Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(1), 423-432
Published Online January 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.141041

Hans汉斯

一类非线性拉普拉斯方程正解的对称性

王明莲[*]，周长亮

东华理工大学理学院，江西 南昌

收稿日期：2024年12月27日；录用日期：2025年1月18日；发布日期：2025年1月29日

摘 要

在分数阶微分方程领域中，通过利用有关拉普拉斯算子的极大值原理，以及移动平面法研究了一类非线性分数阶拉普拉斯方程 $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)+u(x)=|x|^{p}u^{q}(x)$， $x\in R^{n}\setminus\overline{B_{1}}$，其中 $0<\alpha<2$， $p<0$， $q<0$， $\overline{B_{1}}:=\{x\in R^{n}\,||x|\le 1\}$， $R^{n}\setminus\overline{B_{1}}:=\{x\in R^{n}\,||x|>1\}$ 的正解 u 的径向对称性，其中 $u\in C_{loc}^{1,1}(R^{n}\setminus\overline{B_{1}})\cap L_{\alpha}(R^{n})$，证明了正解 u 是关于原点对称的。

关键词

分数阶拉普拉斯方程，移动平面法，径向对称性

Symmetries of Positive Solutions to a Class of Nonlinear Laplace Equations

Minglian Wang[*], Changliang Zhou

School of Science, East China University of Technology, Nanchang Jiangxi

Received: Dec. 27th, 2024; accepted: Jan. 18th, 2025; published: Jan. 29th, 2025

Abstract

In the field of fractional differential equations, the radial symmetry of the positive solution u of a class of nonlinear fractional Laplace equations is studied by using the maximum principle of Laplace operators and the moving plane method: $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)+u(x)=|x|^{p}u^{q}(x)$, $x\in R^{n}\setminus\overline{B_{1}}$, among $0<\alpha<2$, $p<0$, $q<0$, $\overline{B_{1}}:=\{x\in R^{n}\,||x|\le 1\}$, $R^{n}\setminus\overline{B_{1}}:=\{x\in R^{n}\,||x|>1\}$, $u\in C_{loc}^{1,1}(R^{n}\setminus\overline{B_{1}})\cap L_{\alpha}(R^{n})$. It is proved that the positive solution u is symmetric about the origin.

[*]通讯作者。

文章引用: 王明莲, 周长亮. 一类非线性拉普拉斯方程正解的对称性[J]. 应用数学进展, 2025, 14(1): 423-432.
DOI: 10.12677/aam.2025.141041

Keywords

Fractional Laplace Equation, Moving Plane Method, Radial Symmetry

1. 引言

分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^S$ 在 R^n 中是一个非局部伪微分算子，定义为

$$(-\Delta)^S u(x) = C_{n,s} P.V. \int_{R^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} \mathrm{d}y := C_{n,s} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} \mathrm{d}y \tag{1}$$

其中常数 $C_{n,s}$ 依赖于空间维数 n 且和 s 有关，$C_{n,s} = \left(\int_{R^n} \frac{1-\cos(2\pi\xi_1)}{|\xi|^{n+2s}} \mathrm{d}\xi \right)^{-1}$，$P.V.$ 为柯西主值，

$L_{2s} = \left\{ u: R^n \to R \mid \int_{R^n} \frac{|u(x)|}{(1+|x|)^{n+2s}} \mathrm{d}x < \infty \right\}$。柯西主值可以使得某些在通常意义上发散的积分变得收敛，当(1)对每个点 x 都有意义时，可以证得当 $s \to 1$ 时，$(-\Delta)^S u(x)$ 收敛于 $-\Delta u(x)$。

近些年来，由于分数阶拉普拉斯算子可以模拟各种物理现象，引起了人们极大的兴趣，例如湍流和水波，异常扩散和准地转流，分子动力学和相对量子力学等[1]-[4]；同时分数阶拉普拉斯算子还常用于描述生物、化学、金融等领域的现象和规律，因此对此进行研究具有非常重要的意义。随之而来的是越来越多的学者投入到分数阶拉普拉斯算子的理论与应用研究中，研究成果也越来越多[5]-[8]。

从数学上看，拉普拉斯算子的非局部性使得在研究一些非局部的偏微分方程时存在一定的困难，一种有效的解决办法是由 Caffarelli [9]发展的将非局部问题转化到高维的局部问题的延拓法，另外，移动平面法和正则性提升能将分数阶拉普拉斯方程转化为等价的积分方程，但是这种方法却并不适用于解决非线性的非局部算子问题。为解决这个问题，Chen 和 Li 等人[10]提出了针对拉普拉斯算子的直接移动平面法，此后，Jarohs [11]等发展了直接移动平面法，并将其用于去处理一些非线性非局部算子，这一方法也得到了许多应用。

