

一个五重七点对偶插值型细分

刘月, 钟明月, 薛靖儒, 亓万锋*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2024年12月27日; 录用日期: 2025年1月18日; 发布日期: 2025年1月29日

摘要

对偶插值型细分方法通过结合对偶型细分的拓扑特性与插值型细分的几何精确性, 逐步成为细分领域的研究热点。该方法的关键在于生成的曲线或曲面既能保持初始控制多边形插值特性, 又具备光滑性等特点。本文阐述了一种基于两个参数的五重七点对偶插值型细分格式, 针对该细分格式的多项式再生性和连续性开展了计算与讨论。为提升对偶插值型细分方法的灵活性和适用性提供了新思路。

关键词

细分格式, 再生性, 连续性

A Five-Arity Seven-Point Dual Interpolatory Subdivision Scheme

Yue Liu, Mingyue Zhong, Jingru Xue, Wanfeng Qi*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 27th, 2024; accepted: Jan. 18th, 2025; published: Jan. 29th, 2025

Abstract

Dual interpolatory subdivision scheme, by combining the topological properties of dual subdivision with the geometric precision of interpolatory subdivision, has gradually become a research hotspot in the subdivision field. The key to this scheme lies in generating curves or surfaces that both preserve the interpolation characteristics of the initial control polygon and exhibit smoothness. This paper proposes a five-arity seven-point dual interpolatory subdivision scheme with two parameters, and analyzes its continuity and regeneration. This provides new ideas to enhance the flexibility and applicability of dual interpolatory subdivision schemes.

*通讯作者。

文章引用: 刘月, 钟明月, 薛靖儒, 亓万锋. 一个五重七点对偶插值型细分[J]. 应用数学进展, 2025, 14(1): 433-441.
DOI: 10.12677/aam.2025.141042

Keywords

Subdivision Scheme, Reproduction, Continuity

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

细分方法是一种通过递归细化几何模型以生成平滑曲线或曲面的技术，它在计算机图形学、计算机辅助设计(CAD)、动画制作等领域发挥着不可替代的作用。

在细分方法中，按照拓扑规则的不同，可分为基本型[1]和对偶型[2]。基本型细分直接在原始顶点的基础上生成新顶点，网格结构逐步细化，而对偶型细分则通过对偶操作在网格的面或边基础上生成新顶点，适用于非规则网格结构。此外，通过生成的曲线或曲面是否经过初始控制顶点，细分方法可被分为逼近型细分格式和插值型细分格式。逼近型细分格式不要求生成的曲线或曲面经过初始顶点，但通常能够获得更高的光滑度，例如 Catmull-Clark [3]和 Loop 细分算法[1]；而插值型细分则要求生成的结果严格通过初始顶点，能够更好地保持原始数据的几何特性，例如 Butterfly [4]插值细分方法。这些分类为细分方法在多分辨率建模、曲面设计和几何优化中的应用提供了灵活的选择。

对偶插值型细分方法作为细分技术中的重要分支，近年来逐渐引起学术界的关注，具有广阔的研究空间。其核心思想是结合对偶型细分的拓扑特点与插值型细分的几何精确性，生成能够严格通过控制多边形的平滑曲线或曲面。对偶型细分的极限曲线是否具备插值控制多边形的性质，已成为部分研究工作的重点方向。2018 年 Deng 等人[5]探讨了 2 重 $2n$ 点对偶型细分格式的重复局部操作及其插值性质，展示了其在细分算法中具有的优势。2019 年 Romani [6]讨论了一种具有紧支撑的对偶插值细分格式，并讨论了如何构造这样的细分格式，分析了它们在插值过程中如何保持光滑性。2022 年，Gemignani 等人[7]深入分析了与对偶单变量插值细分方案相关的 Bézout-like 多项式方程。通过构造和研究这些多项式方程，揭示了细分方案的插值性质和连续性，并通过数值实验验证了其在实际应用中的有效性。2023 年，Viscardi [8]研究了优化的对偶插值细分格式，旨在改进现有细分方法的性能，提高其在实际应用中的优势，文中分析了三重对偶插值细分格式和一个含三参数掩模族的重四重对偶插值细分格式，受此启发，本文将扩大支集范围，构造了一个含两个参数的五重七点对偶插值细分格式，分析其光滑性与再生性。

