Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(2), 93-102
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.142055

Hans汉斯

带变序结构锥约束向量优化问题的对偶理论

马俊涛*，游曼雪

西华师范大学数学与信息学院，四川 南充

收稿日期：2025年1月15日；录用日期：2025年2月9日；发布日期：2025年2月17日

摘 要

带变序结构的锥约束向量优化问题在工程分析、资源分配、偏好建模等问题中有着重要的应用。文章研究带变序结构的锥约束向量优化问题的对偶理论，用非线性的标量化泛函定义了与所研究问题相关的拉格朗日函数，讨论了这个拉格朗日函数鞍点的性质，并且根据拉格朗日函数的鞍点来刻画给定锥约束向量优化问题的Benson型真极小解。此外，还根据拉格朗日函数定义了给定锥约束向量优化问题相应的对偶集，并在稳定性假设下证明了相关的强对偶结果。

关键词

向量优化，变序结构，锥约束条件，拉格朗日函数，对偶性

Duality Theory of the Cone-Constrained Vector Optimization Problem with Variable Ordering Structures

Juntao Ma*, Manxue You

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: Jan. 15th, 2025; accepted: Feb. 9th, 2025; published: Feb. 17th, 2025

Abstract

The problem of cone-constraint vector optimization with variable ordering structures has important applications in engineering analysis, resource allocation, and preference modeling. This paper studies the dual theory of the cone-constrained vector optimization problem with variable ordering structures. The Lagrangian associated with the nonlinear scalar function is defined. The saddle point's properties of this Lagrangian are discussed, and the properly minimal solution in the

*通讯作者。

文章引用: 马俊涛, 游曼雪. 带变序结构锥约束向量优化问题的对偶理论[J]. 应用数学进展, 2025, 14(2): 93-102.
DOI: 10.12677/aam.2025.142055

sense of Benson is characterized according to the saddle point of the Lagrangian. Furthermore, the corresponding dual set of the given cone-constrained vector optimization problem is defined according to the Lagrangian, and the associated strong dual results are proved under the assumption of stability.

Keywords

Vector Optimization, Variable Ordering Structure, Cone-Constrained Condition, Lagrangian, Duality

1. 引言

锥约束向量优化是向量优化中的一种重要模型，其在工程分析、资源分配和偏好建模等方面都有着重要的应用。在一般情形中，向量优化问题中涉及到的偏序关系是由一个固定的凸锥决定的，此种情形已有诸多研究成果。然而在实际情况中，不同的决策者对目标的偏好是不同的，同一决策者在不同时间、环境等条件下对目标的偏好也可能不同，这就导致决策的不同。故而优化问题中所涉及到的偏序关系不再是由一个固定的锥决定的，而是由一个多方面因素相关的变序锥决定的。这类锥约束向量优化问题就称为带变序结构的锥约束向量优化问题。

带变序结构的锥约束向量优化问题具有广泛的应用，比如在[1]-[3]中介绍了其在医学工程中的图像配准的重要应用。在文献[4]中，Engau 研究了可变控制结构在偏好建模中的作用，并举例说明了仅使用一个序锥进行偏好建模的局限性，其在偏好建模中的作用也可见[5]。Yu 在[6]中给出了变序锥的例子，说明了变序结构在充分模拟决策者偏好中的重要性；另也可见文献[7]。

在 20 世纪 70 年代，Yu 和 Charnes 等人便在[8] [9]中提出了变序结构的概念：假设存在一个集值映射，使目标空间中的每个元素与像空间中的一个序锥相关。此类模型的提出弥补了某些情况下固定序结构的优化模型无法充分地描述决策者偏好的缺陷，具有重要的应用前景，部分相关应用可参见[10]-[13]。2011 年，Eichfelde 在[14]中利用线性标量化方法研究了变序结构向量优化问题，给出了极小元和非控元的存在性结果，但需要较强的假设条件。随后，在 2014 年，Eichfelder 和 Kasimbeyli 在[15]中首次引入了变序结构的真最优元的概念，并举例说明了定义真极小元和真非控元方式的合理性，并且借助增广对偶锥[16]定义了一些非线性标量化泛函，并由此获得了真最优元的标量化结果以及弱最优解和强最优解的性质结果。同年，Eichfelder 在[17]中对有关变序结构的一些研究成果进行了收集整理。近些年对于带变序结构向量优化问题的研究可参见[18]-[23]。

在具有偏序线性空间的向量优化中，从理论和实践的角度来看，真最优元的概念非常重要。例如，使用线性标量化泛函，在凸的情况下可以完全刻画真最优元，但不能刻画最优元。然而从应用的角度来看，决策者可能更喜欢向量优化问题的真最优元，因为它们具有有界的权衡。目前对于带变序结构锥约束向量优化问题的鞍点问题以及对偶问题的理论较少。因此，建立带变序结构的 Benson 型真有效解的鞍点问题及对偶问题相关理论是有意义的。