随着对于分数阶拉普拉斯算子方程研究的深入，线性的分数阶拉普拉斯方程已经有很多的研究成果，对于非线性的拉普拉斯方程的研究相对较少，因此具有一定的发展空间，例如薛定谔型方程，经典的非线性薛定谔方程为 $-\Delta u + u = f(x,u)$，$x \in R^N$，$u \in H^1(R^N)$。

2012 年，Femler [12]等研究了分数阶薛定谔方程

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) + u(x) = f(x,u) \tag{2}$$

在 R^n 上的正解和单调性，并且利用移动平面法证明了方程(2)的正解的径向对称性和单调性。此后，经典的薛定谔方程被推广到了分数阶上，研究者们对于分数阶的薛定谔型方程展开了一些研究。

2017 年，Chen [10]等人利用直接移动平面法研究了下列具有分数扩散的非线性 Schrödinger 方程

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) + u(x) = u^p(x), \quad x \in R^n \tag{3}$$

证明了若 $u\in C_{loc}^{1,1}\left(R^n\right)\cap L_\alpha\left(R^n\right)$ 是(3)的正解，且 $1<p<\infty$，如果 $\lim\limits_{|x|\to\infty}u(x)=a<\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$，那么 u 一定是径向对称的并且在 R^n 的某一点上单调递减。这是分数阶薛定谔型方程的更多形式的一种具体化。

2022 年，叶方琪[13]通过研究分数阶 Hardy 方程

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u(x)=|x|^p u^q(x), & x\in R^n\setminus\overline{B_1}\\ u(x)=\varphi(x), & x\in\overline{B_1}\\ u(x)>0, & x\in R^n\end{cases}\tag{4}$$

其中 $0<s<1$，$p<0$，$q<0$，$\overline{B_1}:=\left\{x\in R^n\,|\,|x|\le 1\right\}$，$R^n\setminus\overline{B_1}:=\left\{x\in R^n\,|\,|x|>1\right\}$ 证明了若 $u\in C_{loc}^{1,1}\left(R^n\setminus\overline{B_1}\right)\cap L_s\left(R^n\right)$ 是方程(4)的解，u 在 $R^n\setminus\overline{B_1}$ 内有上界，且满足对任意 $x\in R^n\setminus\overline{B_1}$，$y\in\overline{B_1}$，有 $u(x)\le\varphi(y)$，则关于任意分量 x_i，u 在 $(-\infty,-1)$ 内单调递增，在 $(1,+\infty)$ 内单调递减。

最近，Duan Y [14]等人考虑了带有变号位势的分数阶 p-拉普拉斯非线性方程

$$\begin{cases}(-\Delta)_p^s u(x)+a(x)|u|^{p-2}u(x)=f(u(x)), & x\in\Omega\\ u>0, & x\in\Omega\\ u=0, & x\in\Omega^c\end{cases}\tag{5}$$

利用移动平面法得到了方程(5)的解在有界区域内的径向对称性，并且利用滑动法的思想，通过构造辅助函数证明了解在无界区域内的单调性。除此之外，Cao [15]等人还研究了单位球上含有分数阶 p&q-Laplace 算子的非线性系统，同样通过直接移动平面法证明了系统正解的径向对称性和单调性。这说明了对于非线性方程的解的研究日新月异，可发挥的空间较大。

基于以上研究者的启发，本文想借助分数阶拉普拉斯方程的极值原理，主要利用移动平面法的直接方法，这也是研究分数阶拉普拉斯方程解的性质最常用的一种方法，将方程(4)推广到非线性领域上，研究下列薛定谔型非线性分数阶拉普拉斯方程

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)+u(x)=|x|^p u^q(x), & x\in R^n\setminus\overline{B}_1\\ u(x)=\varphi(x), & x\in\overline{B_1}\\ u(x)>0, & x\in R^n\end{cases}\tag{6}$$

的正解 $u\in C_{loc}^{1,1}\left(R^n\setminus\overline{B_1}\right)\cap L_\alpha\left(R^n\right)$ 的径向对称性，其中 $0<\alpha<2$，$p<0$，$q<0$，$\overline{B_1}:=\left\{x\in R^n\,|\,|x|\le 1\right\}$，$R^n\setminus\overline{B_1}:=\left\{x\in R^n\,|\,|x|>1\right\}$。

