Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(2), 109-124**
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.142057

非局部Cahn-Hilliard-Navier-Stokes系统解的适定性和渐近行为

范芝瑶，蒲志林*

四川师范大学数学科学学院，四川 成都

收稿日期：2025年1月18日；录用日期：2025年2月11日；发布日期：2025年2月19日

摘　要

文章主要研究在二维空间 $\mathbb{R}^2$ 中非局部**Cahn-Hilliard-Navier-Stokes**系统弱解的适定性和长时间渐近行为。我们用标准的**Galerkin**方法并结合解的估计方法证明了弱解的整体存在性和唯一性，通过系统的能量方程得到了解的耗散估计，从而在空间$\mathcal{X}_m$中建立了全局吸引子的存在性。

关键词

非局部**Cahn-Hilliard-Navier-Stokes**系统，弱解，全局吸引子

Well-Posedness and Asymptotic Behavior of Solutions for Nonlocal Cahn-Hilliard-Navier-Stokes System

Zhiyao Fan, Zhilin Pu*

School of Mathematical Sciences, Sichuan Normal University, Chengdu Sichuan

Received: Jan. 18th, 2025; accepted: Feb. 11th, 2025; published: Feb. 19th, 2025

Abstract

This article mainly studies the well-posedness and long-term asymptotic behavior of the weak solution of nonlocal Cahn-Hilliard-Navier-Stokes system in two-dimensional space $\mathbb{R}^2$. We prove the global existence and uniqueness of weak solutions using the standard Galerkin method combined with the estimation method of solutions. We obtain the dissipative estimate of the solution through the energy equation of the system, and the existence of global attractors is established in $\mathcal{X}_m$.

*通讯作者。

文章引用: 范芝瑶, 蒲志林. 非局部 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 系统解的适定性和渐近行为[J]. 应用数学进展, 2025, 14(2): 109-124. DOI: 10.12677/aam.2025.142057

Keywords

Nonlocal Cahn-Hilliard-Navier-Stokes System, Weak Solution, Global Attractor

1. 引言

Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 系统是一种扩散界面模型，该模型描述了两个等温、不可压缩、不可混溶的流体在有界域中的演化[1]。Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 系统解的存在性和唯一性以及吸引子的存在性已经被国内外学者进行了深入的研究[2]-[8]。作者 Gal 和 Grasselli 在[2]-[5]中研究了 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 系统在不同情形下解的存在唯一性以及吸引子的存在性问题。尤波在[6]中研究了具有移动接触线系统全局吸引子的存在性问题。Giorgini 和 Teman 在[7]中证明了在无滑移和齐次 Neumann 边界条件下，系统在二维空间中弱解的唯一性以及全局强解的存在唯一性，在三维空间中局部强解的存在唯一性。黄旭凤等在[8]中研究了具有动态边界条件的 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 系统二维弱解的渐近行为。

本文中，我们考虑如下非局部 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 系统：

$$\varphi_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi = m\Delta\mu, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{1}$$

$$\mu = a\varphi - J*\varphi + f(\varphi), \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}_t - \nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p + \lambda\varphi\nabla\mu = \boldsymbol{h}, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{4}$$

其中$(J*\varphi)(x)=\int_\Omega J(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y$，$a(x)=\int_\Omega J(x-y)d(y)\mathrm{d}y$，$x\in\Omega$。$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 和单位外法线 $\boldsymbol{n}$ 的有界区域。$m>0$ 表示流动性，$\nu>0$ 表示粘度，$\lambda>0$ 表示表面张力参数，φ 表示两种流体的浓度，$\boldsymbol{u}$ 表示流体速度，μ 表示化学势，p 表示流体压力，$\boldsymbol{h}$ 表示外力项，$f(s)=F'(s)$，$F(s)$ 是双阱势函数，用于描述相分离。系统(1)~(4)具有以下边界条件和初始条件

$$\boldsymbol{u}(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}} = \frac{\partial\mu}{\partial\boldsymbol{n}} = 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u}(x,0)=\boldsymbol{u}_0(x), \quad \varphi(x,0)=\varphi_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{7}$$

相较于局部 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 系统，非局部系统可以更准确地描述流体之间的演化，Navier-Stokes 方程和非局部对流 Cahn-Hilliard 方程的耦合系统是近年来研究的一个活跃课题，其难点在于对非局部 Cahn-Hilliard 方程的研究。Bates 等人在[9]中讨论了非局部 Cahn-Hilliard 方程在 Neumann 边界条件下系统解的存在唯一性。在数学理论方面，Frigeri、Colli、Grasselli 等人在不同条件下讨论了该系统解的适定性和渐近行为。当 F 是具有任意多项式增长的正则势时，Colli 等在[10]中证明非局部系统存在二维和三维整体弱解，并且在二维情况下弱解满足能量方程和耗散估计；此外 Frigeri 等在[11]中利用能量方程建立了二维全局吸引子的存在性，以及三维轨迹吸引子的存在性；文献[10]和[11]的结果进一步被推广到了奇异势的情形(参见文献[12])；文献[13]证明了在二维空间中存在唯一强解，并且任何满足能量方程

的弱解在有限时间内正则化，推导出全局吸引子是所有完全有界轨迹强解的并集。2016 年弱解的唯一性首次得到证明，当粘度 ν 为常数时，Frigeri 等在[14]中证明了在正则势和奇异势情况下二维弱解的唯一性。对于具有奇异势和退化迁移率的系统，文献[15]解决了二维空间整体弱解和全局吸引子的存在性问题，并得到正则性结果；另外在[17]证明了系统二维强解的存在唯一性。对于不同密度的流体模型，文献[16]在非退化迁移率和奇异势的假设下，得到系统整体耗散弱解的存在性，并将非退化迁移率的结果进一步在[18]中推广到了退化迁移率。目前数值方法的研究主要集中在非局部 Cahn-Hilliard 方程本身，例如凸分裂方法[19]、线性稳定化方法[20]、不变能量平方化(IEQ)方法[21]、标量辅助变量方法[22]等。研究非局部 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 系统数值解能有效模拟复杂的相分离和流体力学的耦合行为。例如文献[23]根据一种完全离散的傅里叶谱数值方法来求解系统，实现了完全解耦，同时保持了线性性和能量稳定性。此外，在应用方面，非局部系统在不同条件下的最优控制问题在文献[24] [25]中得到了讨论。

文献[11] [12] [14]对非线性项 f 和双阱势函数 F 进行了如下假设：

(A1) $F\in C_{loc}^{2,1}(\mathbb{R})$ 并且存在 $c_0>0$，使得 $F''(s)+a(x)\ge c_0$，对 $\forall s\in\mathbb{R}, x\in\Omega$。

(A2) 存在 $c_1>\frac{1}{2}\|J\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$，$c_2\in\mathbb{R}$，使得 $F(s)\ge c_1s^2-c_2$，对 $\forall s\in\mathbb{R}$。

(A3) 存在 $c_3>0$，$c_4\ge 0$，$p\in(1,2]$，使得 $|F'(s)|^p\le c_3|F(s)|+c_4$，对 $\forall s\in\mathbb{R}$。

本文对核 J、非线性项 f、双阱势函数 F 和外力项 $\boldsymbol{h}$ 进行如下假设：

(H1) $J\in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$，$J(x)=J(-x)$，$a(x)=\int_\Omega J(x-y)\mathrm{d}y\ge 0$，$x\in\Omega$。

(H2) $\bar{a}=\sup\limits_{x\in\Omega}\int_\Omega J(x-y)\mathrm{d}y<\infty$，$\underline{a}=\inf\limits_{x\in\Omega}\int_\Omega J(x-y)\mathrm{d}y$，$\underline{a}\ge\max\left\{2\|J\|_{L^1(\mathbb{R}^2)},\lambda\right\}$。

(H3) 函数 $f\in C^2(\mathbb{R})$，存在 $\lambda\ge 0$，使得 $f'(s)\ge-\lambda$，对 $\forall s\in\mathbb{R}$。

(H4) f 是连续函数，存在 $c_1>0$，使得 $|f(s_1)-f(s_2)|\le c_1|s_1-s_2|$，对 $\forall s\in\mathbb{R}$。

(H5) 存在 $c_2>0$，$c_3\ge 0$，$\forall p\in\mathbb{R}^+$，使得 $|f(s)|^p\le c_2s^{4p}+c_3$，对 $\forall s\in\mathbb{R}$。

(H6) $F\in C_{loc}^{2,1}(\mathbb{R})$，存在 $c_4>0$，$c_5\in\mathbb{R}$，$r>2$，r 为偶数，使得 $F(s)\ge c_4s^r-c_5$，对 $\forall s\in\mathbb{R}$。

(H7) $\boldsymbol{h}\in L^2(0,T;\boldsymbol{V}')$，对 $\forall T>0$。

注 1.1 根据(H3)，可令 $F(s)=G(s)-\frac{\lambda+1}{2}s^2$，其中 $G\in C^{2,1}(\mathbb{R})$ 是严格凸的，因为 $G''\ge 1$。

