

一类虚拟纽结的Affine Index多项式

郭兴博

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2024年12月27日; 录用日期: 2025年1月18日; 发布日期: 2025年1月29日

摘要

纽结理论是拓扑学的一个重要分支, 虚拟纽结理论是经典纽结理论的推广, 对它的研究是通过一种图解理论来展开的。虚拟纽结多项式是一类以多项式表达的虚拟纽结不变量, 例如Arrow多项式和Wriggle多项式。Affine index多项式是以虚拟纽结图的整数标记定义的单变量多项式。本文主要计算一类特殊虚拟纽结的Affine index多项式。按照Cheng着色的规则, 对虚拟纽结图的每一段弧进行整数标记, 计算每个经典交叉点的指标值, 进而得到这类特殊虚拟纽结的Affine index多项式的表达式。

关键词

虚拟纽结, Affine Index多项式, Cheng着色, 纽结不变量

The Affine Index Polynomials of Class of Virtual Knot

Xingbo Guo

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 27th, 2024; accepted: Jan. 18th, 2025; published: Jan. 29th, 2025

Abstract

Knot theory is an important branch of topology. Virtual knot theory is a generalization of classical knot theory, and its research is carried out through a graphic theory. The virtual knot polynomial refers to a class of virtual knot invariant expressed by polynomials, such as the Arrow polynomial and the Wriggle polynomial. The affine index polynomial is a univariate polynomial defined by the integer label of a virtual knot graph. In this paper, we mainly calculate affine index polynomials for a special class of virtual knots. According to the rules of Cheng coloring, we will integer label each arc of the virtual knot graph and calculate the index value of each classical crossings, and then get the expression of the affine index polynomial of this special virtual knot.

Keywords

Virtual Knot, Affine Index Polynomial, Cheng Coloring, Knot Invariant

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

纽结理论是拓扑学中的一个不可或缺的领域分支。虚拟纽结理论是经典纽结理论的推广，有一种图解理论用于研究虚拟纽结和链环，这种图解理论适合于构造虚拟纽结许多新的不变量以及拓展已知的不变量。已知有很多不变量可以区分两个虚拟纽结，近年来对于多项式不变量广泛受到学者们的关注，引入了许多虚拟纽结的多项式不变量。

1996 年 Kauffman 对经典纽结理论进行推广，正式提出了虚拟纽结理论。2000 年 Goussarov, Polyak 和 Viro 获得一项重大的成就，他们证明了经典纽结的有限型不变量的整个理论可以拓展到虚拟纽结的范畴内，如：纽结多项式等。Kauffman 证明了经典纽结 Bracket 多项式不变量可以拓展为包含经典纽结所有的拓扑信息的虚拟纽结的不变量，进而他利用 Bracket 多项式将经典纽结理论中的 Jones 多项式推广到虚拟纽结理论中的 f-多项式，根据虚拟纽结图经典交叉点处的整数标记和所分配权重定义了 Affine Index 多项式。虚拟纽结多项式不变量的发现，使虚拟纽结领域取得重大的突破。随后，许多新的纽结多项式不变量陆续被发现。

本文的组织结构为：在第 2 节中，回顾了一些关于虚拟纽结理论的基本知识、Cheng 着色的规则、经典交叉点指标值的内容，同时还简单介绍了 Affine index 多项式的定义和性质。在第 3 节中，构造一类特殊的虚拟纽结，按照 Cheng 着色的规则，对虚拟纽结图的每一弧进行整数标记，计算每个经典交叉点的指标值，将所得数值代入 Affine index 多项式的定义，进而得到这类特殊虚拟纽结的 Affine index 多项式的表达式。第 4 节中，对本文的主要研究结果进行总结。

2. 预备知识

2.1. 虚拟纽结理论[1]

虚拟纽结理论作为经典纽结理论的推广，是将圆嵌入到亏格可能大于零的加厚可定向的曲面上，而经典纽结理论则是亏格为零的情况。虚拟纽结图是一个由经典交叉点和虚拟交叉点共同构成的 4 价的平面图，如图 1 为经典交叉点和虚拟交叉点。