2. 预备知识

定义 2.1 给定一个细分格式 S ，它可以由有限个非零系数组成的掩模来定义，这些系数构成的掩模用 $a = \{a_i | i \in \mathbb{Z}\}$ 来表示。初始控制顶点集记为 $P^0 = \{P_i^0 \in \mathbb{R}^d | i \in \mathbb{Z}\}$ ，细分 k 次为 $P^k = \{P_i^k \in \mathbb{R}^d | i \in \mathbb{Z}\}$ ， m 代表重数，细分格式满足以下细分规则：

$$\begin{cases} P_{mi}^{k+1} = P_i^k, \\ P_{mi+j}^{k+1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{mi+j-l} P_l^k, j = 0, 1, \dots, m-1, i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Laurent 多项式 $a(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 称为细分格式的生成多项式，是研究细分格式收敛性和光滑性的重要工具。

引理 2.1 [9] 若细分格式 S 一致收敛, 则对于所以初始控制点集, $\frac{1}{m}S_1$ 都收敛到零函数, S_n 记为 n 阶差分格, 其中 $dP^k = S_1 dP^{k-1}$, $P^k = S^k P^0$, $dP^k = \left\{ (dp^k)_i = m^k (p_{i+1}^k - p_i^k) \mid i \in \mathbb{Z} \right\}$ 。 S_n 的生成多项式记为 $a^{(n)}(z)$, $a^{(n)}(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^{(n)} z^i$ 。

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{mi+j} = 1, j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.1)$$

是细分一致收敛的必要条件。

对于五重细分格式 S 满足:

$$\begin{cases} P_{5i}^{k+1} = P_i^k, \\ P_{5i+j}^{k+1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{5i+j-5l} P_l^k, j = 0, 1, \dots, 4, i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{5i+j} = 1, j = 0, 1, \dots, 4.$$

引理 2.2 [9] 若 m 重细分格式 S 是 C^n 连续的, 则有 $S_j (j=1, 2, \dots, n+1)$, 满足 $\frac{1}{m}S_{n+1}$ 对所以初始控制网格均收敛到零函数。

引理 2.3 [9] 细分格式 S 能够再生次数最高为 d 次时, 称该细分格式 S 具有 d 次多项式再生性, 细分格式 S 能够再生不超过 d 次的多项式, 需满足:

$$a^{(k)}(1) = m \prod_{l=0}^{k-1} (\tau - l), a^{(k)}(\xi_m^j) = 0, j = 1, \dots, m-1,$$

$$\text{其中 } t_i^k = t_0^k + \frac{i}{m^k}, t_0^k = t_0^{k-1} - \frac{\tau}{m^k}, \tau = \frac{a'(1)}{m}, \xi_m^j = \exp\left(\frac{I2\pi}{m} j\right), I \text{ 为虚单位}.$$

3. 一种新的五重七点细分格式

文献[8]中构造分析了三重对偶插值细分、含三参数掩模族的四重对偶插值细分格式。受此启发, 本文将扩大支集范围, 构造了一个含两个参数的五重七点对偶插值细分格式, 相比于一个参数两个参数提供了更多的自由度可以增强极限曲线的灵活性, 提高稳定性。本文提出加细规则如下:

$$\begin{cases} P_{5i}^{k+1} = a_{15} P_{i-3}^k + a_{10} P_{i-2}^k + a_5 P_{i-1}^k + a_0 P_i^k + a_{-5} P_{i+1}^k + a_{-10} P_{i+2}^k + a_{-15} P_{i+3}^k, \\ P_{5i+1}^{k+1} = a_{11} P_{i-2}^k + a_6 P_{i-1}^k + a_1 P_i^k + a_{-4} P_{i+1}^k + a_{-9} P_{i+2}^k + a_{-14} P_{i+3}^k, \\ P_{5i+2}^{k+1} = a_{12} P_{i-2}^k + a_7 P_{i-1}^k + a_2 P_i^k + a_{-3} P_{i+1}^k + a_{-8} P_{i+2}^k + a_{-13} P_{i+3}^k, \\ P_{5i+3}^{k+1} = a_{13} P_{i-2}^k + a_8 P_{i-1}^k + a_3 P_i^k + a_{-2} P_{i+1}^k + a_{-7} P_{i+2}^k + a_{-12} P_{i+3}^k, \\ P_{5i+4}^{k+1} = a_{14} P_{i-2}^k + a_9 P_{i-1}^k + a_4 P_i^k + a_{-1} P_{i+1}^k + a_{-6} P_{i+2}^k + a_{-11} P_{i+3}^k, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $a_i, i = -14, \dots, 15$ 为掩模, 满足 $a_i = a_{-i}, i = 1, 2, \dots, 15$, a_{-14} 到 a_0 依次为