2. 预备知识

设 $(Y,\|\bullet\|)$ 是实赋范空间，Y^* 是其拓扑对偶，即由 Y 上所有连续线性泛函组成的向量空间。对于 $l^*\in Y^*$，

$y \in Y$，记 $l^*(y) = \langle l^*, y \rangle$，表示 l^* 作用在 y 处。Y 中一个集合 A 称为锥，如果 $\forall a \in A$，$\lambda \ge 0$，有 $\lambda a \in A$。如果锥 A 是凸集，称之为凸锥；如果锥 A 是闭集，称之为闭锥；如果锥 A 既是凸集又是闭集，称之为闭凸锥。如果锥 $A \ne \{0_Y\}$ 且 $A \ne Y$，称锥 A 是非平凡的。此外，如果锥 A 满足 $A \cap (-A) = \{0_Y\}$，则锥 A 称为尖锥。设 A 是 Y 中的非空集合，$\mathrm{cl}(A)$、$\mathrm{bd}(A)$、$\mathrm{conv}(A)$ 和 $\mathrm{cone}(A)$ 分别表示集合 A 的闭包、集合 A 的边界、集合 A 的凸包和由集合 A 生成的锥。

在经典向量优化中，最优性概念是基于一个固定的凸锥诱导的偏序关系。固定锥下向量优化问题的研究成果颇为丰富，而更一般的概念允许将元素 $z \in Y$ 与一些元素 $y \in Y$ 关于由 z 或者 y 定义的序锥进行比较。对于这两个概念，我们需要在实赋范空间 Y 中引入一族序锥。因此，在下面，我们假设一个集值映射 $C: Y \rightrightarrows Y$，且 $\forall y \in Y$，$C(y)$ 是一个非平凡的闭凸尖锥。为了方便，我们将 $C(y)$ 简单记作 C_y。这样，Y 中的变序结构由序映射 C 定义。根据序映射 C 可以诱导出 Y 中的两类关系 $\le_1$ 和 $\le_2$。设 $y, z \in Y$，定义：

$$y \le_1 z \Leftrightarrow z - y \in C_{(y)} \tag{1}$$

$$y \le_2 z \Leftrightarrow z - y \in C_{(z)} \tag{2}$$

定义 2.1 [17]设 Y 为实线性空间，$C: Y \rightrightarrows Y$ 是一个集值映射，并且 $\forall y \in Y$，$C_{(y)}$ 是非平凡的闭凸尖锥。如果使用二元关系(1)或(2)来比较空间 Y 中的元素，则锥值映射 C 被称为序映射，并且说 C 定义了 Y 上的变序结构。

定义 2.2 [14] [15]设 A 是 Y 的非空子集，C 是序映射：

1) 元 $\bar{y} \in A$ 称为集合 A 关于序映射 C 的极小元，如果 $(\{\bar{y}\} - C_{\bar{y}}) \cap A = \{\bar{y}\}$；

2) 元 $\bar{y}$ 称为 A 关于序映射 C 的极大非控元，如果不存在 $y \in A$，使得 $\bar{y} \in \{y\} - C_y \setminus \{0_Y\}$；

3) 元 $\bar{y} \in A$ 称为集合 A 关于序映射 C 的 Benson 型真极小元，如果元 $\{\bar{y}\}$ 是集合 A 关于序映射 C 的极小元，且 $\bar{y}$ 是集合 $\{\bar{y}\} + \mathrm{cl}\left(\mathrm{cone}\left(A + C_{\bar{y}} - \{\bar{y}\}\right)\right)$ 关于序映射 C 的极小元。

如果序映射是一个常值映射，那么就退化为经典的向量优化问题。例如在 $Y = R^2$ 中，$\forall y \in Y$，$C(y) = R_+^2$，A 是 Y 的子集，$A = \{(y_1, y_2) \in R^2 : y_1 + y_2 \ge 3, y_1 \in [1,4], y_2 \in [1,4]\}$。此时，集合 $B = \{(y_1, y_2) \in R^2 : y_1 + y_2 = 3, y_1 \in [1,2], y_2 \in [1,2]\}$ 的所有元都是集合 A 的 Benson 型真极小元。但是，如果取序映射 $C_1(y) = \begin{cases} R_- \times R_+, & (y_1, y_2) \in (-\infty, 4] \times R \\ R_+^2, & (y_1, y_2) \in (4, +\infty) \times R \end{cases}$，则集合 B 中任意元都不再是集合 A 的 Benson 型真极小元。此时，点(4.1)是集合 A 关于序映射 C_1 的 Benson 型真极小元。如果取序映射 $C_2(y) = \begin{cases} R_- \times R_+, & (y_1, y_2) \in (-\infty, 2] \times R \\ R_+^2, & (y_1, y_2) \in (2, +\infty) \times R \end{cases}$，那么此时集合 A 关于序映射 C_2 的 Benson 型真极小元为空集。这说明不同的序映射对决策结果会产生不同的影响。

定义 2.3 [15]假设每一闭凸尖锥 C_y 的对偶锥的拟内部非空($C_y^\# \ne \varnothing$)，R_+ 表示非负实数。

1) C_y 的增广对偶锥：$C_y^{a*} = \left\{ (z_y^*, \alpha_y) \in C_y^\# \times R_+ : z_y^*(z) - \alpha_y \|z\| \ge 0, \forall z \in C_y \right\}$；

2) C_y 的增广对偶锥的拟内部：

$$C_y^{a\#} = \left\{ (z_y^*, \alpha_y) \in C_y^\# \times R_+ : z_y^*(z) - \alpha_y \|z\| > 0, \forall z \in C_y \setminus \{0_Y\} \right\}。$$