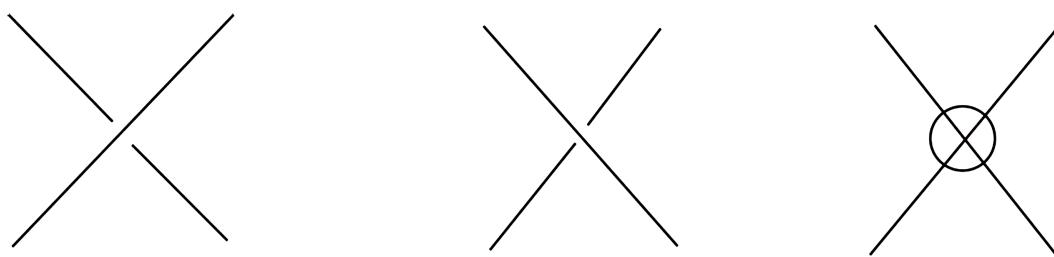


Figure 1. Classical and virtual crossings

图 1. 经典交叉点和虚拟交叉点

2.2. Virtual Reidemeister Move (虚拟纽结 R 变换) [2]

R 变换是虚拟纽结理论中最基本的变换，这三种变换形式具体为 vR_1 变换、 vR_2 变换、 vR_3 变换。虚拟纽结借助经典 R 变换和虚拟 R 变换确定两个虚拟纽结图的等价性。Virtual Reidemeister 变换的具体变换形式如图 2 所示。

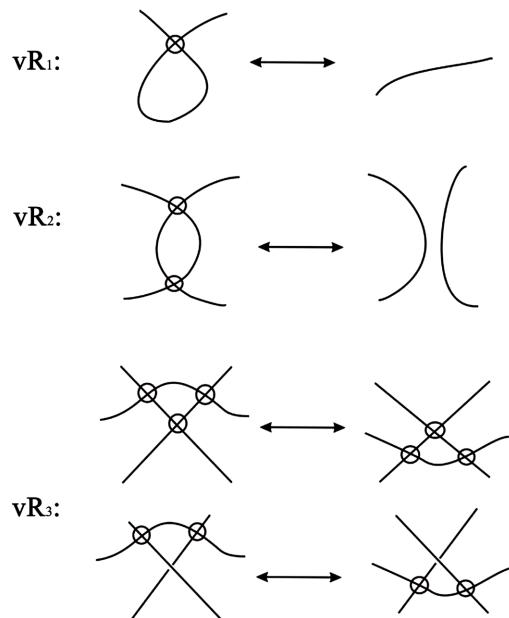


Figure 2. Reidemeister moves
图 2. Reidemeister 变换

2.3. 经典交叉点的符号

设 K 是一个有向的虚拟纽结， D 为虚拟纽结图。设 $C(D)$ 为虚拟纽结图 D 中所有经典交叉点的集合。任意的经典交叉点 $c \in C(D)$ 的符号如图 3 所示，记为 $\text{sgn}(c)$ 。

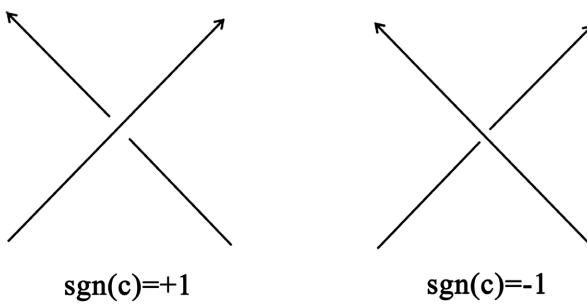


Figure 3. Crossing signs
图 3. 交叉点的符号

2.4. Cheng 着色[3]

沿虚拟纽结图 D 方向的两个连续经典交叉点之间的边称为弧，弧上有可能包含许多虚拟交叉点。给定一个整数值，对于 D 中每个经典交叉点和虚拟交叉点周围的弧按照图 4 所示进行整数标记，称为 Cheng 着色。

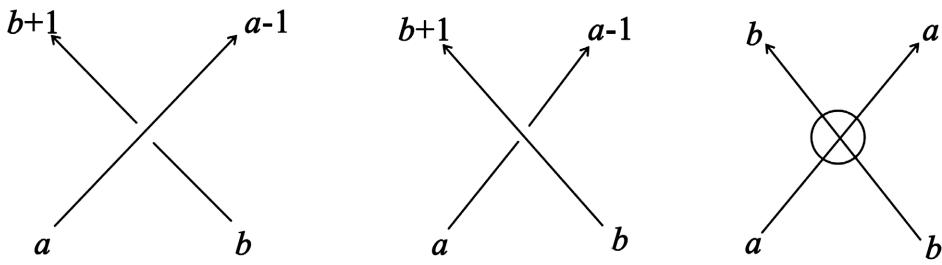


Figure 4. Labeling around crossing
图 4. 交叉点周围的标记

2.5. 经典交叉点的指标值[4]