$$\begin{aligned} & \frac{\omega}{125}, \frac{9\omega}{125}, 0, \frac{\mu - 50\omega}{125}, \frac{103 + 16\mu - 800\omega}{18000}, \\ & \frac{-97 + 8\mu - 688\omega}{9000}, \frac{-91 + 16\mu - 1376\omega}{2000}, -\frac{1}{16}, \frac{-119 - 64\mu + 3344\omega}{2000}, \\ & \frac{-925 - 64\mu + 3344\omega}{18000}, \frac{1469 - 64\mu + 4064\omega}{18000}, \frac{663 - 64\mu + 4064\omega}{2000}, \\ & \frac{9}{16}, \frac{1547 + 96\mu - 5376\omega}{2000}, \frac{5849 + 32\mu - 1792\omega}{6000}. \end{aligned}$$

3.1. 连续性分析

下面定理指出细分格式(3.1)的连续性。

定理 1. 细分格式(3.1)最高可达 C^2 连续。

证明：由引理 2.2 知细分格式 S 若 C^n 连续，需存在 S_{n+1} 并有正整数 L 使得 $\left\| \left(\frac{1}{m} S_{n+1} \right)^L \right\|_{\infty} < 1$ ，同时

$$\left\| \left(\frac{1}{m} S_{n+1} \right)^L \right\|_{\infty} = \max \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| a_{i+m^L j}^{[n+1, L]} \right|, j = 0, 1, \dots, m^L - 1 \right\},$$

$$a^{[n+1, L]}(z) = \sum_{i, j} a_{i+m^L j}^{[n+1, L]} z^{i+m^L j} = \frac{1}{m^L} \prod_{j=0}^{L-1} a^{(n+1)}(z^{m^j}).$$

经过计算得到该细分格式的生成函数为

$$\begin{aligned} a(z) = & \frac{z^{-14}}{18000} (1+z) (1+z+z^2+z^3+z^4)^4 (103z^4 - 709z^5 + 1284z^6 - 709z^7 + 103z^8 \\ & + 144z^3\mu - 704z^4\mu + 1520z^5\mu - 1920z^6\mu + 1520z^7\mu - 704z^8\mu + 144z^9\mu \\ & + 144\omega + 576z\omega - 4896z^2\omega + 4896z^3\omega + 18064z^4\omega - 57568z^5\omega + 77568z^6\omega \\ & - 57568z^7\omega + 18064z^8\omega + 4896z^9\omega - 4896z^{10}\omega + 576z^{11}\omega + 144z^{12}\omega). \end{aligned}$$

再由引理 2.1 有：

$$\begin{aligned} a^{(1)}(z) = & \frac{1}{3600} (1+z) (1+z+z^2+z^3+z^4)^3 (103z^4 - 709z^5 + 1284z^6 - 709z^7 + 103z^8 \\ & + 144z^3\mu - 704z^4\mu + 1520z^5\mu - 1920z^6\mu + 1520z^7\mu - 704z^8\mu + 144z^9\mu \\ & + 144\omega + 576z\omega - 4896z^2\omega + 4896z^3\omega + 18064z^4\omega - 57568z^5\omega + 77568z^6\omega \\ & - 57568z^7\omega + 18064z^8\omega + 4896z^9\omega - 4896z^{10}\omega + 576z^{11}\omega + 144z^{12}\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{(2)}(z) = & \frac{1}{720} (1+z) (1+z+z^2+z^3+z^4)^2 (103z^4 - 709z^5 + 1284z^6 - 709z^7 + 103z^8 \\ & + 144z^3\mu - 704z^4\mu + 1520z^5\mu - 1920z^6\mu + 1520z^7\mu - 704z^8\mu + 144z^9\mu \\ & + 144\omega + 576z\omega - 4896z^2\omega + 4896z^3\omega + 18064z^4\omega - 57568z^5\omega + 77568z^6\omega \\ & - 57568z^7\omega + 18064z^8\omega + 4896z^9\omega - 4896z^{10}\omega + 576z^{11}\omega + 144z^{12}\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{(3)}(z) = & \frac{1}{144} (1+z) (1+z+z^2+z^3+z^4) (103z^4 - 709z^5 + 1284z^6 - 709z^7 + 103z^8 \\ & + 144z^3\mu - 704z^4\mu + 1520z^5\mu - 1920z^6\mu + 1520z^7\mu - 704z^8\mu + 144z^9\mu \\ & + 144\omega + 576z\omega - 4896z^2\omega + 4896z^3\omega + 18064z^4\omega - 57568z^5\omega + 77568z^6\omega \\ & - 57568z^7\omega + 18064z^8\omega + 4896z^9\omega - 4896z^{10}\omega + 576z^{11}\omega + 144z^{12}\omega) \end{aligned}$$

