加谨慎进而减少投资在股票上的金额。

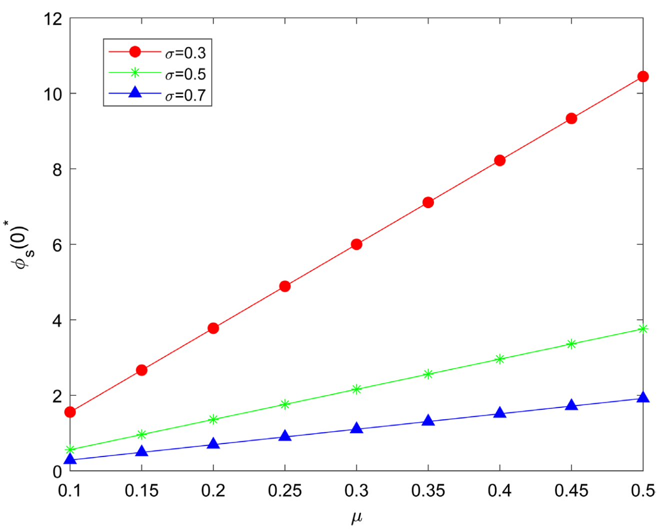

Figure 1. Effect of μ and σ on $\phi_s^*(0)$

图 1. **参数 μ 和 σ 对 $\phi_s^*(0)$ 的影响**

图 2 表明最优时间一致投资策略 $\phi_s^*(0)$ 会随风险厌恶系数 γ 的增加而增加，同时随终端时刻 T 的增加而增加。风险厌恶系数 γ 越高表明投资者对风险更加抵触，投资人将会更加谨慎地面对资产配置问题，因此投资人会减少投资股票的金额以保证减少亏损。而当到期日 T 增加时，投资者持有股票的时间增多，

他会增加投资在股票上的金额。

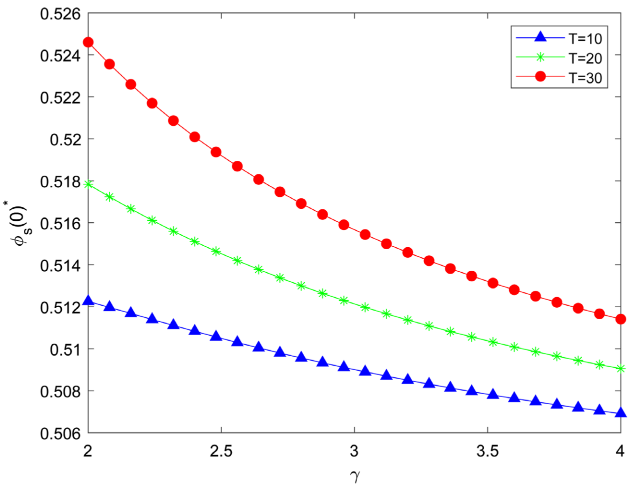

Figure 2. Effect of T and γ on $\phi_s^*(0)$

图 2. 参数 T 和 γ 对 $\phi_s^*(0)$ 的影响

图 3 显示了参数 ζ 和 T_0 对 $\phi_p^*(0)$ 的影响。$\phi_p^*(0)$ 随损失率 ζ 的增加而减少，随着未来时间 T_0 的增加而增加。当损失率升高时，债券到期回收的金额减少，这促使投资者减少对债券投资。当给定内幕信息 $D(T_0)=1$ 时，违约强度由原先的固定值变为一个与未来时间相关的变量 $\frac{1}{T_0-t}$，T_0 增大，表示带有内幕信息的债券违约强度降低，那么违约的风险降低，因此投资者会增加对债券的投资。

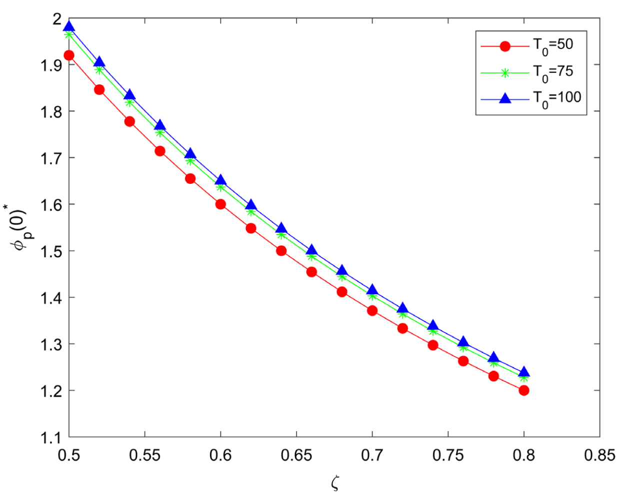

Figure 3. Effect of ζ and T_0 on $\phi_s^*(0)$

图 3. 参数 ζ 和 T_0 对 $\phi_s^*(0)$ 的影响

5. 结论

本文基于最大化期望效用准则研究了考虑内幕信息的投资问题。投资者可以投资于无风险资产、股票和可违约债券。本文使用扩大过滤方法来解决内幕信息背景下的最优投资组合问题，最终得到了在两种不