对虚拟纽结图 D 中每个经典交叉点 $c \in C(D)$ 分配权重，称为经典交叉点的指标值，记为 $W_D(c)$ ，满足：

$$W_D(c) = \operatorname{sgn}(c)(a - b - 1) \quad (2.1)$$

2.6. Affine Index 多项式[3]

2.6.1. Affine Index 多项式的定义

虚拟纽结图 D 的 Affine index 多项式定义为：

$$P_D(t) = \sum_{c \in C(D)} \operatorname{sgn}(c) (t^{W_D(c)} - 1) \quad (2.2)$$

2.6.2. Affine Index 多项式的性质

通过反转有向虚拟纽结图 D 的方向得到 D 的逆，记为 \bar{D} ；通过转换所有经典交叉点的上下信息得到 D 的镜像，记为 D^* 。

性质 1 D 和 \bar{D} 的 Affine index 多项式满足： $P_{\bar{D}}(t) = P_D(t^{-1})$ 。

性质 2 D 和 D^* 的 Affine index 多项式满足： $P_{D^*}(t) = -P_D(t)$ 。

性质 3 若 D 是经典纽结的投影图，则 $P_D(t) = 0$ 。

3. 一类虚拟纽结的 Affine Index 多项式

3.1. 一类虚拟纽结 vK_n

对于任意的正整数 $n(n \geq 1)$ ，设 vK_n 为图 5 所示的虚拟纽结，由 n 个块组成。

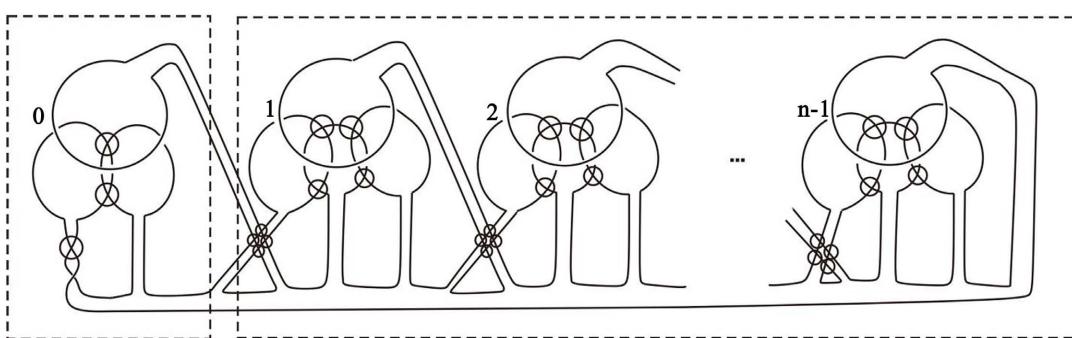


Figure 5. Virtual knot vK_n

图 5. 虚拟纽结 vK_n

3.2. vK_n 的 Affine Index 多项式

定理 3.1 虚拟纽结 vK_n 的 Affine index 多项式的表达式为:

$$P_{vK_n}(t) = (1-3n)t^{-1} + t^{-2} + (n-1)t^{-3} + 2n - 1$$

证明 将 vK_n 的每一块记为 $C_i (0 \leq i \leq n-1)$, 并且 C_i^k 表示第 i 块的第 k 个经典交叉点。对 vK_n 的经典交叉点按照图 4 所示规则进行整数标记, 首先选择某一弧段标记为整数 a , 按照 Cheng 着色的规则, 将 vK_n 的其余弧段表示出来。首先对 C_0 的整数标记如图 6 所示。

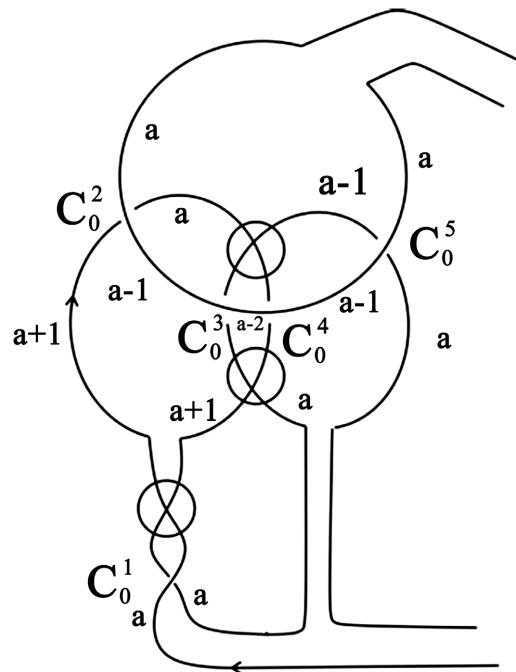


Figure 6. Cheng coloring of C_0

图 6. C_0 的 Cheng 着色

根据图 6 所示的标记, 进一步得到经典交叉点 $C_0^k (1 \leq k \leq 5)$ 的指标值 $W_{vK_n}(C_0^k)$ 如表 1 所示:

Table 1. sgn and W_{vK_n} values of C_0^k

表 1. C_0^k 的 sgn 值和 W_{vK_n} 值

$C_0^k (1 \leq k \leq 5)$	C_0^1	C_0^2	C_0^3	C_0^4	C_0^5
$\text{sgn}(C_0^k)$	-1	-1	-1	+1	+1
$W_{vK_n}(C_0^k)$	0	-1	-1	-2	0

其次对 $C_1 - C_{n-1}$ 的每个经典交叉点的整数标记如图 7 所示。

通过图 7 得出经典交叉点 $C_i^k (1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq 6)$ 周围弧段的整数标记如图 8 所示。

进一步得到经典交叉点 $C_i^k (1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq 6)$ 的指标值 $W_{vK_n}(C_i^k)$ 如表 2 所示:

根据 vK_n 所有经典交叉点的 sgn 值和 $W_{vK_n}(C_i^k)$ 值得到其 Affine Index 多项式 $P_{vK_n}(t)$ 为:

$$\begin{aligned}
P_{vK_n}(t) &= \sum_{i=1}^5 \operatorname{sgn}(C_0^i) \left(t^{W_{Kn}(C_0^i)} - 1 \right) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq 6}} \operatorname{sgn}(C_i^j) \left(t^{W_{Kn}(C_i^j)} - 1 \right) \\
&= -2t^{-1} + t^{-2} + 1 + \sum_{1 \leq i \leq n-1} \left[3\operatorname{sgn}(C_i^4) \left(t^{W_{Kn}(C_i^4)} - 1 \right) + \operatorname{sgn}(C_i^5) \left(t^{W_{Kn}(C_i^5)} - 1 \right) \right] \\
&= -2t^{-1} + t^{-2} + 1 + (n-1)(-3t^{-1} + t^{-3} + 2) \\
&= (1-3n)t^{-1} + t^{-2} + (n-1)t^{-3} + 2n - 1
\end{aligned}$$