则可以计算得到

$$\left\| \frac{1}{5} S_1 \right\|_{\infty} = \max \left\{ \frac{16|\omega| + 3|16\omega + 11| + |32\omega + 233|}{1000}, \frac{1}{18000} (3|128\mu - 6784\omega + 83| + |-128\mu + 6400\omega + 103| \right. \\ + 3|-128\mu + 7552\omega + 1291| + |-128\mu + 9856\omega + 625| + 1152|\omega|), \frac{1}{1000} (2|12\mu - 708\omega + 107| \\ + |8\mu - 616\omega + 17| + 8|\mu - 50\omega| + 3|-8\mu + 424\omega + 1| + 72|\omega|), \frac{1}{1000} (2|12\mu - 708\omega + 107| \\ + |8\mu - 616\omega + 17| + 8|\mu - 50\omega| + 3|-8\mu + 424\omega + 1| + 72|\omega|), \frac{1}{18000} (3|128\mu - 6784\omega + 83| \\ + |-128\mu + 6400\omega + 103| + 3|-128\mu + 7552\omega + 1291| + |-128\mu + 9856\omega + 625| + 1152|\omega|) \left. \right\}.$$

求解不等式 $\left\| \frac{1}{5} S_1 \right\|_{\infty} < 1$ 可得

$$\begin{aligned} -\frac{383}{216} < \omega \leq -\frac{193}{144}, \frac{-2483 + 6400\omega}{128} < \mu < \frac{193 + 744\omega}{12}; \\ -\frac{193}{144} < \omega \leq -\frac{259}{288}, \frac{-2483 + 6400\omega}{128} < \mu < \frac{193 + 944\omega}{16}; \\ -\frac{259}{288} < \omega \leq 0, \frac{-853 + 3632\omega}{64} < \mu < \frac{193 + 944\omega}{16}; \\ 0 < \omega \leq \frac{227}{324}, \frac{-853 + 3776\omega}{64} < \mu < \frac{193 + 908\omega}{16}; \\ \frac{227}{324} < \omega \leq \frac{201}{128}, \frac{-853 + 3776\omega}{64} < \mu < \frac{403 + 1200\omega}{24}; \\ \frac{201}{128} < \omega < \frac{371}{192}, \frac{-2309 + 7936\omega}{128} < \mu < \frac{403 + 1200\omega}{24}. \end{aligned}$$

因此参数满足以上任意种情况时细分格式(3.1) C^0 连续。

同理, 计算可得

$$\left\| \frac{1}{5} S_2 \right\|_{\infty} = \max \left\{ \frac{1}{450} (2|-8\mu + 418\omega + 25| + |-16\mu + 1052\omega + 41| + |-32\mu + 1744\omega + 181| + 144|\omega|), \right. \\ \frac{1}{450} (2|-8\mu + 418\omega + 25| + |-16\mu + 1052\omega + 41| + |-32\mu + 1744\omega + 181| + 144|\omega|), \\ \frac{1}{3600} (2|272\mu - 14824\omega + 149| + |-272\mu + 13600\omega + 103| + |-272\mu + 18496\omega + 319| + 2448|\omega|), \\ \frac{1}{25} (2|\mu - 41\omega| + |-2\mu + 82\omega + 5|), \frac{1}{3600} (2|272\mu - 14824\omega + 149| + |-272\mu + 13600\omega + 103| \\ + |-272\mu + 18496\omega + 319| + 2448|\omega|) \left. \right\}.$$