假设映射 $(l, s): Y \to Y^* \times R_+$ 满足性质 $(l, s)(y) \in C_y^{\alpha\#}$，为方便，$(l, s)(y)$ 记为 (l_y, s_y)。对于给定 $\bar{y} \in Y$ 和 $r \in Y$，设 $(l_{\bar{y}}, s_{\bar{y}}) \in C_{\bar{y}}^{a\#}$，定义泛函 $\varphi_{\bar{y},r}: Y \to R_+$ 如下：

$$\varphi_{\bar{y},r}(y) = \langle l_{\bar{y}}, y - r \rangle + s_{\bar{y}} \|y - r\|。$$

引理 2.1 [15]设 $\overline{y}\in A$，令 $\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)\in C_{\overline{y}}^{a\#}$，如果泛函 $\varphi_{\overline{y},r}\left(y\right)$ 在 $\overline{y}\in A$ 取得集合 A 的最小值，即 $\varphi_{\overline{y},r}\left(y\right)\geq\varphi_{\overline{y},r}\left(\overline{y}\right)$，$\forall y\in A$，则 $\overline{y}$ 是 A 关于序映射 C 的极小元。

证明：假设 $\overline{y}$ 不是 A 关于序映射 C 的极小元，则存在 $y\in A\setminus\{\overline{y}\}$，$\overline{y}-y\in C_{\overline{y}}\setminus\{0_Y\}$。由于 $\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)\in C_{\overline{y}}^{a\#}$，因此，$\left\langle l_{\overline{y}},\overline{y}-y\right\rangle-s_{\overline{y}}\left\|\overline{y}-y\right\|>0$，即有 $\left\langle l_{\overline{y}},y-\overline{y}\right\rangle+s_{\overline{y}}\left\|y-\overline{y}\right\|<0$。

进一步可得

$$\left\langle l_{\overline{y}},y-r-\left(\overline{y}-r\right)\right\rangle+s_{\overline{y}}\left\|y-r-\left(\overline{y}-r\right)\right\|<0,$$

因为 $s_{\overline{y}}\left\|y-r\right\|-s_{\overline{y}}\left\|\overline{y}-r\right\|\leq s_{\overline{y}}\left\|y-r-\left(\overline{y}-r\right)\right\|$，所以有

$$\left\langle l_{\overline{y}},y-r\right\rangle+s_{\overline{y}}\left\|y-r\right\|-\left\langle l_{\overline{y}},\overline{y}-r\right\rangle-s_{\overline{y}}\left\|\overline{y}-r\right\|<0,$$

即是 $\varphi_{\overline{y},r}\left(y\right)<\varphi_{\overline{y},r}\left(\overline{y}\right)$，这与题设矛盾。

引理 2.2 [15]如果 $\overline{y}\in A$ 是 $\min\limits_{x\in S}\varphi_{\overline{y},\overline{y}}\left(y\right)$ 的一个极小解，即 $\left\langle l_{\overline{y}},y-\overline{y}\right\rangle+s_{\overline{y}}\left\|y-\overline{y}\right\|\geq 0$，$\forall y\in A$，则 $\overline{y}$ 是 A 关于序映射 C 的 Benson 型真极小元。

设 X，Y，Z 是实赋范空间，实赋范空间 Y 中的变序结构由序映射 C 定义，设 $f:X\to Y$，$g:X\to Z$ 是向量值函数，K 是 Z 中的闭凸尖锥，令可行集 $S=\left\{x\in X:g\left(x\right)\in -K\right\}$，考虑如下锥约束向量优化问题(CVP)：

$$\min_{x\in S} f\left(x\right)。$$

定义 2.4 一个可行解 $\overline{x}\in S$ 称为问题(CVP)关于序映射 C 的(极小解) Benson 型真极小解，如果 $\overline{y}=f\left(\overline{x}\right)$ 是偏序由 $C_{\overline{y}}$ 定义的空间 Y 中集合 $f\left(S\right)$ 的(极小元) Benson 型真极小元。

根据上述引理，易得以下定理。根据前文映射 $\left(l,s\right):Y\to Y^{*}\times R_{+}$ 的定义，映射 $\left(l,s\right)\circ f:X\to Y^{*}\times R_{+}$ 表示 $\left(l,s\right)$ 与 f 的复合映射，即，对任意的 $x\in X$，$\left(l,s\right)\circ f\left(x\right)=\left(l,s\right)\left(f\left(x\right)\right)$，为了方便，我们将 $\left(l,s\right)\left(f\left(x\right)\right)$ 记作 $\left(l_{f(x)},s_{f(x)}\right)$。

定理 2.1 如果存在 $\overline{x}\in S$ 是 $\min\limits_{x\in S}\varphi_{f(\overline{x}),r}\circ f\left(x\right)$ 的最优解，即

$$\left\langle l_{f(\overline{x})},f\left(x\right)-r\right\rangle+s_{f(\overline{x})}\left\|f\left(x\right)-r\right\|\geq\left\langle l_{f(\overline{x})},f\left(\overline{x}\right)-r\right\rangle+s_{f(\overline{x})}\left\|f\left(\overline{x}\right)-r\right\|,\quad\forall x\in S,$$