本文中，我们假设 $m=\mu=\lambda=1$，并沿用文献[11] [12] [14]的方法，分析具有边界条件(5)~(6)和初始值(7)的非局部 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 系统解的适定性和长时间行为，改进了非线性项 f 和双阱势函数 F 的假设条件。本文的假设条件更具一般性，推广了文献[11] [12] [14]相应的结果。

2. 预备知识

设 $H=L^2(\Omega)$，$V=H^1(\Omega)$，本文中符号 $\|\cdot\|$ 和 $(\cdot,\cdot)$ 表示在 H 上的范数和内积，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 V' 和 V 的对偶积，定义 $\bar{\varphi}$ 为 φ 在 Ω 上的平均，即

$$\bar{\varphi}=|\Omega|^{-1}\langle\varphi,1\rangle,\quad\forall\varphi\in V'.$$

我们令 $V_s=D\left(B^{s/2}\right)$，对 $\forall s\in\mathbb{R}$，$B=-\Delta+I$ 是 Neumann 算子。因此我们定义

$$V_2=D(B)=\left\{v\in H^2(\Omega):\text{在}\partial\Omega\text{上}\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}=0\right\}.$$

另外，假设 $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ 为无散度测试函数空间[26]

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}=\left\{\boldsymbol{u}\in C_0^\infty\left(\Omega,\boldsymbol{R}^2\right):\nabla\cdot u=0\right\}.$$

本文中将用到 Navier-Stokes 问题中经典的 Hilbert 空间[26]

$$\boldsymbol{H}=\overline{\mathcal{V}}^{H^2}=\overline{\left\{\boldsymbol{u}\in C_0^\infty(\Omega)^2:\nabla\cdot u=0\right\}}^{L^2(\Omega)^2},\quad \boldsymbol{V}=\left\{\boldsymbol{u}\in V^2:\nabla\cdot u=0\right\}.$$

接下来介绍 Stokes 算子 $A:D(A)\cap\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$，$A=-P\Delta$，$D(A)=H^2(\Omega)^2\cap\boldsymbol{V}$，其中 $P:L^2(\Omega)^2\to\boldsymbol{H}$ 是 Leray 投影。我们有

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_V=(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}),\ \forall\boldsymbol{u}\in D(A),\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}.$$

下面定义映射 $\mathcal{A}:\boldsymbol{H}\times H\to\boldsymbol{V}'$，对 $\forall\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{V}$，$\varphi\in H$，我们令

$$\langle\mathcal{A}(\boldsymbol{u},\varphi),\boldsymbol{v}\rangle=(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}),\ \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}.$$

因此有 $\mathcal{A}(\boldsymbol{u},\varphi)=A\boldsymbol{u}$，$\forall\boldsymbol{u}\in D(A)$。最后，对 $\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{V}$，我们定义三线性算子

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\int_\Omega(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w},$$

以及双线性算子：$\mathcal{B}:\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}'$ 定义为

$$\langle\mathcal{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{w}\rangle=b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\ \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{V}.$$

我们有

$$\begin{cases}b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0, & \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V},\\ b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=-b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}), & \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{V}.\end{cases}$$

并且由 Hölder 和 Ladyzhenskaya's 不等式，可得

$$|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\le c\|\boldsymbol{u}\|^{\frac12}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^{\frac12}\|\nabla\boldsymbol{v}\|^{\frac12}\|\boldsymbol{w}\|^{\frac12}\|\nabla\boldsymbol{w}\|^{\frac12}.$$

引理 2.1 (见[26] [27])设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的有界域，设序列 $\{f_n\}\subset L^\infty(\Omega)$，满足 $\|f_n\|_\infty\le c$ 并且在 $L^2(\Omega)$ 中 $f_n\to f$。设序列 $\{g_n\}\subset L^2(\Omega)$，使得在 $L^2(\Omega)$ 中 $g_n\rightharpoonup g$，则在 $L^2(\Omega)$ 中 $f_ng_n\rightharpoonup fg$。

本文中 c 和 c' 都表示非负常数，N、M 和 L 表示依赖于初始数据 $\boldsymbol{u}_0$、φ_0 和 $\boldsymbol{h}$ 的非负常数。

3. 适定性

3.1. 存在性

定义 3.1 假设 $\boldsymbol{u}_0\in\boldsymbol{H}$，$\varphi_0\in H$，$F(\varphi_0)\in L^1(\Omega)$，$0<T<+\infty$，函数 $(\boldsymbol{u},\varphi)$ 是系统(1)~(7)在 $[0,T]$ 上的弱解，如果

$$\boldsymbol{u}\in L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})\cap L^2(0,T;\boldsymbol{V}),$$

$$\boldsymbol{u}_t\in L^{2-\gamma}(0,T;\boldsymbol{V}'),\ \forall\gamma\in(0,1),$$

$$\varphi\in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V),$$

$$\varphi_t\in L^{2-\delta}(0,T;V'),\ \forall\delta\in(0,1),$$

$$\mu=a\varphi-J*\varphi+F'(\varphi)\in L^2(0,T;V),$$

令 $\rho(x,\varphi)=a(x)\varphi+F'(\varphi)$，且满足对 $\forall\psi\in V$，$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$，$t\in(0,T)$ 时有

$$\langle\varphi_t,\psi\rangle+(\nabla\rho,\nabla\psi)=\int_\Omega(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi)\varphi+\int_\Omega(\nabla J*\varphi)\cdot\nabla\psi,\tag{8}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{v}\rangle+(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=-\int_\Omega(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\mu)\varphi+\langle\boldsymbol{h},\boldsymbol{v}\rangle,\tag{9}$$

且初值条件成立

$$\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0,\ \varphi(0)=\varphi_0.$$

注 3.1 在式(8)中令 $\psi=1$，我们有 $\langle\varphi_t,1\rangle=0$，其中 $(\varphi(t),1)=(\varphi_0,1)$，对 $\forall t\ge 0$ 。

定理 3.1 假设 $\boldsymbol{u}_0\in\boldsymbol{H}$， $\varphi_0\in H$， $F(\varphi_0)\in L^1(\Omega)$，并且假设条件($H_1$)~($H_7$)都成立。对 $\forall T>0$，系统(1)~(7)在 $[0,T]$ 上存在弱解 $(\boldsymbol{u},\varphi)$，且 φ_t 满足

$\varphi_t\in L^\infty(0,T;V_s')$，若 $1<p<2$， $s=\dfrac{p+2}{p}$，

$\varphi_t\in L^\infty(0,T;V_s')\cap L^r(0,T;V_2')$，若 $p=2$， $s>\dfrac{p+2}{p}$， $r\ge 2$ 。

进一步，令

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{u}(t),\varphi(t))=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2+\frac{1}{4}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(\varphi(x,t)-\varphi(y,t))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Omega F(\varphi(t))\tag{10}$$

证 用标准 Galerkin 方法证明弱解的存在性，考虑空间 $\boldsymbol{V}$ 作为 Galerkin 基的 Stokes 算子 A 的本征函数族 $\{\boldsymbol{\omega}_n\}_{n\ge1}$，以及空间 V 作为 Galerkin 基的 Neumann 算子 $B=-\Delta+I$ 的本征函数族 $\{\psi_n\}_{n\ge1}$。定义了 n 维子空间 $W_n=\langle\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\cdots,\boldsymbol{\omega}_n\rangle$ 和 $\Psi_n=\langle\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n\rangle$，并分别考虑 $\boldsymbol{H}$ 和 H 中子空间的正交投影，即 $\bar{P}_n=P_{W_n}$， $P_n=P_{\Psi_n}$， $\bar{P}_n$ 为 $\boldsymbol{H}$ 到 W_n 的正交投影， P_n 为 H 到 Ψ_n 的正交投影。我们令

$$\boldsymbol{u}_n(t)=\sum_{k=1}^n a_k^{(n)}(t)\boldsymbol{\omega}_k,\ \varphi_n(t)=\sum_{k=1}^n b_k^{(n)}(t)\psi_k,\ \mu_n(t)=\sum_{k=1}^n c_k^{(n)}(t)\psi_k,$$