2. 预备知识

由于方程(6)的解是在 Lp 空间中探讨的，由 Holder 连续性可知 u 一定是一致连续的，对拉普拉斯算子运用极值原理可得到解的估计和解的正则性，由于移动平面法只针对偏微分方程正解，因此下面只考虑正解的径向对称性。为方便运用移动平面法证明微分方程正解 $u(x)$ 的对称性，以全空间 R^n 为例，给出如下定义：

任取一个方向为 x_1 轴，对任意的实数 λ，令

$$T_\lambda=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n\,|\,x_1=\lambda\right\}$$

这是需要移动的超平面，与 x_1 轴垂直。

记平面左侧的区域为 Σ_λ，即

$$\Sigma_{\lambda}=\left\{x\in R^{n}\mid x_{1}<\lambda\right\}$$

记

$$x^{\lambda}=\left(2\lambda-x_{1},x_{2},\cdots,x_{n}\right)$$

为点 $x=\left(x_{1},\cdots,x_{n}\right)\in\Sigma_{\lambda}$ 关于平面 T_{λ} 的对称点，为方便比较解 u 在点 x 和 x^{λ} 处的值，设

$$w_{\lambda}\left(x\right)=u\left(x^{\lambda}\right)-u\left(x\right)$$

$$u_{\lambda}\left(x\right)=u\left(x^{\lambda}\right)$$

$$\tilde{\Sigma}_{\lambda}=\left\{x^{\lambda}\mid x\in\Sigma_{\lambda}\right\}$$

若要证明 u 关于某个平面 T_{λ_0} 对称，只需要证明存在某个 λ_0，使得

$$w_{\lambda_0}\left(x\right)\equiv 0,\ \forall x\in\Sigma_{\lambda_0}$$

运用好移动平面法的关键是极值原理的应用，因此先引用几个极值原理。

引理 1 [10] (反对称函数的极大值原理) 若 Ω 是 Σ_{λ} 中的一个有界区域，函数 $w_{\lambda}\left(x\right)\in C_{loc}^{1,1}\left(\Omega\right)\cap L_{\alpha}$ 且在 $\bar{\Omega}$ 中下半连续。如果

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}w_{\lambda}\left(x\right)\geq 0, & x\in\Omega\\ w_{\lambda}\left(x\right)\geq 0, & x\in\Sigma_{\lambda}\setminus\Omega\\ w_{\lambda}\left(x\right)=-w_{\lambda}\left(x^{\lambda}\right), & x\in\Sigma_{\lambda}\end{cases}\tag{7}$$

那么

$$w_{\lambda}\left(x\right)\geq 0,x\in\Omega\tag{8}$$

更近一步地，若存在 Ω 中某一点 x 使得 $u\left(x\right)=0$，那么

$$u\left(x\right)=0\text{, a.e.}\quad x\in R^{n}$$

若再假设有 $\varliminf\limits_{|x|\to\infty}w_{\lambda}\left(x\right)\geq 0$，那么在无界区域上，该引理也成立。

然而在有些情况下，w_{λ} 可能不满足 $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}w_{\lambda}\left(x\right)\geq 0$，但是可以证明 $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}w_{\lambda}\left(x\right)+c\left(x\right)w_{\lambda}\left(x\right)\geq 0$，此时，$c\left(x\right)$ 是与 u 有关的某个函数，当 $c\left(x\right)$ 非负时，极大值原理显然成立。在移动平面的过程中，若 $c\left(x\right)$ 不是“太负”，会逐渐形成一个狭窄区域，极值原理也更容易成立。

引理 2 [10] (狭窄区域的极值原理) 设 Ω 是 Σ_{λ} 中的有界狭窄区域，且 $\Omega\subset\left\{x\mid\lambda-l<x_{1}<\lambda\right\}$，其中 l 是一足够小的实数。若 $w_{\lambda}\left(x\right)\in C_{loc}^{1,1}\left(\Omega\right)\cap L_{\alpha}$ 且 $w_{\lambda}\left(x\right)$ 在区域 $\bar{\Omega}$ 中下半连续。如果 $c\left(x\right)$ 在 Ω 中下方有界，同时有