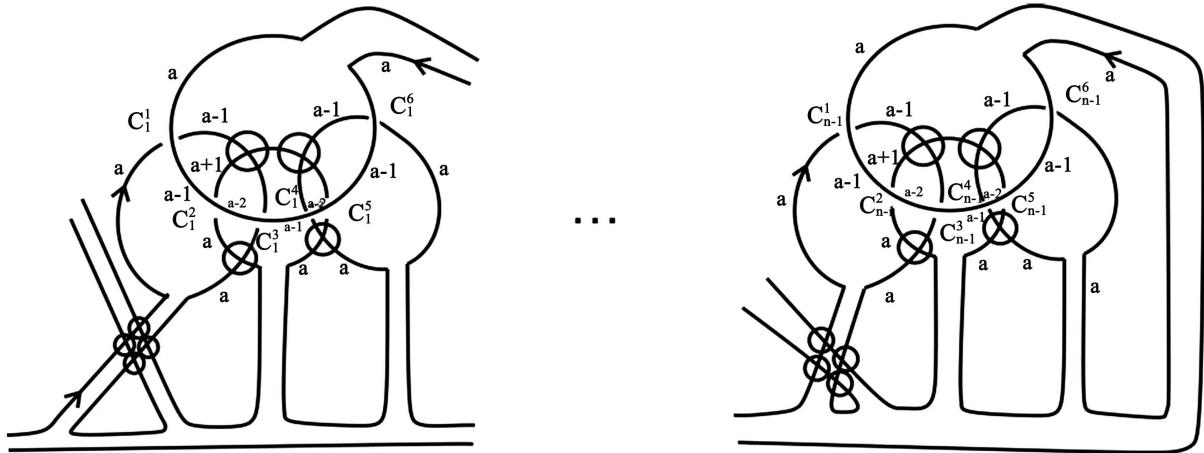
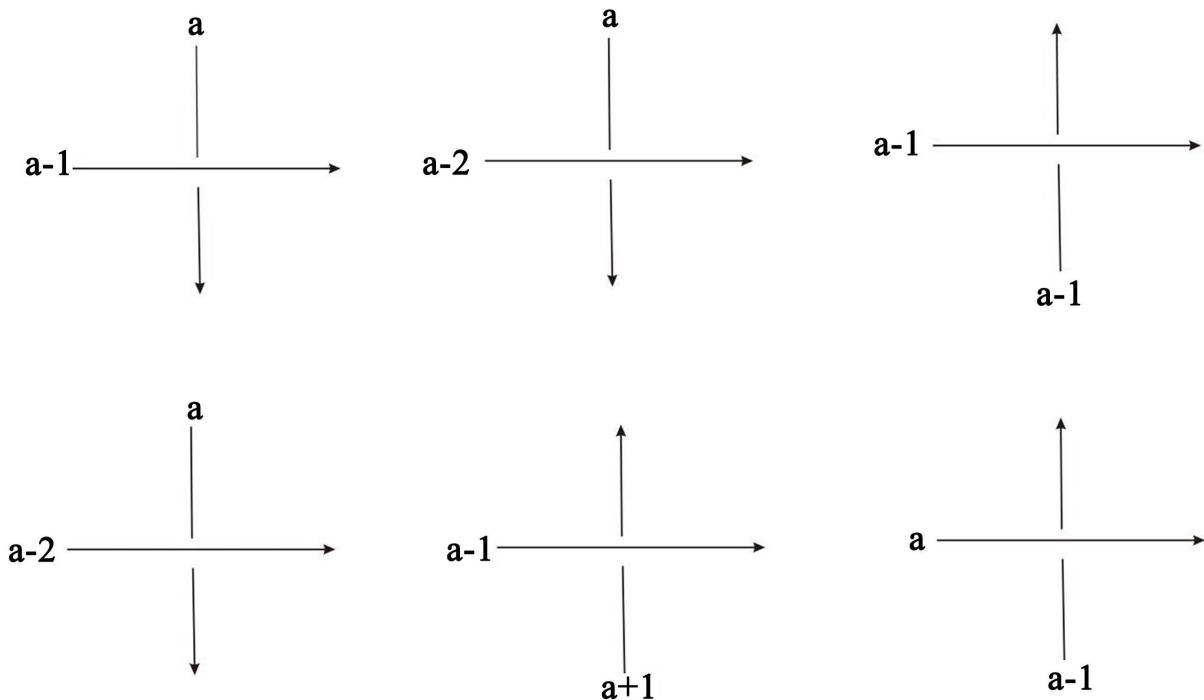
**Figure 7.** Cheng coloring of $C_0 - C_{n-1}$ **图 7.** $C_0 - C_{n-1}$ 的 Cheng 着色**Figure 8.** Cheng coloring of $C_i^1, C_i^2, C_i^3, C_i^4, C_i^5, C_i^6 (1 \leq i \leq n-1)$ **图 8.** $C_i^1, C_i^2, C_i^3, C_i^4, C_i^5, C_i^6 (1 \leq i \leq n-1)$ 的 Cheng 着色

Table 2. sgn and W_{vK_n} values of $C_i^1, C_i^2, C_i^3, C_i^4, C_i^5, C_i^6$ ($1 \leq i \leq n-1$)**表 2.** $C_i^1, C_i^2, C_i^3, C_i^4, C_i^5, C_i^6$ ($1 \leq i \leq n-1$) 的 sgn 值和 W_{vK_n} 值

C_i^k ($1 \leq k \leq 6$)	C_i^1	C_i^2	C_i^3	C_0^4	C_i^5	C_i^6
$\text{sgn}(C_i^k)$	-1	-1	+1	-1	+1	+1
$W_{vK_n}(C_i^k)$	0	-1	-1	-1	-3	0

4. 结语

本文主要研究一类特殊的虚拟纽结 vK_n ，通过 Cheng 着色的规则对虚拟纽结图的每一段弧进行整数标记，进而计算出这类特殊虚拟纽结的 Affine Index 多项式。通过图解理论简化了计算这类特殊虚拟纽结多项式的复杂程度。研究结果有利于更加全面的认识这类特殊虚拟纽结的特点，可以丰富这类特殊虚拟纽结的多项式不变量的研究。

参考文献

- [1] Kauffman, L. (1998) Virtual Knot Theory. November 1998-math.GT/9811028.
- [2] Jeong, M. (2015) Reidemeister Moves and a Polynomial of Virtual Knot Diagrams. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **24**, 1550010. <https://doi.org/10.1142/s0218216515500108>
- [3] Kauffman, L.H. (2013) An Affine Index Polynomial Invariant of Virtual Knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **22**, 1340007. <https://doi.org/10.1142/s0218216513400075>
- [4] Cheng, Z. and Gao, H. (2013) A Polynomial Invariant of Virtual Links. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **22**, 1341002. <https://doi.org/10.1142/s0218216513410022>