对于 $\forall n\ge1$，考虑以下近似问题

$$\langle\varphi_n',\psi\rangle+(\nabla\rho(\cdot,\varphi_n),\nabla\psi)=\int_\Omega(\boldsymbol{u}_n\cdot\nabla\psi)\varphi_n+\int_\Omega(\nabla J*\varphi_n)\cdot\nabla\psi,\tag{11}$$

$$\langle\boldsymbol{u}_n',\boldsymbol{\omega}\rangle+(\nabla\boldsymbol{u}_n,\nabla\boldsymbol{\omega})+b(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{\omega})=-\int_\Omega(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mu_n)\varphi+\langle\boldsymbol{h}_n,\boldsymbol{\omega}\rangle,\tag{12}$$

$$\rho(\cdot,\varphi_n)=a(\cdot)\varphi_n+F'(\varphi_n),$$

$$\mu_n=P_n(\rho(\cdot,\varphi_n)-J*\varphi_n),$$

$$\boldsymbol{u}_n(0)=\boldsymbol{u}_{0n},\quad \varphi_n(0)=\varphi_{0n},$$

首先估计序列 $\{\boldsymbol{u}_n\}_{n=1}^\infty$， $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$， $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$，在式(11)中令 $\psi=\mu_n$ 可得

$$\langle\varphi_n',\mu_n\rangle+(\nabla\rho(\cdot,\varphi_n),\nabla\mu_n)=\int_\Omega(\boldsymbol{u}_n\cdot\nabla\mu_n)\varphi_n+\int_\Omega(\nabla J*\varphi_n)\cdot\nabla\mu_n.\tag{13}$$

在式(12)中令 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{u}_n$，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}_n\|^2+\|\nabla\boldsymbol{u}_n\|^2=-\int_\Omega(\boldsymbol{u}_n\cdot\nabla\mu_n)\varphi_n+\langle\boldsymbol{h}_n,\boldsymbol{u}_n\rangle.\tag{14}$$

由于 $J(x)=J(-x)$，可得

$$\begin{aligned}\langle\varphi_n',\mu_n\rangle&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}a\|\varphi_n\|^2+\int_\Omega F'(\varphi_n)-\frac{1}{2}(\varphi_n,J*\varphi_n)\right)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(\varphi_n(x)-\varphi_n(y))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Omega F(\varphi_n)\right).\end{aligned}\tag{15}$$

将式(13)和式(14)相加，并结合式(15)，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\boldsymbol{u}_n\|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)\left(\varphi_n(x)-\varphi_n(y)\right)^2dxdy+2\int_\Omega F(\varphi_n)\right)\\&+\|\nabla\boldsymbol{u}_n\|^2+\|\nabla\mu_n\|^2+\left(\nabla\left(P_n(J*\varphi_n),\nabla\mu_n\right)\right)\\&=\left((\nabla J*\varphi_n),\nabla\mu_n\right)+\langle\boldsymbol{h}_n,\boldsymbol{u}_n\rangle.\end{aligned}\tag{16}$$

由 Cauchy 不等式和 Young 不等式，可得

$$\left((\nabla J*\varphi_n),\nabla\mu_n\right)\le\frac{1}{4}\|\nabla\mu_n\|^2+\|\varphi_n\|^2\|J\|_{W^{1,1}}^2,$$

$$\begin{aligned}\left(\nabla\left(P_n(J*\varphi_n),\nabla\mu_n\right)\right)&\le\left(B^{1/2}\left(P_n(J*\varphi_n),\nabla\mu_n\right)\right)\le\left((\nabla J*\varphi_n),\nabla\mu_n\right)+\left((J*\varphi_n),\nabla\mu_n\right)\\&\le\frac{1}{4}\|\nabla\mu_n\|^2+\|\varphi_n\|^2\|J\|_{W^{1,1}}^2.\end{aligned}$$

由假设(H_2)、(H_6)和 L^p 空间嵌入定理，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)\left(\varphi_n(x)-\varphi_n(y)\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\int_\Omega F(\varphi_n)\\&=a\|\varphi_n\|^2+2\int_\Omega F(\varphi_n)-(\varphi_n,J*\varphi_n)\\&\ge\left(\underline{a}-\|J\|_{L^1}\right)\|\varphi_n\|^2+2\int_\Omega\left(c_4|\varphi_n|^4-c_5\right)\\&\ge\left(\underline{a}-\|J\|_{L^1}\right)\|\varphi_n\|^2+2c_4\|\varphi_n\|^4-2c_5|\Omega|\ge\alpha\|\varphi_n\|^2-c.\end{aligned}$$

其中 $\alpha=\left(\underline{a}-\|J\|_{L^1}\right)>0$。由 Cauchy、Young、Poincaré 不等式以及假设(H_7)，我们有

$$\langle\boldsymbol{h}_n,\boldsymbol{u}_n\rangle\le\frac{1}{2}\|\boldsymbol{h}_n\|_{V'}^2+c\|\nabla\boldsymbol{u}_n\|^2.$$

对式(16)在 0 到 t 上进行积分，并结合上述估计，可以得到下面的积分不等式

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{u}_n\|^2+\alpha\|\varphi_n\|^2+\int_0^t\left(c\|\nabla\boldsymbol{u}_n\|^2+\|\nabla\mu_n\|^2\right)\mathrm{d}\tau\\&\le4\|J\|_{W^{1,1}}^2\int_0^t\|\varphi_n\|^2\mathrm{d}\tau+\|\boldsymbol{u}_{0n}\|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)\left(\varphi_{0n}(x)-\varphi_{0n}(y)\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\int_\Omega F(\varphi_{0n})+\int_0^t\|\boldsymbol{h}_n\|_{V'}^2\mathrm{d}\tau+c\\&\le M+\int_0^t\|\boldsymbol{h}_n\|_{V'}^2dt+c\int_0^t\|\varphi_n\|^2\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

其中 c 仅依赖于 $\|J\|_{W^{1,1}}$ 和 $|\Omega|$， $M=c\left(1+\|\boldsymbol{u}_0\|^2+\|\varphi_0\|^2+\int_\Omega F(\varphi_{0n})\right)$。由 Gronwall 不等式，可得

$$\|\boldsymbol{u}_n\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})\cap L^2(0,T;\boldsymbol{V})}\le N,\tag{17}$$

$$\|\varphi_n\|_{L^\infty(0,T;H)}\le N,\tag{18}$$

$$\|\nabla\mu_n\|_{L^2(0,T;H)}\le N,\tag{19}$$

其中 $N=c\left(M^{1/2}+\|\boldsymbol{h}_n\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{V}')}\right)$。根据假设($H_2$)、($H_3$)和 Young 不等式，可得

$$\begin{aligned}(\mu_n,-\Delta\varphi_n)&=(\nabla\mu_n,\nabla\varphi_n)=\left(\nabla\varphi_n,a\nabla\varphi_n+\varphi_n\nabla a+f'(\varphi_n)\nabla\varphi_n-\nabla J*\varphi_n\right)\\&\ge\underline{a}\|\nabla\varphi_n\|^2-2\|\nabla\varphi_n\|\|\nabla J\|_{L^1}\|\varphi_n\|-\lambda\|\nabla\varphi_n\|^2\ge\frac{\underline{a}-\lambda}{2}\|\nabla\varphi_n\|^2-\frac{2}{\underline{a}-\lambda}\|\nabla J\|_{L^1}^2\|\varphi_n\|^2,\end{aligned}$$

另一方面，由 Young 不等式，可得

$$(\nabla\mu_n,\nabla\varphi_n)\le\frac{\underline{a}-\lambda}{4}\|\nabla\varphi_n\|^2+\frac{1}{\underline{a}-\lambda}\|\nabla\mu_n\|^2,$$

结合两式有 $\|\nabla\mu_n\|^2 \ge \frac{(\underline{a}-\lambda)^2}{4}\|\nabla\varphi_n\|^2 - 2\|\nabla J\|_{L^1}^2\|\varphi_n\|^2$，故可得

$$\|\varphi_n\|_{L^2(0,T;V)} \le N. \tag{20}$$

由于弱解总质量守恒，有 $(P_n(J*\varphi_n + a\varphi_n),1) = (-J*\varphi_n + a\varphi_n,1) = (-\Delta\varphi_n,1) = 0$，再根据(H5)和 Sobolev 嵌入定理，可以得到

$$\left|\int_\Omega \mu_n\right| = \left|(F'(\varphi_n),1)\right| \le \int_\Omega\left(c_2|\varphi_n|^4 + c_3\right) \le c_2\|\varphi_n\|_{L^4}^4 + c_3|\Omega| \le_2 \|\varphi_n\|_V^4 + c \le N,$$

由 Poincaré 不等式，有 $\left\|\mu_n - |\Omega|^{-1}\int_\Omega \mu_n\right\| \le c\|\nabla\mu_n\|$，故可得

$$\|\mu_n\|_{L^2(0,T;V)} \le N. \tag{21}$$

由假设(H5)，我们可以估计序列 $\{\rho(\cdot,\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$，

$$\begin{aligned}\|\rho(\cdot,\varphi_n)\|_{L^p} &\le c\bar{a}\|\varphi_n\| + \|f(\varphi_n)\|_{L^p} \le c\bar{a}\|\varphi_n\| + \left(\int_\Omega\left(c_2|\varphi_n|^{4p} + c_3\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le c\bar{a}\|\varphi_n\| + \left(c_2|\varphi_n|_{L^{4p}}^{4p} + c_3|\Omega|\right)^{\frac{1}{p}} \le c\bar{a}\|\varphi_n\| + \left(c_2|\varphi_n|_V^{4p} + c_3|\Omega|\right)^{\frac{1}{p}} \le N,\end{aligned}$$