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}w_{\lambda}\left(x\right)+c\left(x\right)w_{\lambda}\left(x\right)\geq 0, & x\in\Omega\\ w_{\lambda}\left(x\right)\geq 0, & x\in\Sigma_{\lambda}\setminus\Omega\\ w_{\lambda}\left(x\right)=-w_{\lambda}\left(x^{\lambda}\right), & x\in\Sigma_{\lambda}\end{cases}\tag{9}$$

那么，对于足够小的 l，有

$$w_{\lambda}\left(x\right)\geq 0,\quad x\in\Omega\tag{10}$$

更近一步地，若存在 Ω 中某一点 x 使得 $u(x)=0$，那么

$$u(x)=0,\ \text{a.e.}\quad x\in R^n$$

若再假设有 $\lim\limits_{|x|\to\infty} w_\lambda(x)\ge 0$，那么在无界区域上，该引理也成立。

在无界域上时，需要从无穷远处向右移动平面，为确保解在无穷远处的行为是合理的，例如在许多物理问题中，如电磁波，量子力学中的波函数等，解在无穷远处应该趋于 0，因此需要有无穷远处衰减条件，用于保证在无穷远处解不会无限增长，从而避免非物理解的出现。无穷远处衰减条件允许我们在无穷远处应用极值原理，从而建立狭窄区域上的极值原理，因此有如下引理：

引理 3 [10] (无穷远处衰减) 设 $\Sigma_\lambda=\left\{x\in R^n \mid x_1<\lambda\right\}$，$\Omega$ 是 Σ_λ 中的无界区域，$w_\lambda(x)\in C^{1,1}_{loc}(\Omega)\cap L_\alpha$ 是

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w_\lambda(x)+c(x)w_\lambda(x)\ge 0, & x\in\Omega\\ w_\lambda(x)\ge 0, & x\in\Sigma_\lambda\setminus\Omega\\ w_\lambda(x)=-w_\lambda(x^\lambda), & x\in\Sigma_\lambda\end{cases}\tag{11}$$

的解，若

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^\alpha c(x)\ge 0\tag{12}$$

那么，存在一个常数 $R_0>0$ (取决于 $c(x)$，但与 $w_\lambda(x)$ 无关)，使得若

$$w_\lambda(x^0)=\min_\Omega w_\lambda(x)<0\tag{13}$$

那么

$$\left|x^0\right|\le R_0\tag{14}$$

3. 主要结论与证明

本节主要通过各种极值原理的运用，采用直接移动平面法对非线性拉普拉斯方程(6)的正解 $u\in C^{1,1}_{loc}\left(R^n\setminus\overline{B_1}\right)\cap L_s\left(R^n\right)$ 的径向对称性进行研究，得出了以下结论：

3.1. 主要结论

定理 1： 设 $u\in C^{1,1}_{loc}\left(R^n\setminus\overline{B_1}\right)\cap L_s\left(R^n\right)$ 是下列非线性方程

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x)+u(x)=|x|^p u^q(x), & x\in R^n\setminus\overline{B_1}\\ u(x)=\varphi(x), & x\in\overline{B_1}\\ u(x)>0, & x\in R^n\end{cases}\tag{15}$$

的正解，其中 $0<\alpha<2$，$p<0$，$q<0$，$\overline{B_1}:=\left\{x\in R^n \mid |x|\le 1\right\}$，$R^n\setminus\overline{B_1}:=\left\{x\in R^n \mid |x|>1\right\}$ 如果 u 在 $R^n\setminus\overline{B_1}$ 内有上界，$\lim\limits_{|x|\to\infty}u(x)=a<\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}}|x|^p$，且满足对任意 $x\in R^n\setminus\overline{B_1}$，$y\in\overline{B_1}$，有 $u(x)\le\varphi(y)$，则关于任意分量 x_i，正解 u 关于原点径向对称。

3.2. 主要结论的证明

本节主要通过极值原理的灵活运用，用移动平面法进行证明。首先任意选取一个方向作为 x_1 轴方向，对于任意实数 λ：

令 $T_\lambda=\left\{x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in R^n \mid x_1=\lambda\right\}$，这是需要移动的超平面；

记平面左边的区域为 Σ_λ，即 $\Sigma_\lambda=\left\{x\in R^n \mid x_1<\lambda\right\}$；

记 $x^\lambda=\left(2\lambda-x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 为点 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in\Sigma_\lambda$ 关于超平面 T_λ 的对称点，然后比较解 u 在点 x 和 x^λ 处的值。