则 $\overline{x}$ 是 $\min\limits_{x\in S} f(x)$ 关于序映射 C 的极小解。

定理 2.2 如果存在 $\overline{x}\in S$ 是 $\min\limits_{x\in S}\varphi_{f(\overline{x}),f(\overline{x})}\circ f\left(x\right)$ 的最优解，即

$$\left\langle l_{f(\overline{x})},f\left(x\right)-f\left(\overline{x}\right)\right\rangle+s_{f(\overline{x})}\left\|f\left(x\right)-f\left(\overline{x}\right)\right\|\geq 0,\quad\forall x\in S,$$

则 $\overline{x}$ 是 $\min\limits_{x\in S} f\left(x\right)$ 关于序映射 C 的 Benson 型真极小解。

3. 主要结论

在这一节，我们先引入一类增广拉格朗日函数，讨论相应的鞍点性质。其后，利用增广拉格朗日函数讨论问题(CVP)的对偶理论。

对于取定的一个 $\overline{y}\in f\left(S\right)=\bigcup\limits_{x\in S} f\left(x\right)$，取 $\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)\in C_{\overline{y}}^{a\#}$，将问题(CVP)标量化并构造相关的实值增广拉格朗日函数 $L_{\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)}:X\times\left(-K^{*}\right)\to R$ 如下：

$$L_{\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)}\left(x,z^{*}\right)=\varphi_{\overline{y},\overline{y}}\circ f\left(x\right)-\left\langle z^{*},g\left(x\right)\right\rangle。$$

以下定理表明上述定义与向量优化问题(CVP)相关的拉格朗日函数的极小值与将其标量化后的解相

等。

定理 3.1 对任意取定的 $\overline{y}\in f\left(S\right)$，设 $\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)\in C_{\overline{y}}^{a\#}$，则有以下成立：

$$\inf_{x\in X}\sup_{z^*\in -K^*}L_{\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)}\left(x,z^*\right)=\inf_{x\in S}\varphi_{\overline{y},\overline{y}}\circ f\left(x\right)。$$

证明：$\forall z\in Z\setminus\left(-K\right)$，$z^*\in -K^*$，有 $\left\langle z^*,z\right\rangle<0$，所以 $\sup\limits_{z^*\in -K^*}\left\{-\left\langle z^*,z\right\rangle\right\}=+\infty$；

$\forall z\in -K$，$z^*\in -K^*$，有 $\left\langle z^*,z\right\rangle\geq 0$，所以 $\sup\limits_{z^*\in -K^*}\left\{-\left\langle z^*,z\right\rangle\right\}=0$；

即

$$\sup_{z^*\in -K^*}\left\{-\left\langle z^*,z\right\rangle\right\}=\begin{cases}0, & z\in -K\\ +\infty, & z\notin -K\end{cases}$$

进一步有

$$\sup_{z^*\in -K^*}L_{\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)}\left(x,z^*\right)=\begin{cases}\varphi_{\overline{y},\overline{y}}\circ f\left(x\right), & g\left(x\right)\in -K\\ +\infty, & g\left(x\right)\notin -K\end{cases}$$

从而

$$\inf_{x\in X}\sup_{z^*\in -K^*}L_{\left(l_{\overline{y}}^{\#},s_{\overline{y}}^{\#}\right)}\left(x,z^*\right)=\inf_{x\in S}\varphi_{\overline{y},\overline{y}}\circ f\left(x\right)。$$

定义 3.1 设对于取定的一个 $\overline{y}\in f\left(S\right)$，取 $\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)\in C_{\overline{y}}^{a\#}$。点 $\left(\overline{x},\overline{z}^*\right)\in X\times\left(-K^*\right)$ 称为增广拉格朗日函数 $L_{\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)}$ 的鞍点，如果

$$\forall\left(x,z^*\right)\in X\times\left(-K^*\right)，\quad L_{\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)}\left(\overline{x},z^*\right)\leq L_{\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)}\left(\overline{x},\overline{z}^*\right)\leq L_{\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)}\left(x,\overline{z}^*\right)。$$

定理 3.2 如果存在 $\overline{x}\in X$，$\overline{z}^*\in -K^*$(设 $f\left(\overline{x}\right)=\overline{y}$，取 $\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)\in C_{\overline{y}}^{a\#}$)，使得 $\left(\overline{x},\overline{z}^*\right)\in X\times\left(-K^*\right)$ 是拉格朗日函数 $L_{\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)}$ 的鞍点。则：

1) $\left\langle\overline{z}^*,g\left(\overline{x}\right)\right\rangle=0$；

2) $\overline{x}$ 是 $\min\limits_{x\in S}f\left(x\right)$ 关于序映射 C 的 Benson 型真极小解。

证明：(1) 因为 $\left(\overline{x},\overline{z}^*\right)\in X\times\left(-K^*\right)$ 是 $L_{\left(l_{\overline{y}},s_{\overline{y}}\right)}$ 的鞍点，则 $\forall x\in X$，$z^*\in -K^*$，

$$\varphi_{\overline{y},\overline{y}}\circ f\left(\overline{x}\right)-\left\langle z^*,g\left(\overline{x}\right)\right\rangle\leq\varphi_{\overline{y},\overline{y}}\circ f\left(\overline{x}\right)-\left\langle\overline{z}^*,g\left(\overline{x}\right)\right\rangle\leq\varphi_{\overline{y},\overline{y}}\circ f\left(x\right)-\left\langle\overline{z}^*,g\left(x\right)\right\rangle。\tag{3}$$