因此可以得到

$$\|\rho(\cdot,\varphi_n)\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \le N. \tag{22}$$

接下来估计序列 $\{\boldsymbol{u}_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\varphi_n'\}_{n=1}^{\infty}$，首先重写式(12)

$$\boldsymbol{u}_n' + \bar{P}_n\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_n,\varphi_n) + \bar{P}_n\mathcal{B}(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{u}_n) = -\bar{P}_n(\varphi_n\nabla\mu_n) + \bar{P}_n\boldsymbol{h}_n. \tag{23}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式，对 $\forall 0<\gamma<1$，可得

$$\|\bar{P}_n(\varphi_n\nabla\mu_n)\|_{V'} \le c\|\varphi_n\|_{L^{\frac{2-\gamma}{1-\gamma}}}\|\nabla\mu_n\| \le c\|\varphi_n\|^{\frac{2-2\gamma}{2-\gamma}}\|\varphi_n\|_V^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}\|\nabla\mu_n\| \le N^{\frac{2-2\gamma}{2-\gamma}}\|\varphi_n\|_V^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}\|\nabla\mu_n\|.$$

由式(19)和式(20)，我们得到 $\|\bar{P}_n(\varphi_n\nabla\mu_n)\|_{L^{2-\gamma}(0,T;V')} \le N^2$，进一步，得到

$$\|\bar{P}_n\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_n,\varphi_n)\|_{V'} \le \|\boldsymbol{u}_n\|_V,\quad \|\bar{P}_n\mathcal{B}(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{u}_n)\|_{V'} \le c\|\boldsymbol{u}_n\|\|\boldsymbol{u}_n\|_V,$$

由于 $\bar{P}_n \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}',\boldsymbol{V}')$，可得 $\|\bar{P}_n\boldsymbol{h}_n\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{V}')} \le c\left(1+\|\boldsymbol{h}_n\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{V}')}\right)$，由式(23)再结合估计，可得

$$\|\boldsymbol{u}'\|_{L^{2-\gamma}(0,T;\boldsymbol{V}')} \le L,\ \forall\gamma\in(0,1), \tag{24}$$

其中 $L = N^2 + N$。

最后估计序列 $\{\varphi_n'\}_{n=1}^{\infty}$，在式(11)中令测试函数 $\psi \in V_s$，当 $s \ge 2$ 时，有 $\Delta\psi \in H^{s-2}(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$ (p' 是 p 的共轭指数)。因为 $H^{s-2}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$，令 $p' = \frac{2d}{d+4-2s}$，可以得到 $s \ge \frac{(4-d)p+2d}{2p}$。

下面定义 $\psi = \psi_I + \psi_{II}$，其中 $\psi_I = P_n\psi = \sum_{k=1}^{n}(\psi,\psi_k)\psi_k \in \Psi_n$， $\psi_{II} = (I-P_n)\psi = \sum_{k=n+1}^{\infty}(\psi,\psi_k)\psi_k \in \Psi_n^{\perp}$ (ψ_I 和 ψ_{II} 在所有 Hilbert 空间 V_r 中正交， $0 \le r \le s$)。由 Sobolev 嵌入定理和式(22)，可得

$$\left|(\nabla\rho(\cdot,\varphi_n),\nabla\psi_I)\right| = \left|(\rho(\cdot,\varphi_n),\Delta\psi_I)\right| \le N\|\Delta\psi_I\|_{L^{p'}} \le N\|\psi_I\|_{V_s} \le N\|\psi\|_{V_s}.$$

进一步可以得到

$$\left|\int_{\Omega}(\nabla J*\varphi_n)\cdot\nabla\psi_I\right|\le c\|\nabla J\|_{L^1}\|\varphi_n\|\|\psi\|_{V_s}\le N\|\psi\|_{V_s}.$$

令式(11)右边第一项的 $\psi=\psi_I$，因为 $\nabla\psi_I\in H^{s-1}(\Omega)$，当 $1<p<2$ 且 $s=\frac{p+2}{p}$，或者 $p=2$ 且 $s>\frac{p+2}{p}=2$ 时，由于 $H^{s-1}\subset L^{\infty}$，因此可以得到

$$\left|\int_{\Omega}(\boldsymbol{u}_n\cdot\nabla\psi_I)\varphi_n\right|\le c\|\boldsymbol{u}_n\|\|\varphi_n\|\|\psi\|_{V_s}\le N^2\|\psi\|_{V_s}.$$

当 $p=2$ 并且 $s=\frac{p+2}{p}=2$，根据 $H^{s-1}\subset L^q$ （$1\le q<+\infty$）和 L^p 空间的插值不等式，当 $r\ge 2$ 时，可得

$$\left|\int_{\Omega}(\boldsymbol{u}_n\cdot\nabla\psi_I)\varphi_n\right|\le c\|\boldsymbol{u}_n\|\|\psi\|_{V_s}\|\varphi_n\|_{L^{\frac{2r}{r-1}}}\le c\|\boldsymbol{u}_n\|\|\psi\|_{V_s}\|\varphi_n\|^{\frac{r-2}{r}}\|\varphi_n\|^{\frac{2}{r}}_{L^4}\le N^{\frac{2r-2}{r}}\|\psi\|_{V_s}\|\varphi_n\|^{\frac{2}{r}}_{V}.$$

结合上述估计，从式(11)我们可以得到

$$\|\varphi_n'\|_{L^{\infty}(0,T;V_{s'})}\le L，\text{当}1<p<2,\ s=\frac{p+2}{p},\tag{25}$$

$$\|\varphi_n'\|_{L^{\infty}(0,T;V_s')\cap L^r(0,T;V_2')}\le L，\text{当}\ p=2,\quad s>2,\quad r\ge 2,\tag{26}$$

其中 $L=N+N^2$。

根据紧嵌入定理，有

$$L^2(0,T;V)\cap H^1(0,T;V_s')\subset\subset L^2(0,T;H),$$

$$L^2(0,T;\boldsymbol{V})\cap W^{1,q}(0,T;\boldsymbol{V}')\subset\subset L^2(0,T;\boldsymbol{H}),\ \forall q>1.$$

可以推断出存在

$$\boldsymbol{u}\in L^{\infty}(0,T;\boldsymbol{H})\cap L^2(0,T;\boldsymbol{V}),$$

$$\varphi\in L^{\infty}(0,T;H)\cap L^2(0,T;V),$$

$$\mu\in L^2(0,T;V),$$

$$\rho\in L^{\infty}(0,T;L^p(\Omega)),$$

$$\boldsymbol{u}_t\in L^{2-\gamma}(0,T;\boldsymbol{V}'),\ \forall\gamma\in(0,1),$$

$\varphi_t\in L^{\infty}(0,T;V_s')$，若 $1<p<2,\ s=\frac{p+2}{p},$

$\varphi_t\in L^{\infty}(0,T;V_s')\cap L^r(0,T;V_2')$，若 $p=2,\ s>2,\ r\ge 2$，

使得存在序列 $\{\boldsymbol{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子序列 $\{\boldsymbol{u}_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$，$\{\varphi_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$，$\{\mu_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$，

在 $L^{\infty}(0,T;\boldsymbol{H})$ 中 $\boldsymbol{u}_{nj}\xrightarrow{\text{弱}^*}\boldsymbol{u}$，

在 $L^2(0,T;\boldsymbol{V})$ 中 $\boldsymbol{u}_{nj}\xrightarrow{\text{弱}}\boldsymbol{u}$，

在 $L^2(0,T;\boldsymbol{H})$ 中 $\boldsymbol{u}_{nj}\xrightarrow{\text{强}}\boldsymbol{u}$，

在 $L^{2-\gamma}(0,T;\boldsymbol{V}')$ 中 $\boldsymbol{u}_{nj}'\xrightarrow{\text{弱}}\boldsymbol{u}_t$，$\forall\gamma\in(0,1)$，

在 $L^{\infty}(0,T;H)$ 中 $\varphi_{nj}\xrightarrow{\text{弱}^*}\varphi$，

在 $L^2(0,T;V)$ 中 $\varphi_{nj}\xrightarrow{\text{弱}}\varphi$，

在 $L^2(0,T;H)$ 中 $\varphi_{nj}\xrightarrow{\text{强}}\varphi$，

在 $L^2(0,T;V)$ 中 $\mu_{nj}\xrightarrow{\text{弱}}\mu$，

在 $L^\infty(0,T;L^p(\Omega))$ 中 $\rho(\cdot,\varphi_{nj})\xrightarrow{\text{弱}^*}\rho$，