令 $w_\lambda(x)=u_\lambda(x)-u(x)$，$u_\lambda(x)=u\left(x^\lambda\right)$，$\Sigma_\lambda^-=\left\{x \mid w_\lambda(x)<0\right\}$，此时，当 $w_\lambda(x)<0$ 时，由 $|x|>\left|x^\lambda\right|$，代入(15)有

$$
\begin{aligned}
(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w_\lambda(x) &= (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u_\lambda(x)-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x)\\
&=\left(\left|x^\lambda\right|^p u_\lambda^q(x)-u_\lambda(x)\right)-\left(|x|^p u^q(x)-u(x)\right)\\
&=\left(\left|x^\lambda\right|^p u_\lambda^q(x)-|x|^p u^q(x)\right)-\left(u_\lambda(x)-u(x)\right)\\
&\geq |x|^p\left(u_\lambda^q(x)-u^q(x)\right)-\left(u_\lambda(x)-u(x)\right)\\
&=|x|^p\left(u_\lambda^q(x)-u^q(x)\right)-w_\lambda(x)
\end{aligned}
$$

可以得到 $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w_\lambda(x)\geq|x|^p\left(u_\lambda^q(x)-u^q(x)\right)-w_\lambda(x)$

即

$$
(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w_\lambda(x)+\left(1-q|x|^p u^{q-1}(x)\right)w_\lambda(x)\geq 0,\ \forall x\in\Sigma_\lambda^-\setminus\overline{B_1} \tag{16}
$$

再由中值定理可得

$$
(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w_\lambda(x)+c(x)w_\lambda(x)\geq 0,\ \forall x\in\Sigma_\lambda^-\setminus\overline{B_1},
$$

其中

$$
c(x)=1-q|x|^p u^{q-1}(x)
$$

第一步：利用引理 3 无穷远处衰减原理来证明，对于足够负的 λ，有

$$
w_\lambda(x)\geq 0,\ x\in\Sigma_\lambda\setminus\overline{B_1} \tag{17}
$$

成立。

通常采用反证法，假设(17)不成立，那么可以推出存在 $\Sigma_\lambda\setminus\overline{B_1}$ 中某一点 $\hat{x}$ 使得 $w_\lambda(\hat{x})<0$ 成立。

根据前面的假设条件 $\lim\limits_{|x|\to\infty}u(x)=a<\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}}|x|^p$，可知对于固定的 λ，有

$$
\lim_{|x|\to\infty} w_\lambda(x)=0
$$

因此，若 $w_\lambda(x)$ 在 $\Sigma_\lambda\setminus\overline{B_1}$ 区域内存在某点小于 0，那么 $w_\lambda(x)$ 的负极小值一定在 $\Sigma_\lambda\setminus\overline{B_1}$ 内取得。假设极小值点为 x^0，此时有

$$
w_\lambda\left(x^0\right)=\min_{\Omega} w_\lambda(x)<0 \tag{18}
$$

成立。根据前面可知 $c(x)=1-q|x|^p u^{q-1}(x)$ 以及定理 1 中的条件 $p,q<0$，那么当 $|x|\to\infty$ 时，马上可以得到 $c(x)\geq 0$，因此引理 3 中的假设

$$
\lim_{|x|\to\infty}|x|^\alpha c(x)\geq 0 \tag{19}
$$

成立，则有

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w_\lambda(x)+c(x) w_\lambda(x) \geq 0, & x \in \Sigma_\lambda^{-} \backslash \overline{\mathrm{B}_1} \\ w_\lambda(x) \geq 0, & x \in \Sigma_\lambda \backslash \overline{\mathrm{B}_1} \\ w_\lambda(x)=-w_\lambda\left(x^\lambda\right), & x \in \Sigma_\lambda\end{cases} \tag{20}$$

由上可知，结合(18)，(19)，(20)式，根据引理 3，因此存在与 λ 无关的 R_0，使得

$$\left|x^0\right| \leq R_0 \tag{21}$$

由此可见，对于 $\lambda<-R_0$，必须有 $w_\lambda(x) \geq 0$ 成立，即(17)式成立，这就完成了第一步的证明。

第二步：当第一步成立时，移动平面的前提条件达成，现在向右缓慢移动平面 T_λ，只要 $w_\lambda(x) \geq 0$，$x \in \Sigma_\lambda \backslash \overline{\mathrm{B}_1}$ 成立，就继续向右移动平面，直到移动到其极限位置 T_{λ_0}，定义 $\lambda_0=\sup\left\{\lambda \mid w_\mu \geq 0, \forall x \in \Sigma_\mu, \mu \leq \lambda\right\}$。由式(21)可知 $\lambda_0<\infty$，只需要证明

$$w_{\lambda_0}(x) \equiv 0,\ x \in \Sigma_{\lambda_0} \backslash \bar{B}_1 \tag{22}$$