依据式(3)左边的不等式可得

$$-\left\langle z^*,g\left(\overline{x}\right)\right\rangle\leq-\left\langle\overline{z}^*,g\left(\overline{x}\right)\right\rangle，\quad\forall z^*\in -K^*，$$

即

$$\left\langle\overline{z}^*-z^*,g\left(\overline{x}\right)\right\rangle\leq 0，\quad\forall z^*\in -K^*。$$

因为 $-K^*$ 是锥，取 $z^*=2\overline{z}^*$，有 $-\left\langle\overline{z}^*,g\left(\overline{x}\right)\right\rangle\leq 0$，取 $z^*=\frac{1}{2}\overline{z}^*$，有 $\frac{1}{2}\left\langle\overline{z}^*,g\left(\overline{x}\right)\right\rangle\leq 0$。从而可以得到 $\left\langle\overline{z}^*,g\left(\overline{x}\right)\right\rangle=0$。

(2) 将 $\left\langle\overline{z}^*,g\left(\overline{x}\right)\right\rangle=0$ 代入式(3)可以得到 $\forall x\in X$，$z^*\in -K^*$，

$$\varphi_{\overline{y},\overline{y}}\circ f\left(\overline{x}\right)-\left\langle z^*,g\left(\overline{x}\right)\right\rangle\leq\varphi_{\overline{y},\overline{y}}\circ f\left(\overline{x}\right)\leq\varphi_{\overline{y},\overline{y}}\circ f\left(x\right)-\left\langle\overline{z}^*,g\left(x\right)\right\rangle。\tag{4}$$

根据式(4)左边的等式，这表明 $\forall z^* \in -K^*$， $-\langle z^*, g(\bar{x})\rangle \le 0$ 。从而知 $g(\bar{x}) \in -K$ ，即是 $\bar{x} \in S$ 。

再考虑式(4)右边的不等式：

$$\varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) \le \varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(x) - \langle \bar{z}^*, g(x)\rangle，\quad \forall x \in X 。$$

由于 $\forall x \in S$ ， $-\langle \bar{z}^*, g(x)\rangle \le 0$ ，所以

$$\varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) \le \varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(x)，\quad \forall x \in S 。$$

而 $f(\bar{x}) = \bar{y}$ ，那么有

$$\langle l_{\bar{y}}, f(x) - \bar{y}\rangle + s_{\bar{y}} \| f(x) - \bar{y} \| \ge 0，\quad \forall x \in S 。$$

根据定理 2.2 知 $\bar{x}$ 是 $\min\limits_{x\in S} f(x)$ 关于序映射 C 的 Benson 型真极小解。

对于取定的 $\bar{y} \in f(S)$ ，以及给定的 $(l_{\bar{y}}, s_{\bar{y}}) \in C_{\bar{y}}^{a\#}$ ，我们借助增广拉格朗日函数 $L_{(l_{\bar{y}}, s_{\bar{y}})}(x, z^*)$ 定义向量优化问题(CVP)的对偶集如下：

$$H = \left\{ y \in Y : \exists z^* \in -K^*, s.t. \forall x \in X, \varphi_{\bar{y},\bar{y}}^{\#}(y) \le \varphi_{\bar{y},\bar{y}}^{\#} \circ f(x) - \langle z^*, g(x)\rangle \right\} 。$$

定理 3.3 对于取定的 $\bar{y} \in f(S)$ ，以及给定的 $(l_{\bar{y}}, s_{\bar{y}}) \in C_{\bar{y}}^{a\#}$ ，我们有

$$\langle l_{\bar{y}}, f(x) - y\rangle + s_{\bar{y}} \| f(x) - y \| \ge 0，\quad \forall x \in S，\quad \forall y \in H 。$$

证明：任取 $y \in H$ ，由 H 的定义，存在 $z^* \in -K^*$ ，使得

$$\varphi_{\bar{y},\bar{y}}^{\#}(y) \le \varphi_{\bar{y},\bar{y}}^{\#} \circ f(x) - \langle z^*, g(x)\rangle，\quad \forall x \in X 。$$

因为 $\forall x \in S, z^* \in -K^*, -\langle z^*, g(x)\rangle \le 0$ ，而以上不等式 $\forall x \in X$ 成立，所以有

$$\varphi_{\bar{y},\bar{y}}^{\#}(y) \le \varphi_{\bar{y},\bar{y}}^{\#} \circ f(x)，\quad \forall x \in S，$$

于是

$$\langle l_{\bar{y}}, y - \bar{y}\rangle + s_{\bar{y}} \| y - \bar{y} \| \le \langle l_{\bar{y}}, f(x) - \bar{y}\rangle + s_{\bar{y}} \| f(x) - \bar{y} \|，\quad \forall x \in S 。$$

进一步可得

$$\langle l_{\bar{y}}, f(x) - \bar{y}\rangle + s_{\bar{y}} \| f(x) - \bar{y} \| - s_{\bar{y}} \| y - \bar{y} \| \ge 0，\quad \forall x \in S 。$$

因为 $\| f(x) - \bar{y} \| \le \| f(x) - y \| + \| y - \bar{y} \|$ ，所以结合上式可得

$$\langle l_{\bar{y}}, f(x) - y\rangle + s_{\bar{y}} \| f(x) - y \| \ge 0，\quad \forall x \in S 。$$