在 $L^\infty(0,T;V_s')$ 中 $\varphi_{nj}'\xrightarrow{\text{弱}^*}\varphi_t$，

若 $1<p<2$， $s=\dfrac{p+2}{p}$，

在 $L^\infty(0,T;V_s')$ 中 $\varphi_{nj}'\xrightarrow{\text{弱}^*}\varphi_t$，

在 $L^r(0,T;V_2')$ 中 $\varphi_{nj}'\xrightarrow{\text{弱}}\varphi_t$，

若 $p=2$，$s>2$ 且 $r\ge 2$，

在 $L^{\frac{2p}{2p-3}}(0,T;V_s')$ 中 $\varphi_{nj}'\xrightarrow{\text{弱}}\varphi_t$。

由于在 $L^2(0,T;H)$ 中 $\varphi_{nj}\xrightarrow{\text{强}}\varphi$，可以得到 $\rho(\cdot,\varphi_{nj})\to a\varphi+F'(\varphi)$ 在 $\Omega\times(0,T)$ 上几乎处处成立，又因为在 $L^\infty(0,T;L^p(\Omega))$ 中 $\rho(\cdot,\varphi_{nj})\xrightarrow{\text{弱}^*}\rho$，因此有 $\rho=a\varphi+F'(\varphi)$。进一步由于 $\mu_k=P_k\left(\rho(\cdot,\varphi_k)-J*\varphi_k\right)$，所以对 $\forall\mathbf{v}\in\Psi_n$ 以及 $k\ge n$，我们有

$$\int_0^T(\mu_k(t),\mathbf{v})\chi(t)\mathrm{d}t=\int_0^T\left(\rho(\cdot,\varphi_k)-J*\varphi_k,\mathbf{v}\right)\chi(t)\mathrm{d}t,\ \forall\chi\in C_0^\infty(0,T).$$

当 $k\to\infty$ 时，通过上述的收敛性结论以及 $\{\Psi_n\}_{n\ge1}$ 在 H 中的稠密性，可以得到 $\mu=\rho-J*\varphi=a\varphi+F'(\varphi)-J*\varphi$，进而得到 $\rho\in L^2(0,T;V)$。

由 $\{\Psi_n\}_{n\ge1}$ 和 $\{W_n\}_{n\ge1}$ 在 V_s 和 $\boldsymbol{V}$ 中的稠密性以及上述的收敛性结论，对 $\forall\psi\in V_s$，得到 u，φ，μ，ρ 满足式(8)，并且对 $\forall\mathbf{v}\in\boldsymbol{V}'$，得到 $\boldsymbol{u}$，φ，μ，ρ，满足式(9)。进一步可以把式(8)写成以下形式

$$\langle\varphi_t,\psi\rangle=-(\nabla\mu,\nabla\psi)+(\boldsymbol{u},\varphi\nabla\psi)\tag{27}$$

对 $\forall\delta\in(0,1)$ 有 $\left|(\boldsymbol{u},\varphi\nabla\psi)\right|\le N^{\frac{2-2\delta}{2-\delta}}\|\nabla\boldsymbol{u}\|\|\varphi\|_V^{\frac{\delta}{2-\delta}}\|\nabla\psi\|$，故可以推断出

$$\varphi_t\in L^{2-\delta}(0,T;V'),\ \forall\delta\in(0,1)\tag{28}$$

此外，对 $\forall\psi\in V$ 都满足式(8)和式(27)。

因此我们证明了非局部 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 系统二维弱解的存在性。

接下来证明能量不等式(10)成立。对于子序列我们有

在 $\boldsymbol{H}$ 中 $\boldsymbol{u}_{nj}(t)\xrightarrow{\text{强}}\boldsymbol{u}(t)$，在 H 中 $\varphi_{nj}(t)\xrightarrow{\text{强}}\varphi(t)$，

并且由 Fatou's 引理得 $\int_\Omega F(\varphi(t))\le\liminf\limits_{n\to\infty}\int_\Omega F(\varphi_n(t))$。由于在 $L^2(0,T;V)$ 中 $J*\varphi_{nj}\xrightarrow{\text{弱}}J*\varphi$，并且 $P_n\in\mathcal{L}(V,V)$，因此可以得到在 $L^2(0,T;V)$ 中 $P_n(J*\varphi_{nj})\to J*\varphi$。

接下来在 0 到 t 上对式(16)进行积分，再结合上述估计，利用 $L^2(0,T;H)$ 中范数的下半连续性就得到了能量不等式(10)。

3.2. 唯一性

定理 3.2 假设(H_1)~(H_7)成立，令 $\boldsymbol{u}_0\in\boldsymbol{H}$，$\varphi_0\in H$，$F(\varphi_0)\in L^1(\Omega)$ 以及 $\boldsymbol{h}\in L^2_{loc}([0,\infty);\boldsymbol{V}')$，定理 2.1 给出的初始数据 $(\boldsymbol{u}_0,\varphi_0)$ 对应的弱解 $(\boldsymbol{u},\varphi)$ 是唯一的。

证 考虑系统(1)~(7)的两个初始数据 $(\boldsymbol{u}_{0i},\varphi_{0i})$ 对应着的两个弱解 $(\boldsymbol{u}_i,\varphi_i)(i=1,2)$，其中 $\boldsymbol{u}_{0i}\in\boldsymbol{H}$，$\varphi_{0i}\in H$，令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1$、$\varphi=\varphi_2-\varphi_1$、$\tilde{\mu}=\mu(\varphi_2)-\mu(\varphi_1)$、$\tilde{p}=\tilde{p}_2-\tilde{p}_1$ 以及 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h}_2-\boldsymbol{h}_1$，则 $(\boldsymbol{u},\varphi)$ 也是系统

的弱解，满足

$$\varphi_t = \Delta\tilde{\mu} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi_1 - \boldsymbol{u}_2\cdot\nabla\varphi, \tag{29}$$

$$\tilde{\mu} = a\varphi - J*\varphi + F'(\varphi_2) - F'(\varphi_1), \tag{30}$$

$$\boldsymbol{u}_t - \Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_2 - (\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1 + \nabla\tilde{p} = -\varphi(\varphi_1+\varphi_2)\frac{\nabla a}{2} - (J*\varphi)\nabla\varphi_2 - (J*\varphi_1)\nabla\varphi + \boldsymbol{h}. \tag{31}$$

让式(31)在 $\boldsymbol{H}$ 中与 $\boldsymbol{u}$ 作内积，我们令

$$I_1 = -\frac{1}{2}\left(\varphi(\varphi_1+\varphi_2)\nabla a, \boldsymbol{u}\right),\quad I_2 = -\left((J*\varphi)\nabla\varphi_2, \boldsymbol{u}\right),\quad I_3 = -\left((J*\varphi_1)\nabla\varphi, \boldsymbol{u}\right),$$

由 Hölder 、Young、Gagliardo-Nirenberg 不等式，可得以下估计

$$\begin{aligned}
I_1 &\le \left|\left(\varphi(\varphi_1+\varphi_2)\nabla a, \boldsymbol{u}\right)\right| \le \|\varphi\|\|\varphi_1+\varphi_2\|_{L^4}\|\nabla a\|_{L^\infty}\|\boldsymbol{u}\|_{L^4} \le c\|\varphi\|\|\varphi_1+\varphi_2\|_{L^4}\|\nabla a\|_{L^\infty}\|\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{2}}\\
&\le \frac{c'}{10}\|\varphi\|^2 + c\|\varphi_1+\varphi_2\|_{L^4}^2\|\nabla a\|_{L^\infty}^2\|\boldsymbol{u}\|\|\nabla\boldsymbol{u}\|\\
&\le \frac{c'}{10}\|\varphi\|^2 + \frac{1}{6}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2 + c\|\varphi_1+\varphi_2\|_{L^4}^4\|\nabla a\|_{L^\infty}^4\|\boldsymbol{u}\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &\le \left|\left(\varphi_2, (\nabla J*\varphi)\boldsymbol{u}\right)\right| \le \|\varphi_2\|_{L^4}\|\nabla J*\varphi\|\|\boldsymbol{u}\|_{L^4} \le c\|\varphi_2\|_{L^4}\|\nabla J\|_{L^1}\|\varphi\|\|\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{2}}\\
&\le \frac{c'}{10}\|\varphi\|^2 + c\|\nabla J\|_{L^1}^2\|\varphi_2\|_{L^4}^2\|\boldsymbol{u}\|\|\nabla\boldsymbol{u}\|\\
&\le \frac{c'}{10}\|\varphi\|^2 + \frac{1}{6}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2 + c\|\nabla J\|_{L^1}^4\|\varphi_2\|_{L^4}^4\|\boldsymbol{u}\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &\le \left|\left((\nabla J*\varphi_1)\varphi, \boldsymbol{u}\right)\right| \le \|\nabla J*\varphi_1\|_{L^4}\|\varphi\|\|\boldsymbol{u}\|_{L^4} \le c\|\nabla J\|_{L^1}\|\varphi_1\|_{L^4}\|\varphi\|\|\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{2}}\\
&\le \frac{c'}{10}\|\varphi\|^2 + c\|\nabla J\|_{L^1}^2\|\varphi_1\|_{L^4}^2\|\boldsymbol{u}\|\|\nabla\boldsymbol{u}\|\\
&\le \frac{c'}{10}\|\varphi\|^2 + \frac{1}{6}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2 + c\|\nabla J\|_{L^1}^4\|\varphi_1\|_{L^4}^4\|\boldsymbol{u}\|^2.
\end{aligned}$$