此时有 $\lambda_0=0$ 成立。

采用矛盾法论证，假设在 $\Sigma_{\lambda_0} \backslash \bar{B}_1$ 中，有 $w_{\lambda_0}(x) \geq 0$ 且 $w_{\lambda_0} \not\equiv 0$，则必有

$$w_{\lambda_0}(x)>0,\ x \in \Sigma_{\lambda_0} \backslash \bar{B}_1 \tag{23}$$

事实上，如若(23)不成立，则存在点 $x^0 \in \Sigma_{\lambda_0} \backslash \bar{B}_1$，使得

$$w_{\lambda_0}\left(x^0\right)=\min w_{\lambda_0}=0 \tag{24}$$

根据 $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w_{\lambda_0}\left(x^0\right)$ 的定义，有

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} w_{\lambda_0}\left(x^0\right) & =C_{n, \alpha} P.V. \int_{R^n} \frac{w_{\lambda_0}\left(x^0\right)-w_{\lambda_0}(y)}{\left|x^0-y\right|^{n+\alpha}} \mathrm{d} y \\
& =C_{n, \alpha} P.V. \int_{R^n} \frac{-w_{\lambda_0}(y)}{\left|x^0-y\right|^{n+\alpha}} \mathrm{d} y \\
& =C_{n, \alpha} P.V. \int_{R^n \backslash \Sigma_{\lambda_0}} \frac{-w_{\lambda_0}(y)}{\left|x^0-y\right|^{n+\alpha}} \mathrm{d} y+C_{n, \alpha} P.V. \int_{\Sigma_{\lambda_0}} \frac{-w_{\lambda_0}(y)}{\left|x^0-y\right|^{n+\alpha}} \mathrm{d} y \\
& =C_{n, \alpha} P.V. \int_{\Sigma_{\lambda_0}} \frac{w_{\lambda_0}(y)}{\left|x^0-y^{\lambda_0}\right|^{n+\alpha}} \mathrm{d} y+C_{n, \alpha} P.V. \int_{\Sigma_{\lambda_0}} \frac{-w_{\lambda_0}(y)}{\left|x^0-y\right|^{n+\alpha}} \mathrm{d} y \\
& =C_{n, \alpha} P.V. \int_{\Sigma_{\lambda_0}}\left(\frac{1}{\left|x^0-y^{\lambda_0}\right|^{n+\alpha}}-\frac{1}{\left|x^0-y\right|^{n+\alpha}}\right) w_{\lambda_0}(y) d y \\
& <0
\end{aligned}$$

这与(16)相矛盾，因此(23)成立。

然后需要证明平面 T_λ 可以向右移动，由 $w_\lambda(x)$ 关于 λ 的连续性可得，存在 $\varepsilon>0$ 和 $\varepsilon<\delta$，使得对于任意的 $\lambda \in\left(\lambda_0, \lambda_0+\varepsilon\right)$ 都有

$$w_\lambda(x) \geq 0,\ x \in \sum\nolimits_{\lambda_0} \backslash \bar{B}_1 \tag{25}$$

这与 λ_0 的定义产生矛盾，因此(22)必须成立，此时有 $\lambda_0=0$ 成立。

要想证明(25)式成立，需要借助引理 2 和引理 3 实现。

若(25)成立，则有

$$w_\lambda(x)\ge 0,\ \forall x\in\left(\Sigma_\lambda\setminus\Sigma_{\lambda_0-\delta}\right)\setminus\overline{B}_1 \tag{26}$$

当 $\lambda_0<0$ 时，必有

$$w_{\lambda_0}(x)>0,\ \forall x\in\Sigma_{\lambda_0}\setminus\overline{B}_1 \tag{27}$$

若(27)不成立，那么必然存在 x^0 使得

$$w_{\lambda_0}\left(x^0\right)=\min_{\Sigma_{\lambda_0}\setminus\overline{B}_1} w_{\lambda_0}(x)=0$$

由 $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}w_{\lambda_0}\left(x^0\right)$ 的定义可得