令不等式 $\left\| \frac{1}{5} S_2 \right\|_{\infty} < 1$, 当参数满足以下任意种情况时细分格式(3.1) C^1 连续:

$$\begin{aligned} -\frac{3119}{7344} < \omega \leq -\frac{23}{68}, (-5 + 41\omega) < \mu < \frac{1759 + 18496\omega}{272}; \\ -\frac{23}{68} < \omega \leq -\frac{71}{432}, (-5 + 41\omega) < \mu < \frac{931 + 16048\omega}{272}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{71}{432} < \omega \leq 0, \frac{-89+1744\omega}{32} < \mu < \frac{931+16048\omega}{272}; \\
& 0 < \omega \leq \frac{1}{6}, \frac{-89+1888\omega}{32} < \mu < \frac{931+14824\omega}{272}; \\
& \frac{1}{6} < \omega \leq \frac{241}{544}, \frac{-89+1888\omega}{32} < \mu < \frac{1543+11152\omega}{272}; \\
& \frac{241}{544} < \omega < \frac{47}{102}, \frac{-1841+18496\omega}{272} < \mu < \frac{1543+11152\omega}{272}.
\end{aligned}$$

为分析其是否 C^2 连续, 计算得

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{5} S_3 \right\|_{\infty} &= \max \left\{ \frac{1}{720} (|-400\mu + 20144\omega + 503| + |-400\mu + 23456\omega + 647| + 3600|\omega|), \right. \\
&\quad \frac{1}{5} (|1-12\omega| + 12|\omega|), \frac{1}{720} (|-400\mu + 20144\omega + 503| + |-400\mu + 23456\omega + 647| + 3600|\omega|), \\
&\quad \frac{1}{720} (|272\mu - 16048\omega + 41| + 144|\mu - 24\omega| + |-416\mu + 19504\omega + 103|), \\
&\quad \left. \frac{1}{720} (|272\mu - 16048\omega + 41| + 144|\mu - 24\omega| + |-416\mu + 19504\omega + 103|) \right\}.
\end{aligned}$$

求解不等式 $\left\| \frac{1}{5} S_3 \right\|_{\infty} < 1$ 可得当参数满足以下情况中的一种时, 细分格式 C^2 连续:

$$\begin{aligned}
& -\frac{11}{112} < \omega < -\frac{203}{2080}, (-2+24\omega) < \mu < \frac{23+944\omega}{16}; \\
& -\frac{203}{2080} \leq \omega \leq -\frac{23}{560}, \frac{43+4000\omega}{80} < \mu < \frac{23+944\omega}{16}; \\
& -\frac{23}{560} < \omega \leq 0, \frac{43+4000\omega}{80} < \mu < \frac{391+19504\omega}{416}; \\
& 0 < \omega \leq \frac{93}{2800}, \frac{43+4720\omega}{80} < \mu < \frac{391+19504\omega}{416};
\end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2. 再生性分析

定理 2: 五重七点细分格式(3.1)的多项式可以再生 3 次多项式。

证明: 根据引理 2.3, 对该细分生成多项式 $a(z)$ 求一阶导数, 并带入 $z=1$ 可得 $\tau = \frac{a'(1)}{5} = \frac{1}{2}$ 。经计算

$$\text{可得: } a(1)=5, \quad \frac{1}{5}a'(1)=\tau, \quad \frac{1}{5}a''(1)=-\frac{1}{4}=\tau(\tau-1), \quad \frac{1}{5}a'''(1)=\frac{3}{8}=\tau(\tau-1)(\tau-2),$$

$\frac{1}{5}a^{(4)}(1)=-\frac{15}{16}=\frac{-5999+1600\mu-65600\omega}{30}$ 。由此推出五重七点细分格式的多项式对任意参数均可以再生 3 次。

3.3. 数值算例

只考虑参数 μ 对曲线的影响, 根据(3.2)取参数 $\omega=0.03$, 计算得到当 $-\frac{151117}{8000} < \mu < \frac{12561}{2000}$ 时, 生成