结合估计，根据式(31)可以得到以下不等式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{u}\|^2 + \frac{1}{4}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2 \le \frac{3}{10}c'\|\varphi\|^2 + \alpha\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{h}\|_{V'}^2, \tag{32}$$

其中 $\alpha = c\|\nabla J\|_{L^1}^4\left(\|\varphi_1\|_{L^4}^4 + \|\varphi_2\|_{L^4}^4\right) + c\|\nabla\boldsymbol{u}_2\|^2$。由于 $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)\subset L^4\left(0,T;L^4(\Omega)\right)$，根据 Gagliardo-Nirenberg 不等式，我们可以得到 $\alpha\in L^1(0,T)$。接下来让式(29)与 $B_N^{-1}(\varphi-\overline{\varphi})$ 作内积(注意到 $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_{01} - \overline{\varphi}_{02}$)，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|B_N^{-1/2}(\varphi-\overline{\varphi})\right\|^2 + \left(a\varphi + f(\varphi_2) - f(\varphi_1), \varphi-\overline{\varphi}\right) = (J*\varphi, \varphi) + |\Omega|\overline{\varphi}\overline{\tilde{\mu}} + I_4 + I_5,$$

其中 $I_4 = -\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi_1, B_N^{-1}(\varphi-\overline{\varphi})\right)$，$I_5 = -\left(\boldsymbol{u}_2\cdot\nabla\varphi, B_N^{-1}(\varphi-\overline{\varphi})\right)$。由假设($H_2$)、($H_3$)和第一中值定理，有

$$\left(a\varphi + f(\varphi_2) - f(\varphi_1), \varphi\right) = (a\varphi, \varphi) + \left(f'(s)(\varphi_2-\varphi_1), \varphi\right) \ge \underline{a}\|\varphi\|^2 - \lambda\|\varphi\|^2 \ge (\underline{a}-\lambda)\|\varphi\|^2,$$

由假设(H_2)和(H_4)，可以得到

$$\left(a\varphi + f(\varphi_2) - f(\varphi_1), \overline{\varphi}\right) = \overline{\varphi}\int_\Omega\left(a\varphi + f(\varphi_2) - f(\varphi_1)\right)\mathrm{d}x \le |\Omega|^{-1}\int_\Omega|a||\varphi|^2dx + c_1|\Omega|^{-1}\int_\Omega|\varphi|^2\mathrm{d}x \le \frac{\overline{a}+c_1}{|\Omega|}\|\varphi\|^2,$$

进一步可以得到

$$\left(a\varphi+f\left(\varphi_2\right)-f\left(\varphi_1\right),\varphi-\overline{\varphi}\right)\geq\left(\underline{a}-\lambda\right)\|\varphi\|^2-\frac{\overline{a}+c_1}{|\Omega|}\|\varphi\|^2\geq c\|\varphi\|^2 .$$

由此我们有，

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|B_N^{-1/2}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|^2+c'\|\varphi\|^2\leq\left|\left(J*\varphi,\varphi\right)\right|+|\Omega|\overline{\varphi}\overline{\tilde{\mu}}+I_4+I_5 . \tag{33}$$

将上式右边第一项用 Young 不等式进行如下估计，

$$\begin{aligned}\left|\left(J*\varphi,\varphi-\overline{\varphi}\right)\right|+\left|\left(J*\varphi,\overline{\varphi}\right)\right|&=\left|\left(B_N^{1/2}\left(J*\varphi-\overline{J*\varphi}\right),B_N^{-1/2}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right)\right|+\left|\left(J*\varphi,\overline{\varphi}\right)\right|\\&\leq\frac{c'}{10}\|\varphi\|^2+c\left\|B_N^{-1/2}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|^2+\frac{c'}{4}\|\varphi\|^2+c\overline{\varphi}^2,\end{aligned}$$

由于 $\left\|B_N^{1/2}\boldsymbol{u}\right\|^2=\left(B_N\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\right)=\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2$，对所有 $\boldsymbol{u}\in D\left(B_N\right)$，故 $\left\|B_N^{1/2}\boldsymbol{u}\right\|=\|\nabla\boldsymbol{u}\|$。

由 Hölder、Young、Gagliardo-Nirenberg 和 Poincaré 不等式，对 I_4 和 I_5 项进行如下估计

$$I_4\leq\left|\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla B_N^{-1}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right),\varphi_1\right)\right|\leq\|\boldsymbol{u}\|_{L^4}\left\|\nabla B_N^{-1}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|\left\|\varphi_1\right\|_{L^4}\leq\frac{1}{8}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2+c\left\|\varphi_1\right\|_{L^4}^2\left\|B_N^{-\frac{1}{2}}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|^2,$$

$$\begin{aligned}I_5&\leq\left|\left(\boldsymbol{u}_2\cdot\nabla B_N^{-1}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right),\varphi\right)\right|\leq\|\varphi\|\left\|\boldsymbol{u}_2\right\|_{L^4}\left\|\nabla B_N^{-1}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|_{L^4}\leq\frac{c'}{20}\|\varphi\|^2+c\left\|\boldsymbol{u}_2\right\|_{L^4}^2\left\|\nabla B_N^{-1}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|_{L^4}^2\\&\leq\frac{c'}{20}\|\varphi\|^2+c\left\|\boldsymbol{u}_2\right\|_{L^4}^2\left\|\nabla B_N^{-1}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|\left\|\nabla B_N^{-1}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|_{H^1} .\end{aligned}$$

由于 ϕ 在 $D\left(B_N\right)$ 中的 H^2 范数等价于 $B_N\phi+\phi$，其中 $\phi=B_N^{-1}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\in D\left(B_N\right)$ 的 L^2 范数。因此我们有 $\left\|\nabla B_N^{-1}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|_{H^1}\leq\left\|B_N^{-1}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|_{H^2}\leq c\left\|\left(B_N+I\right)B_N^{-1}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|\leq c\|\varphi-\overline{\varphi}\|$。

故可以得到

$$I_5\leq\frac{c'}{10}\|\varphi\|^2+c\left\|\boldsymbol{u}_2\right\|_{L^4}^4\left\|B_N^{-\frac{1}{2}}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|^2+|\Omega|\overline{\varphi}^2 。$$

将式(32)与式(33)相加，再结合上述估计，可以得到不等式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\boldsymbol{u}\|^2+\left\|B_N^{-1/2}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|^2\right)+\frac{c'}{4}\|\varphi\|^2+\frac{1}{8}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2\leq\beta\left(\|\boldsymbol{u}\|^2+\left\|B_N^{-1/2}\left(\varphi-\overline{\varphi}\right)\right\|^2\right)+c\overline{\varphi}^2+|\Omega|\overline{\varphi}\overline{\tilde{\mu}}+\|\boldsymbol{h}\|_{V'}^2 \tag{34}$$

其中 $\beta=\alpha+c\left(1+\left\|\varphi_1\right\|_{L^4}^2+\left\|\boldsymbol{u}_2\right\|_{L^4}^4\right)\in L^1(0,T)$。

我们考虑对应着相同初始数据和相同外力的两个弱解，那么有 $\overline{\varphi}=0$ 且 $\boldsymbol{h}=0$，对式(34)用 Gronwall 不等式，可以得到在[0, T]上有 $\boldsymbol{u}=0$， $\varphi=0$，因此证明了弱解的唯一性。

4. 全局吸引子的存在性

定理 4.1 在二维空间中，系统初始数据 $\left(\boldsymbol{u}_0,\varphi_0\right)$ 对应的弱解 $(\boldsymbol{u},\varphi)$ 满足能量方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(\boldsymbol{u},\varphi)+\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2+\|\nabla\mu\|^2=\langle\boldsymbol{h},\boldsymbol{u}\rangle \tag{35}$$

另外，若 $\boldsymbol{h}\in L_{tb}^2\left(0,\infty;\boldsymbol{V}'\right)$，则有下面的耗散估计

$$\mathcal{E}\left(\boldsymbol{u}(t),\varphi(t)\right)\leq\mathcal{E}\left(\boldsymbol{u}_0,\varphi_0\right)e^{-kt}+F\left(m_0\right)|\Omega|+K,\quad\forall t\geq0 \tag{36}$$

其中，$\|\boldsymbol{h}\|_{L_{tb}^2(0,\infty;\boldsymbol{V}')}^2=\sup_{t\geq0}\int_t^{t+1}\|\boldsymbol{h}(\tau)\|_{\boldsymbol{V}'}^2\,\mathrm{d}\tau<\infty$， $m_0=\left(\varphi_0,1\right)$，并且 k、K 是不依赖于初始数据的正常数，K 只依