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}w_{\lambda_0}\left(x^0\right)=C_{n,\alpha}P.V.\int_{\Sigma_{\lambda_0}}\left(\frac{1}{\left|x^0-y^{\lambda_0}\right|^{n+\alpha}}-\frac{1}{\left|x^0-y\right|^{n+\alpha}}\right)w_{\lambda_0}(y)\mathrm{d}y<0 \tag{28}$$

另一方面，由于 $w_{\lambda_0}\left(x^0\right)=u_{\lambda_0}\left(x^0\right)-u\left(x^0\right)=0$，有

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}w_{\lambda_0}\left(x^0\right)&=(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u_{\lambda_0}\left(x^0\right)-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u\left(x^0\right)\\&=\left(\left|\left(x^0\right)^{\lambda_0}\right|^p u_{\lambda_0}^q\left(x^0\right)-u_{\lambda_0}\left(x^0\right)\right)-\left(\left|x^0\right|^p u^q\left(x^0\right)-u\left(x^0\right)\right)\\&=\left(\left|\left(x^0\right)^{\lambda_0}\right|^p u_{\lambda_0}^q\left(x^0\right)-\left|x^0\right|^p u^q\left(x^0\right)\right)-\left(u_{\lambda_0}\left(x^0\right)-u\left(x^0\right)\right)\\&\ge\left|x^0\right|^p\left(u_{\lambda_0}^q\left(x^0\right)-u^q\left(x^0\right)\right)-\left(u_{\lambda_0}\left(x^0\right)-u\left(x^0\right)\right)\\&=\left|x^0\right|^p\left(u_{\lambda_0}^q\left(x^0\right)-u^q\left(x^0\right)\right)-0\\&\ge 0\end{aligned}$$

这与(28)式矛盾，因此(27)式成立。

由(27)式可知，存在常数 $c_0>0$ 和 δ 使得

$$w_{\lambda_0}(x)\ge c_0>0,\ x\in\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta}\cap\overline{B}_1} \tag{29}$$

对于任意的 $x\in\Sigma_\lambda\setminus\overline{B_1}$， $y\in\overline{B_1}$，有 $u(x)<\varphi(y)$ 成立。

在狭窄区域 $\left(\Sigma_\lambda\setminus\Sigma_{\lambda_0-\delta}\right)\setminus\overline{B}_1$ 中，根据前面的假设，有 $\lim\limits_{|x|\to\infty}w_\lambda(x)=0$，且 $w_\lambda(x)$ 在区域 $\overline{\Sigma_{\lambda_0-\delta}\cap\overline{B}_1}$ 中下半连续，由 $c(x)\ge 0$ 可知， $c(x)$ 是下有界的，另外有 $w_\lambda(x)$ 满足

$$\begin{cases}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}w_\lambda(x)+c(x)w_\lambda(x)\ge 0, & x\in\Sigma_\lambda^-\setminus\overline{\mathrm{B}_1}\\ w_\lambda(x)\ge 0, & x\in\left(\Sigma_\lambda\setminus\Sigma_{\lambda_0-\delta}\right)\setminus\overline{B}_1\\ w_\lambda(x)=-w_\lambda\left(x^\lambda\right), & x\in\Sigma_\lambda\end{cases}$$

根据引理 2 狭窄区域的极值原理可知，对于任意的 $\lambda\in(\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon)$，有

$$w_\lambda(x)\ge 0,\ \forall x\in\left(\Sigma_\lambda\setminus\Sigma_{\lambda_0-\delta}\right)\setminus\overline{B}_1$$

故(26)成立。

再结合 $c(x)=1-q|x|^p u^{q-1}(x)$，根据引理 3 无穷远处衰减，可得

$$w_\lambda(x)\ge 0,\ \forall x\in\Sigma_{\lambda_0}\setminus\bar{B}_1 \tag{30}$$

即(25)式成立。这与 λ_0 的定义相矛盾，即若仍满足(30)式，则平面 T_λ 还可以向右移动一段距离，从而 λ_0 不是平面可向右移动的极限位置，事实上，T_{λ_0} 为平面可移动的极限位置，因此必有 $\lambda_0=0$。

同理，将平面 T_λ 从 $+\infty$ 向左移动可得

$$w_\lambda(x)\le 0,\ x\in\Sigma_{\lambda_0}\setminus\bar{B}_1 \tag{31}$$

结合(25)式，(31)式可知

$$\lambda_0=0,\ w_{\lambda_0}(x)\equiv 0,\ x\in\Sigma_{\lambda_0}\setminus\bar{B}_1$$