曲线有 C^0 连续性; $-\frac{32489}{4000} < \mu < -\frac{80213}{34000}$ 时, 生成曲线有 C^1 连续性; $-\frac{544}{125} < \mu < -\frac{8689}{2000}$ 时, 生成曲线有 C^2 连续连续性。图 1 左侧自上而下给出了 $\omega = 0.03$ 时, μ 的取值不同细分曲线连续性受到的影响。同理当 $\mu = \frac{3}{5}$, $\frac{917}{4720} < \omega < \frac{4457}{18880}$ 时, 生成曲线有 C^0 连续性; $\frac{3839}{80240} < \omega < \frac{541}{9440}$ 时, 生成曲线有 C^1 连续性; $\frac{707}{97520} < \omega < \frac{1}{944}$ 时, 生成曲线有 C^2 连续性。图 1 右侧自上而下给出了当参数 $\mu = \frac{3}{5}$ 时, ω 的取值不同细分曲线连续性受到的影响。从图 1 可以看出: 当 ω 固定时, μ 越小极限曲线越来越接近初始控制网格, 有扩张趋势; 当 μ 固定时, ω 越小曲线越光滑。其中初始控制网格均为蓝色, 极限曲线均为红色。

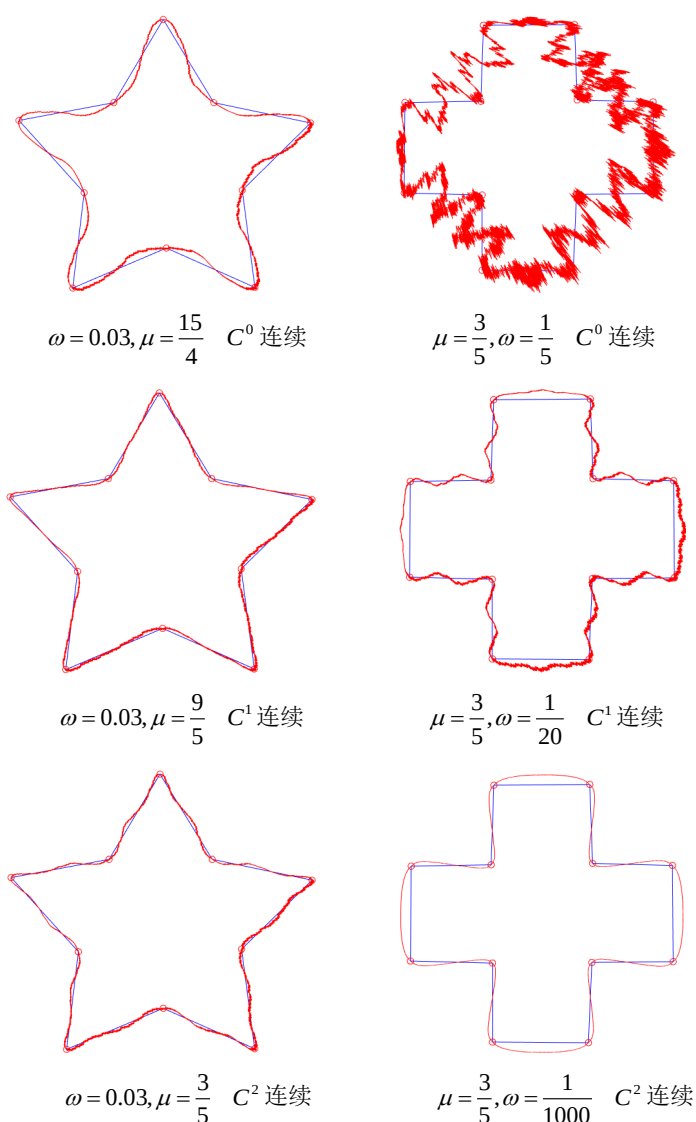


Figure 1. Subdivision examples under different parameters

图 1. 不同参数下的细分实例

图 2 为 $\omega = \frac{3}{1000}, \mu = \frac{4}{5}$ 时, 控制网格生成的极限曲线与其局部区域。第一行对蓝色控制网格加细 1 次, 第二行加细 6 次, 第三行加细 8 次。初始控制网格均为蓝色, 极限曲线均为红色。

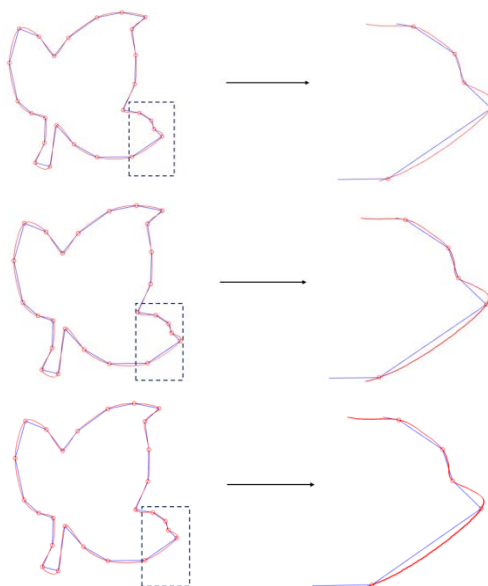


Figure 2. Impact of different refinement times on the control polygon (once, six times, eight times)