赖于 Ω 、J、F 和 $\|\boldsymbol{h}\|_{L^2_{tb}(0,\infty;V')}$。

证 在式(8)中令 $\psi=\mu(\tau)$，在式(9)中令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}(\tau)$，将两式相加，然后在 0 到 t 上对 τ 积分。考虑对偶 $\langle\varphi_t,\mu\rangle$，对偶 $\langle\varphi_t,F'(\varphi)\rangle$ 可以通过 $F'(\varphi)=g(\varphi)-(\lambda+1)\varphi$ 进行重写，其中 $g(\varphi)=G'(\varphi)$，并且 $g\in C^1(\mathbb{R})$ 单调递增。由于 $g(\varphi)\in L^2(0,T;V)$，对 $\forall t\in(0,T)$，我们有

$$\langle\varphi_t,F'(\varphi)\rangle=\langle\varphi_t,g(\varphi)\rangle-(\lambda+1)\langle\varphi_t,\varphi\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega G(\varphi)-\frac{\lambda+1}{2}\|\varphi\|^2\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega F(\varphi).$$

根据式(9)和式(27)，结合该等式我们可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\boldsymbol{u}\|^2+\left\|\sqrt{a}\varphi\right\|^2-(\varphi,J*\varphi)+2\int_\Omega F(\varphi)\right)+\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2+\|\nabla\mu\|^2\\&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\boldsymbol{u}\|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(\varphi(x)-\varphi(y))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\int_\Omega F(\varphi)\right)+\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2+\|\nabla\mu\|^2=\langle\boldsymbol{h},\boldsymbol{u}\rangle.\end{aligned}$$

因此得到了式(35)。进一步在 0 到 t 上对式(35)进行积分，得到能量不等式的积分形式，即式(10)。为了得到式(36)，让 $\mu=a\varphi-J*\varphi+F'(\varphi)$ 和 φ 在 $L^2(\Omega)$ 上作内积，可以得到

$$(\mu,\varphi)=\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(\varphi(x)-\varphi(y))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\left(F'(\varphi),\varphi\right).$$

由于函数 G 是凸函数，则 $F'(s)s\ge F(s)-\frac{\lambda+1}{2}s^2-F(0)$，进而可以得到

$$(\mu,\varphi)\ge\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(\varphi(x)-\varphi(y))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Omega F(\varphi)-\frac{\lambda+1}{2}\|\varphi\|^2-c \tag{37}$$

令 $\overline{\mu}=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\mu$，$(\varphi_0,1)=0$，再根据 Poincaré 不等式，我们有 $(\mu,\varphi)=(\mu-\overline{\mu},\varphi)\le C_p\|\nabla\mu\|\|\varphi\|$，其中 C_p 是 Poincaré 常数。结合假设(H_6)，由式(37)得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(\varphi(x)-\varphi(y))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_\Omega F(\varphi)+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(c_1|\varphi|^p-c_2\right)-\frac{\lambda+1}{2}\|\varphi\|^2-c\\&\le\frac{7}{4}\|J\|_{L_1}\|\varphi\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla\mu\|^2+\frac{C_p^2}{2}\|\varphi\|^2.\end{aligned}$$

结合 Poincaré 不等式，可以推断出 $\|\nabla\mu\|^2\ge\beta\|\nabla\varphi\|^2$，其中 $\beta=\left(\underline{a}-\lambda-2C_p\|\nabla J\|_{L_1}\right)^2$，$C_p<\frac{\underline{a}-\lambda}{2\|\nabla J\|_{L_1}}$。故可以得到

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(\boldsymbol{u},\varphi)\le c_7\left(\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2+\|\nabla\mu\|^2\right)+c_6, \tag{38}$$

其中 $c_6=\max\left(1,\frac{C_p}{4}\right)$。通过式(35)和式(38)，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(\boldsymbol{u},\varphi)+k\mathcal{E}(\boldsymbol{u},\varphi)\le l+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{h}\|_{V'}^2,$$

其中 $k=\frac{1}{2c_7}$，$l=\frac{c_6}{c_7}$。根据 Gronwall 不等式，我们有

$$\mathcal{E}\left(\left(\boldsymbol{u}(t),\varphi(t)\right)\right)\le\mathcal{E}(\boldsymbol{u}_0,\varphi_0)\mathrm{e}^{-kt}+K, \tag{39}$$

其中 $K=\frac{l}{k}+\frac{1}{2\left(1-\mathrm{e}^{-k}\right)}\|\boldsymbol{h}\|_{L_{tb}^{2}(0,\infty;V')}^{2}$。若 $m_0=(\varphi_0,1)\neq 0$，如果 $(\boldsymbol{u},\varphi)$ 具有初始数据 $(\boldsymbol{u}_0,\varphi_0)$，它是关于双阱势函数 F 对应系统的弱解，则 $(\boldsymbol{u},\tilde{\varphi})$ 具有初始数据 $(\boldsymbol{u}_0,\varphi_0-m_0)$，它也是该系统的弱解，其中 $\tilde{\varphi}=\varphi-m_0$，双阱势函数 $\tilde{F}$ 为 $\tilde{F}(s)=F(s+m_0)-F(m_0)$。弱解 $(\boldsymbol{u},\tilde{\varphi})$ 满足式(39)，因此可以得到式(36)。故定理 4.1 得证。

下面选择一个合适的度量空间，在该空间可以定义弱解，可以构造相关的半群。固定 $m\geq 0$，

$$\mathcal{X}_m=\boldsymbol{H}\times\mathcal{Y}_m,$$

其中

$$\mathcal{Y}_m=\left\{\varphi\in H:F(\varphi)\in L^1(\Omega),|(\varphi,1)|\leq m\right\},$$

$$\boldsymbol{H}=\mathcal{V}^{H^2}=\overline{\left\{\boldsymbol{u}\in C_0^\infty(\Omega)^2:\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\right\}}^{L^2(\Omega)^2}.$$

定义距离

$$\boldsymbol{d}(z_1,z_2)=\|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2\|+\|\varphi_1-\varphi_2\|+\left|\int_\Omega F(\varphi_1)-\int_\Omega F(\varphi_2)\right|^{\frac{1}{2}},$$

对 $\forall z_1=(\boldsymbol{u}_1,\varphi_1)$ ， $z_2=(\boldsymbol{u}_2,\varphi_2)\in\mathcal{X}_m$。

系统(1)~(7)在度量空间 $\mathcal{X}_m$ 中生成半群 $\{S_m(t)\}_{t\geq 0}$，定义 $S_m(t):\mathcal{X}_m\to\mathcal{X}_m$，$S_m(t)(\boldsymbol{u}_0,\varphi_0)=(\boldsymbol{u}(t),\varphi(t))$，这里的 $(\boldsymbol{u}(t),\varphi(t))$ 是系统的唯一弱解。

定理 4.2 半群 $\{S_m(t)\}_{t\geq 0}$ 在空间 $\mathcal{X}_m$ 中点耗散并且有界。

证 根据假设(H_6)和嵌入定理，有

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(z)&=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2+\frac{1}{2}\left\|\sqrt{a}\varphi\right\|^2-\frac{1}{2}(J*\varphi,\varphi)+\int_\Omega F(\varphi)\geq\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2+\frac{1}{2}a\|\varphi\|^2-\frac{1}{2}\|J\|_{L^1}\|\varphi\|^2+\int_\Omega\left(c_4|\varphi|^r-c_5\right)\\&\geq\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2+\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\|J\|_{L^1}+c_4\right)\|\varphi\|^2-c_5|\Omega|,\end{aligned}$$

由(H_2)可知 $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\|J\|_{L^1}+c_4\geq 0$，取 $\gamma=c_5|\Omega|$，则存在 $\gamma=\gamma(c_4,c_5,J,|\Omega|)\geq 0$ 使得对 $\forall z\in\mathcal{X}_m$ 都有 $\mathcal{E}(z)\geq-\gamma$。设 $\overline{\mathcal{E}}(z)=\mathcal{E}(z)+\gamma\geq 0$，根据式(36)可以推断出

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2+\frac{1}{2}\left\|\sqrt{a}\varphi(t)\right\|^2-\frac{1}{2}(J*\varphi(t),\varphi(t))+\int_\Omega F(\varphi(t))\leq\overline{\mathcal{E}}(z_0)\mathrm{e}^{-kt}+L_m,\quad\forall t\geq 0,\tag{40}$$

其中 $z_0=(\boldsymbol{u}_0,\varphi_0)$ 并且 $L_m=F(m)|\Omega|+K$。再次由假设(H_6)我们有

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{a}\varphi(t)\right\|^2-\frac{1}{2}(J*\varphi(t),\varphi(t))+\int_\Omega F(\varphi(t))\geq c_8\|\varphi(t)\|^2-\gamma,$$

其中 $c_8=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\|J\|_{L^1}+c_4$，因此有

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2+c_8\|\varphi(t)\|^2\leq\overline{\mathcal{E}}(z_0)\mathrm{e}^{-kt}+L_m+\gamma.\tag{41}$$