根据 y 的任意性知命题结论成立。

定理 3.4 如果存在 $\bar{x} \in S$ 使得 $\bar{y} = f(\bar{x}) \in f(S) \cap H$ ，则 $\bar{x}$ 是 $\min\limits_{x\in S} f(x)$ 关于序映射 C 的 Benson 型真极小解。此外，如果还有 $\forall y \in H$ ， $C_y \subset C_{\bar{y}}$ ，那么 $\bar{y}$ 是 H 关于序映射 C 的极大非控元。

证明：因为 $\bar{y} = f(\bar{x}) \in H$ ，设 $(l_{\bar{y}}, s_{\bar{y}}) \in C_{\bar{y}}^{a\#}$ ，根据定理 3.3 可得

$$\langle l_{\bar{y}}, f(x) - \bar{y}\rangle + s_{\bar{y}} \| f(x) - \bar{y} \| \ge 0，\quad \forall x \in S 。$$

继而根据定理 2.2 知 $\bar{x}$ 是 $\min\limits_{x\in S} f(x)$ 关于序映射 C 的 Benson 型真极小解。

我们断言，

$$不 \exists y \in H，\quad s.t.\ y - \bar{y} \in C_y \setminus \{0_Y\} 。$$

否则，

$$\exists d \in H, \quad s.t.\, d - \overline{y} \in C_d \setminus \{0_Y\} \subset C_{\overline{y}} \setminus \{0_Y\},$$

取 $(l_{\overline{y}}, s_{\overline{y}}) \in C_{\overline{y}}^{a\#}$，因为 $\forall y \in H$，$C_y \subset C_{\overline{y}}$，那么也有 $(l_{\overline{y}}, s_{\overline{y}}) \in C_d^{a\#}$，在这里，改记 $(l_{\overline{y}}, s_{\overline{y}})$ 为 (l_d, s_d)，从而有

$$\langle l_d, d - \overline{y} \rangle - s_d \|d - \overline{y}\| > 0,$$

这表明

$$\varphi_{d,d} \circ f(\overline{x}) = \langle l_d, \overline{y} - d \rangle + s_d \|\overline{y} - d\| < 0,$$

而 $\overline{y} \in f(S)$，$d \in H$，这与定理 3.3 矛盾。所以 $\overline{y}$ 是 H 关于序映射 C 的极大非控元。

在下一个定理中，我们将呈现另一种对偶结果，说明原问题和对偶问题之间的关系。关于这个结论，我们需要规范和稳定标量优化问题的概念。关于规范性和稳定性的定义，我们参考[24] (定义 2.1~2.2，第 51 页)。

定义 3.2 对于每一取定 $\overline{y} \in f(S)$，设 $(l_{\overline{y}}, s_{\overline{y}}) \in C_{\overline{y}}^{a\#}$，标量优化问题 $\inf_{x \in S} \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x)$ 称为规范的，如果它的值是有限的，并且

$$\inf_{x \in S} \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x) = \sup_{z^* \in -K^*} \inf_{x \in X} \left\{ \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x) - \langle z^*, g(x) \rangle \right\}。$$

此外，标量优化问题 $\inf_{x \in S} \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x)$ 称为稳定的，如果它是规范的，并且问题 $\sup_{z^* \in -K^*} \inf_{x \in X} \left\{ \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x) - \langle z^*, g(x) \rangle \right\}$ 至少有一个解。

定理 3.5 考虑问题(CVP)。如果存在 $\overline{x} \in S$ 是 $\inf_{x \in S} \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x)$ 的一个最优解(设 $f(\overline{x}) = \overline{y} \in f(S)$，$(l_{\overline{y}}, s_{\overline{y}}) \in C_{\overline{y}}^{a\#}$)，且问题 $\inf_{x \in S} \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x)$ 是稳定的，则：

1) $\overline{x}$ 是 $\min_{x \in S} f(x)$ 关于序映射 C 的 Benson 型真极小解，如果还有 $\forall y \in H$，$C_y \subset C_{\overline{y}}$，那么 $\overline{y}$ 是 H 关于序映射 C 的极大非控元。

2) 存在 $\overline{z}^* \in -K^*$，使得 $(\overline{x}, \overline{z}^*)$ 是增广拉格朗日函数 $L_{(l_{\overline{y}}, s_{\overline{y}})}$ 的鞍点。

证明：(1) 由于问题 $\inf_{x \in S} \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x)$ 是稳定的，所以存在 $\overline{z}^* \in -K^*$，使得

$$\inf_{x \in S} \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x) = \inf_{x \in E} \left\{ \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x) - \langle \overline{z}^*, g(x) \rangle \right\}。$$

由题设 $\overline{x} \in S$ 是 $\inf_{x \in S} \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x)$ 的一个最优解，那么有

$$\varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(\overline{x}) \le \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x), \quad \forall x \in S,$$

即

$$\varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(\overline{x}) \le \inf_{x \in S} \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x)。$$

再根据 $\inf_{x \in S} \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x)$ 的稳定性，可得

$$\varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(\overline{x}) \le \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x) - \langle \overline{z}^*, g(x) \rangle, \quad \forall x \in X。$$