图 2. 不同加细次数对控制多边形的影响(1 次、6 次、8 次)

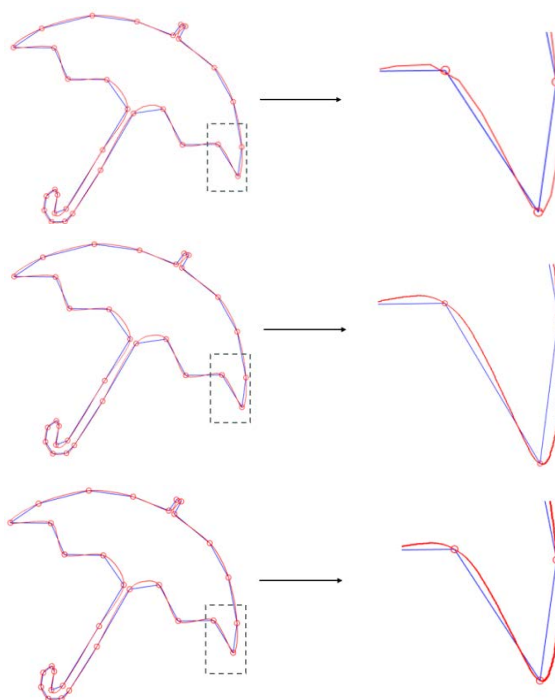


Figure 3. Refinement of the control polygon once, six times, and eight times (from top to bottom)

图 3. 对控制多边形加细 1 次、6 次、8 次(自上而下)

图 3 为 $\omega = \frac{3}{1000}$, $\mu = \frac{17}{20}$ 时, 控制网格生成的极限曲线与其局部区域。第一行为加细 1 次, 第五行为

加细 6 次, 第六行为加细 8 次。初始控制网格均为蓝色, 极限曲线均为红色。 ω 相同, 参数 μ 的不同影响着对细分曲线的灵活控制程度。图 2, 图 3 介绍了不同的迭代次数对曲线的影响, 迭代次数越高, 光滑度越好。

参考文献

- [1] Loop, C. (1987) Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles. Master's Thesis. University of Utah.
- [2] Dyn, N., Levin, D. and Gregory, J.A. (1987) A 4-Point Interpolatory Subdivision Scheme for Curve Design. *Computer Aided Geometric Design*, **4**, 257-268. [https://doi.org/10.1016/0167-8396\(87\)90001-x](https://doi.org/10.1016/0167-8396(87)90001-x)
- [3] Catmull, E. and Clark, J. (1978) Recursively Generated B-Spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes. *Computer-Aided Design*, **10**, 350-355. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90110-0](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90110-0)
- [4] Dyn, N., Levine, D. and Gregory, J.A. (1990) A Butterfly Subdivision Scheme for Surface Interpolation with Tension Control. *ACM Transactions on Graphics*, **9**, 160-169. <https://doi.org/10.1145/78956.78958>
- [5] Deng, C., Xu, H., Ma, W. and Li, Y. (2019) Repeated Local Operations and Associated Interpolation Properties of Dual $2n$ -Point Subdivision Schemes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **349**, 344-353. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.09.030>
- [6] Romani, L. (2019) Interpolating M-Refinable Functions with Compact Support: The Second Generation Class. *Applied Mathematics and Computation*, **361**, 735-746. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.018>
- [7] Gemignani, L., Romani, L. and Viscardi, A. (2022) Bezout-Like Polynomial Equations Associated with Dual Univariate Interpolating Subdivision Schemes. *Advances in Computational Mathematics*, **48**, Article No. 4. <https://doi.org/10.1007/s10444-021-09912-4>
- [8] Viscardi, A. (2023) Optimized Dual Interpolating Subdivision Schemes. *Applied Mathematics and Computation*, **458**, Article 128215. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2023.128215>
- [9] Aspert, N. (2003) Non-Linear Subdivision of Univariate Signals and Discrete Surfaces. Swiss Federal Institute of Technology in Lausanne.