同的内幕信息下的最优策略的封闭表达式。在已知未来时刻债券未发生违约时，违约债券退化为一个利率高于现金资产的无风险资产。在允许投资者向银行借款的情况下，投资者为了提高收益会尽可能多地向银行借款并投资于债券中。在已知未来时刻债券已经发生违约时，对于内幕人士来说违约债券的强度不再是一个固定值，而是与未来时间相关的变量 $\frac{1}{T_0-t}$ 。当违约时刻 T_0 越接近决策终端时刻 T 时，内幕人员感知到的债券的违约强度越大，因此债券违约的概率增大，所以投资者会减少投资在债券上的金额。

参考文献

[1] Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944) Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press.

[2] Merton, R.C. (1969) Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case. *The Review of Economics and Statistics*, **51**, 247-257. https://doi.org/10.2307/1926560

[3] Bellman, R. (1966) Dynamic Programming. *Science*, **153**, 34-37. https://doi.org/10.1126/science.153.3731.34

[4] Guan, G. and Liang, Z. (2014) Optimal Management of DC Pension Plan in a Stochastic Interest Rate and Stochastic Volatility Framework. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **57**, 58-66. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2014.05.004

[5] Wang, P. and Li, Z. (2018) Robust Optimal Investment Strategy for an AAM of DC Pension Plans with Stochastic Interest Rate and Stochastic Volatility. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **80**, 67-83. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2018.03.003

[6] Harrison, J.M. and Kreps, D.M. (1979) Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, **20**, 381-408. https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90043-7

[7] Harrison, J.M. and Pliska, S.R. (1981) Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Processes and their Applications*, **11**, 215-260. https://doi.org/10.1016/0304-4149(81)90026-0

[8] Karatzas, I., Lehoczky, J.P., Shreve, S.E. and Xu, G. (1991) Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in an Incomplete Market. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **29**, 702-730. https://doi.org/10.1137/0329039

[9] Wang, Z., Xia, J. and Zhang, L. (2007) Optimal Investment for an Insurer: The Martingale Approach. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **40**, 322-334. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2006.05.003

[10] Liu, S., Guo, W. and Tong, X. (2021) Martingale Method for Optimal Investment and Proportional Reinsurance. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, **36**, 16-30. https://doi.org/10.1007/s11766-021-3463-8

[11] Pikovsky, I. and Karatzas, I. (1996) Anticipative Portfolio Optimization. *Advances in Applied Probability*, **28**, 1095-1122. https://doi.org/10.2307/1428166

[12] Amendinger, J., Imkeller, P. and Schweizer, M. (1998) Additional Logarithmic Utility of an Insider. *Stochastic Processes and Their Applications*, **75**, 263-286. https://doi.org/10.1016/s0304-4149(98)00014-3

[13] Hansen, S.L. (2012) Optimal Consumption and Investment Strategies with Partial and Private Information in a Multi-Asset Setting. *Mathematics and Financial Economics*, **7**, 305-340. https://doi.org/10.1007/s11579-012-0086-1

[14] Baltas, I. and Yannacopoulos, A.N. (2017) Portfolio Management in a Stochastic Factor Model under the Existence of Private Information. *IMA Journal of Management Mathematics*, **30**, 77-103. https://doi.org/10.1093/imaman/dpx012

[15] Zhao, H., Shen, Y. and Zeng, Y. (2016) Time-Consistent Investment-Reinsurance Strategy for Mean-Variance Insurers with a Defaultable Security. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **437**, 1036-1057. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.01.035

[16] Zhang, Q. and Chen, P. (2019) Robust Optimal Proportional Reinsurance and Investment Strategy for an Insurer with Defaultable Risks and Jumps. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **356**, 46-66. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.01.034

[17] Zhu, J., Guan, G. and Li, S. (2020) Time-Consistent Non-Zero-Sum Stochastic Differential Reinsurance and Investment Game under Default and Volatility Risks. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **374**, Article 112737. https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112737

[18] Duffie, D. and Singleton, K.J. (2012) Credit Risk. Princeton University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctv30pnvpg

[19] Bielecki, T.R. and Jang, I. (2006) Portfolio Optimization with a Defaultable Security. *Asia-Pacific Financial Markets*, **13**, 113-127. https://doi.org/10.1007/s10690-007-9037-x

[20] Jeanblanc, M., Yor, M. and Chesney, M. (2009) Mathematical Methods for Financial Markets. Springer Science and Business Media.