上式表明 $f(\overline{x}) \in H \cap f(S)$，根据定理 3.4 知 $\overline{x}$ 是 $\min_{x \in S} f(x)$ 关于序映射 C 的 Benson 型真极小解，且 $f(\overline{x})$ 是 H 关于序映射 C 的极大非控元。

(2) 由题设 $\overline{x} \in S$ 是 $\inf_{x \in S} \varphi_{\overline{y},\overline{y}} \circ f(x)$ 的一个最优解，而 $\overline{x} \in S$ 意味着 $\forall z^* \in -K^*, -\langle z^*, g(\overline{x}) \rangle \le 0$，于是

$$\varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) - \langle z^*, g(\bar{x}) \rangle \le \varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}), \quad \forall z^* \in -K^* 。 \tag{5}$$

所以

$$\sup_{z^* \in -K^*} \left\{ \varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) - \langle z^*, g(\bar{x}) \rangle \right\} \le \varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) 。 \tag{6}$$

另一方面，由于 $\bar{y} \in H$，根据 H 的定义，存在 $\bar{z}^* \in -K^*$，使得

$$\varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) = 0 \le \varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(x) - \langle z\mathfrak{A}^*, g(x) \rangle, \quad \forall x \in X 。 \tag{7}$$

因为式(7)对于 $\forall x \in X$ 成立，那么对于 $\bar{x} \in S$ 也成立，所以

$$\varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) \le \varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) - \langle \bar{z}^*, g(\bar{x}) \rangle 。 \tag{8}$$

再根据式(6)、(8)可得

$$\varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) = \sup_{z^* \in -K^*} \left\{ \varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) - \langle z^*, g(\bar{x}) \rangle \right\} = \varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) - \langle \bar{z}^*, g(\bar{x}) \rangle 。 \tag{9}$$

从而依据式(5)、(7)、(9)，有 $\forall z^* \in -K^*$，$\forall x \in X$，

$$\varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) - \langle z^*, g(\bar{x}) \rangle \le \varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(\bar{x}) - \langle \bar{z}^*, g(\bar{x}) \rangle \le \varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(x) - \langle \bar{z}^*, g(x) \rangle 。$$

所以存在 $\bar{z}^* \in -K^*$，使得 $(\bar{x}, \bar{z}^*)$ 是增广拉格朗日函数 $L_{(l_{\bar{y}}, s_{\bar{y}})}$ 的鞍点。

注：我们可以将本文的结果应用到一类重要的 B-P 锥(Bishop-Phelps Cone)值映射。设 $\phi: Y \to Y^*$，对于 $y \in Y$，$C(y) := \{ z \in Y : \langle \phi(y), z \rangle \ge \|z\| \}$。对于给定的 $\bar{x} \in S$，$\bar{y} = f(\bar{x}) \in f(S)$，取 $(l_{\bar{y}}, s_{\bar{y}}) = \left(\phi(\bar{y}), \frac{1}{2} \right)$，易验证：

$$\langle \phi(\bar{y}), z \rangle - \frac{1}{2}\|z\| \ge \|z\| - \frac{1}{2}\|z\| = \frac{1}{2}\|z\| > 0, \quad \forall z \in C_{\bar{y}} \setminus \{0_Y\},$$

这表明 $\left(\phi(\bar{y}), \frac{1}{2} \right) \in C_{\bar{y}}^{a\#}$，此时 $\varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(x) = \langle \phi(\bar{y}), f(x) - \bar{y} \rangle + \frac{1}{2}\|f(x) - \bar{y}\|$，对应的拉格朗日函数为

$$L_{\left(\phi(\bar{y}), \frac{1}{2}\right)}(x, z^*) = \varphi_{\bar{y},\bar{y}} \circ f(x) - \langle z^*, g(x) \rangle = \langle \phi(\bar{y}), f(x) - \bar{y} \rangle + \frac{1}{2}\|f(x) - \bar{y}\| - \langle z^*, g(x) \rangle,$$

由此，可以对应到文中相关的定理，得到形式结构更具体的结果。

以定理 3.2 为基础，我们可以提供一种设计求解原问题算法的思路，$C(y)$ 为上述 B-P 锥情形时的算法设计思路：在合理的假设条件下，先给定一个初始 x_0，求 $z_0^* = \arg\max_{z^* \in -K^*} L_{\left(\phi(f(x_0)), \frac{1}{2}\right)}(x_0, z^*)$，再验证是否 $x_0 \in \arg\min_{x \in X} L_{\left(\phi(f(x_0)), \frac{1}{2}\right)}(x, z_0^*)$。如果是，则 x_0 便是原问题 $\min_{x \in S} f(x)$ 关于 B-P 锥值映射的 Benson 型真极小解。如果不是，迭代到下一个点 x_1，继续重复上述步骤，使得算法生成的序列 (x_k, z_k^*) 收敛，且 x_k 收敛到原问题 $\min_{x \in S} f(x)$ 关于 B-P 锥值映射的 Benson 型真极小解。其中关于迭代方法的构造是一个非常值得研究的问题，具体的算法设计和数值实验将在未来的工作中进行研究。

4. 总结

本文研究了一类带变序结构的锥约束向量优化问题(CVP)，借助参考文献[15]中的非线性标量化函数，将问题(CVP)标量化，并刻画了原问题的 Benson 型真解。此外，引入了与问题(CVP)相关的实值增广拉格朗日函数，讨论了其鞍点的性质。通过定义与问题(CVP)相关的对偶集，进一步证明了 Benson 型真解的对偶理论。

致　谢

在此，对在问题研究过程中向我伸出援手、给予我坚定支持的每一个人致以最深的谢意。我要衷心感谢我的指导老师，正是她专业的引领和耐心的释疑，使我在研究的迷途中找到方向。此外，对所有在这个研究过程中以任何形式给予我帮助和支持的人们表示感谢。

参考文献

[1] Wacker, M. (2008) Multikriterielle Optimierung bei der Registrierung medizinischer Daten. University of Erlangen Nürnberg.