这就证明了 $u(x)$ 关于平面 T_{λ_0} 对称，由于 x_1 轴方向的任意性，则 $u(x)$ 是关于原点径向对称的。显然，$u(x)$ 在 $\Sigma_\lambda\setminus\overline{B_1}$ 中有上界，且满足对任意的 $x\in\Sigma_\lambda\setminus\overline{B_1}$，$y\in\overline{B_1}$，有 $u(x)<\varphi(y)$，定理 1 证明完毕。

本文只讨论了 $p,q<0$ 时方程(6)的正解的对称性问题，对于 p,q 取不同值时解的径向对称性没有作过多的讨论。例如，当 $p=q=0$ 时，此时方程的右端项变为常数，整个方程也相对简单，可以比较容易证得方程的正解也是关于原点径向对称的。但是当 $p<0,q>0$，或是 $p>0,q<0$，或是 $p,q>0$ 时，此时又变为一个新的问题，感兴趣的学者可以去深入探讨一下在该条件下正解的径向对称性问题。

基金项目

江西省自然科学基金项目(20212BAB201001)。

参考文献

[1] Jiang, X.Y. and Xu, Y.M. (2006) Analysis of Fractional Anomalous Diffusion Caused by an Instantaneous Point Source in Disordered Fractal Media. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **41**, 156-165. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.07.023

[2] Tarasov, V.E. and Zaslavsky, G.M. (2006) Fractional Dynamics of Systems with Long-Range Interaction. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **11**, 885-898. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.03.005

[3] Constantin, P. (2006) Euler Equations, Navier-Stokes Equations and Turbulence. Mathematical Foundation of Turbulent Viscous Flows, 18711-18743.

[4] Caffarelli, L. and Vasseur, A. (2010) Drift Diffusion Equations with Fractional Diffusion and the Quasi-Geostrophic Equation. *Annals of Mathematics*, **171**, 1903-1930. https://doi.org/10.4007/annals.2010.171.1903

[5] Chen, W. and Zhu, J. (2016) Indefinite Fractional Elliptic Problem and Liouville Theorems. *Journal of Differential Equations*, **260**, 4758-4785. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.11.029

[6] Dai, W., Liu, Z. and Lu, G. (2016) Liouville Type Theorems for PDE and IE Systems Involving Fractional Laplacian on a Half Space. *Potential Analysis*, **46**, 569-588. https://doi.org/10.1007/s11118-016-9594-6

[7] Ma, L. and Zhao, L. (2009) Classification of Positive Solitary Solutions of the Nonlinear Choquard Equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **195**, 455-467. https://doi.org/10.1007/s00205-008-0208-3

[8] Yuan, Z., Cui, X., Chen, W. and Zhuo, R. (2015) Symmetry and Non-Existence of Solutions for a Nonlinear System Involving the Fractional Laplacian. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **36**, 1125-1141. https://doi.org/10.3934/dcds.2016.36.1125

[9] Caffarelli, L. and Silvestre, L. (2007) An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian. *Communications in Partial Differential Equations*, **32**, 1245-1260. https://doi.org/10.1080/03605300600987306

[10] Chen, W., Li, C. and Li, Y. (2017) A Direct Method of Moving Planes for the Fractional Laplacian. *Advances in Mathematics*, **308**, 404-437. https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.11.038

[11] Jarohs, S. and Weth, T. (2014) Symmetry via Antisymmetric Maximum Principles in Nonlocal Problems of Variable Order. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (1923-), **195**, 273-291. https://doi.org/10.1007/s10231-014-0462-y

[12] Felmer, P., Quaas, A. and Tan, J. (2012) Positive Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation with the Fractional Laplacian. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*: *Section A Mathematics*, **142**, 1237-1262. https://doi.org/10.1017/s0308210511000746

[13] 叶方琪. 两类分数阶拉普拉斯方程正解的单调性[D]: [硕士学位论文]. 金华: 浙江师范大学, 2022.

[14] Duan, Y. and Wei, Y. (2024) Properties of Fractional P-Laplace Equations with Sign-Changing Potential. *Nonlinear Analysis*, **249**, Article ID: 113628. https://doi.org/10.1016/j.na.2024.113628

[15] Cao, L. and Fan, L. (2021) Symmetry and Monotonicity of Positive Solutions for a System Involving Fractional P&Q Laplacian in a Ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **68**, 667-679. https://doi.org/10.1080/17476933.2021.2009819