[2] Fischer, B., Haber, E., Moderstitzki, J. (2008) Mathematics Meets Medicine, an Optimal Alignment. *SIAG/OPT Views and News*, **19**, 1-7.

[3] Wacker, M. and Deinzer, F. (2009) Automatic Robust Medical Image Registration Using a New Democratic Vector Optimization Approach with Multiple Measures. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention—MICCAI* 2009, London, 20-24 September 2009, 590-597. https://doi.org/10.1007/978-3-642-04268-3_73

[4] Engau, A. (2007) Variable Preference Modeling with Ideal-Symmetric Convex Cones. *Journal of Global Optimization*, **42**, 295-311. https://doi.org/10.1007/s10898-007-9246-x

[5] Wiecek, M.M. (2007) Advances in Cone-Based Preference Modeling for Decision Making with Multiple Criteria. *Decision Making in Manufacturing and Services*, **1**, 153-173. https://doi.org/10.7494/dmms.2007.1.2.153

[6] Yu, P.L. (1985) Multiple-Criteria Decision Making: Concepts, Techniques, and Extensions. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-8395-6

[7] Chew, K.L. (1979) Domination Structures in Abstract Spaces. *Proceedings of the First Franco-Southeast Asian Mathematical Conference*, Singapore, 14 May-1 June 1979, 190-204.

[8] Yu, P.L. (1974) Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **14**, 319-377. https://doi.org/10.1007/bf00932614

[9] Bergstresser, K., Charnes, A. and Yu, P.L. (1976) Generalization of Domination Structures and Nondominated Solutions in Multicriteria Decision Making. In: Leitmann, G., Ed., *Multicriteria Decision Making and Differential Games*, Springer, 73-83. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-8768-2_3

[10] Baatar, D. and Wiecek, M.M. (2006) Advancing Equitability in Multiobjective Programming. *Computers & Mathematics with Applications*, **52**, 225-234. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.08.014

[11] Eichfelder, G. (2011) Cone-Valued Maps in Optimization. *Applicable Analysis*, **91**, 1831-1846. https://doi.org/10.1080/00036811.2011.616499

[12] Rubinov, A.M. and Gasimov, R.N. (2004) Scalarization and Nonlinear Scalar Duality for Vector Optimization with Preferences That Are Not Necessarily a Pre-Order Relation. *Journal of Global Optimization*, **29**, 455-477. https://doi.org/10.1023/b:jogo.0000047914.22567.66

[13] Nowak, M. (2007) Aspiration Level Approach in Stochastic MCDM Problems. *European Journal of Operational Research*, **177**, 1626-1640. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.10.003

[14] Eichfelder, G. (2011) Optimal Elements in Vector Optimization with a Variable Ordering Structure. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **151**, 217-240. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9928-x

[15] Eichfelder, G. and Kasimbeyli, R. (2013) Properly Optimal Elements in Vector Optimization with Variable Ordering Structures. *Journal of Global Optimization*, **60**, 689-712. https://doi.org/10.1007/s10898-013-0132-4

[16] Kasimbeyli, R. (2010) A Nonlinear Cone Separation Theorem and Scalarization in Nonconvex Vector Optimization. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1591-1619. https://doi.org/10.1137/070694089

[17] Eichfelder, G. (2014) Variable Ordering Structures in Vector Optimization. Springer Science & Business Media.

[18] 刘彩平，杨新民．向量优化问题的 E-真有效元及其标量化[J]．中国科学：数学, 2023, 53(10): 1397-1408.

[19] 范聪．带变动序结构的不确定优化问题若干理论研究[D]: [硕士学位论文]．重庆：重庆交通大学, 2024.

[20] 熊佳琪．变动集优化问题的适定性与稳定性研究[D]: [硕士学位论文]．南昌：南昌大学, 2022.

[21] Eichfelder, G. and Gerlach, T. (2015) Characterization of Properly Optimal Elements with Variable Ordering Structures. *Optimization*, **65**, 571-588. https://doi.org/10.1080/02331934.2015.1040793

[22] Peng, J.W., Wei, W.B., Ghosh, D., Yao, J.C. (2024) Characterization of E-Benson Proper Efficient Solutions of Vector Optimization Problems with Variable Ordering Structures in Linear Spaces. *Journal of Nonlinear & Variational Analysis*, **8**, 659-680.

[23] You, M. and Li, G. (2022) Approximate Properly Solutions of Constrained Vector Optimization with Variable Coradiant Sets. *Optimization Letters*, **17**, 721-738. https://doi.org/10.1007/s11590-022-01902-9

[24] Ekeland, I. and Temam, R. (1976) Convex Analysis and Variational Problems: Convex Analysis and Variational Problems. Elsevier.