从式(40)可以推断出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2+\int_\Omega F(\varphi(t))&\leq\overline{\mathcal{E}}(z_0)\mathrm{e}^{-kt}+L_m-\frac{1}{2}\left\|\sqrt{a}\varphi(t)\right\|^2+\frac{1}{2}(J*\varphi(t),\varphi(t))\\&\leq\overline{\mathcal{E}}(z_0)\mathrm{e}^{-kt}+L_m+c_9\|\varphi(t)\|^2,\end{aligned}\tag{42}$$

其中 $c_9=\frac{1}{2}\|J\|_{L^1}$，由式(41)得 $c_8\|\varphi(t)\|^2\le\overline{\mathcal{E}}(z_0)\mathrm{e}^{-kt}+L_m+\gamma$，故 $\|\varphi(t)\|^2\le\frac{1}{c_8}\left(\overline{\mathcal{E}}(z_0)\mathrm{e}^{-kt}+L_m+\gamma\right)$，将其代入式(42)有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2+\int_\Omega F(\varphi(t))&\le\overline{\mathcal{E}}(z_0)\mathrm{e}^{-kt}+L_m+c_9\|\varphi(t)\|^2\\&\le\overline{\mathcal{E}}(z_0)\mathrm{e}^{-kt}+L_m+c_9\left(\frac{1}{c_8}\left(\overline{\mathcal{E}}(z_0)\mathrm{e}^{-kt}+L_m+\gamma\right)\right)\\&\le c_{10}\overline{\mathcal{E}}(z_0)\mathrm{e}^{-kt}+c_{10}L_m+c_{11},\end{aligned}\tag{43}$$

其中 $c_{10}=1+\frac{c_9}{c_8},\ c_{11}=\frac{\gamma c_9}{c_8}$。因此，从式(42)和式(43)我们得出

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|^2+\|\varphi(t)\|^2+\left|\int_\Omega F(\varphi(t))-\int_\Omega F(0)\right|\le c_{12}\overline{\mathcal{E}}(z_0)\mathrm{e}^{-kt}+c_{12}|L_m|+c_{13},\tag{44}$$

对 $\forall t\ge0$，其中 c_{12} 和 c_{13} 都是大于 0 的常数。令 $z(t)=(\boldsymbol{u}(t),\varphi(t))$，式(43)可以写成下面的不等式

$$\boldsymbol{d}^2(z(t),0)\le c_{12}\overline{\mathcal{E}}(z_0)\mathrm{e}^{-kt}+c_{12}|L_m|+c_{13},\quad\forall t\ge0。$$

选择 R_0 使得 $R_0^2>c_{12}|L_m|+c_{13}$，推断出 $\boldsymbol{d}(z(t),0)\le R_0$，对 $\forall t\ge t_0(z_0)$，其中 $t_0=\frac{1}{k}\ln\frac{c_{12}\overline{\mathcal{E}}(z_0)}{R_0^2-(c_{12}|L_m|+c_{13})}$，这表明 $\{S_m(t)\}_{t\ge0}$ 是点耗散的，式(44)表明 $\{S_m(t)\}_{t\ge0}$ 是有界的。

定理 4.3 半群 $\{S_m(t)\}_{t\ge0}$ 在空间 $\mathcal{X}_m$ 中是渐近紧的。

证 由紧嵌入 $V\subset\subset L^{p'}(\Omega)$，有 $L^2(0,T;V)\cap H^1(0,T;V')\subset\subset L^2(0,T;L^{p'}(\Omega))$。由于在 $L^2(0,T;V)$ 中 $\varphi_{nj}\xrightarrow{弱}\varphi$，在 $L^2(0,T;V')$ 中 $\varphi_{nj}'\xrightarrow{弱}\varphi_t$，则在 $H^1(0,T;V')$ 中 $\varphi_{nj}\xrightarrow{弱}\varphi$，再由 Aubin-Lions 紧性引理推断出在 $L^2(0,T;L^{p'}(\Omega))$ 中 $\varphi_{nj}\xrightarrow{强}\varphi$。

因此，有 φ_{nj} 在 $L^{p'}(\Omega)$ 中强收敛于 φ，*a. e.* $t>0$，根据假设(H_5)，可以得到 $|F(s)|\le\frac{c_2^{1/p}}{5}s^5+c$，故有 $|F(\varphi_j(x))|\le\frac{c_2^{1/p}}{5}|\varphi_j(x)|^5+c$。由 Sobolev 嵌入定理有 $H^1(\Omega)\subset L^6(\Omega)$，根据 Lebesgue 控制收敛定理，可推断出

$$\int_\Omega F(\varphi_{nj}(t))\to\int_\Omega F(\varphi(t)),\quad a.\ e.\quad t>0.$$

可得

在 $\boldsymbol{H}$ 中 $\boldsymbol{u}_{nj}(t)\xrightarrow{强}\boldsymbol{u}(t)$，$a.\ e.\ \ t>0$，

在 H 中 $\varphi_{nj}(t)\xrightarrow{强}\varphi(t)$，$a.\ e.\ \ t>0$，

令 $z=(\boldsymbol{u},\varphi)$，则 $\mathcal{E}(z(t))=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2+\frac{1}{4}\int_\Omega\int_\Omega J(x-y)(\varphi(x,t)-\varphi(y,t))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Omega F(\varphi(t))$，故可以推断出对 $\forall t>0$ 有 $\mathcal{E}(z_{nj}(t))\to\mathcal{E}(z(t))$。现令 $\tilde{\mathcal{E}}(z(t))=\mathcal{E}(z(t))-\int_0^t\langle\boldsymbol{h},\boldsymbol{u}(\tau)\rangle\mathrm{d}\tau$，由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(z(t))\le0$，则能量函数 $\mathcal{E}(z_{nj}(t))$ 随时间 t 单调递减，故对于每个 j，函数 $\tilde{\mathcal{E}}(z_{nj}(\cdot))$ 在 $[0,\infty)$ 上递减，并且 $\tilde{\mathcal{E}}(z(\cdot))$ 在 $[0,\infty)$ 上是连续的，则对 $\forall t>0,\ \tilde{\mathcal{E}}(z_{nj}(t))\to\tilde{\mathcal{E}}(z(t))$，有

$$\mathcal{E}(z_{nj}(t))\to\mathcal{E}(z(t)),\quad t>0.\tag{45}$$

从式(45)可以推断出对 $\forall t>0$，在 $\mathcal{X}_m$ 中 $z_{nj}(t)\to z(t)$。故 $\{S_m(t)\}_{t\geq 0}$ 在空间 $\mathcal{X}_m$ 中是渐近紧的。

由定理 4.2 和定理 4.3 有以下结果。

定理 4.4 系统(1)~(7)生成的半群 $\{S_m(t)\}_{t\geq 0}$ 在空间 $\mathcal{X}_m$ 中存在全局吸引子。

5. 小结

本文改进了非线性项 $f(s)$ 和双阱势函数 $F(s)$ 的假设条件后，讨论系统(1)~(7)在二维空间中弱解的适定性和渐近行为。利用标准 Galerkin 方法并结合空间不等式证明了系统弱解的存在唯一性，利用弱解的耗散估计证明系统在空间 $\mathcal{X}_m$ 中存在全局吸引子。本文还可以在改进的假设条件下进一步去研究系统在二维空间中指数吸引子的存在性问题，以及在三维空间中弱解的适定性和渐近行为。

基金项目

本文受到四川省科技厅科学研究基金(No. 22CXTD0029)的资助。

参考文献

[1] Abels, H. (2008) On a Diffuse Interface Model for Two-Phase Flows of Viscous, Incompressible Fluids with Matched Densities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **194**, 463-506. https://doi.org/10.1007/s00205-008-0160-2

[2] Gal, C.G. and Grasselli, M. (2010) Asymptotic Behavior of a Cahn-Hilliard-Navier-Stokes System in 2D. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **27**, 401-436. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2009.11.013

[3] Gal, C.G. and Grasselli, M. (2011) Instability of Two-Phase Flows: A Lower Bound on the Dimension of the Global Attractor of the Cahn-Hilliard-Navier-Stokes System. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **240**, 629-635. https://doi.org/10.1016/j.physd.2010.11.014

[4] Cao, C. and Gal, C.G. (2012) Global Solutions for the 2D NS-CH Model for a Two-Phase Flow of Viscous, Incompressible Fluids with Mixed Partial Viscosity and Mobility. *Nonlinearity*, **25**, 3211-3234. https://doi.org/10.1088/0951-7715/25/11/3211

[5] Gal, C.G., Grasselli, M. and Miranville, A. (2016) Cahn-Hilliard-Navier-Stokes Systems with Moving Contact Lines. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **55**, Article No. 50. https://doi.org/10.1007/s00526-016-0992-9

[6] You, B. (2019) Global Attractor of the Cahn-Hilliard-Navier-Stokes System with Moving Contact Lines. *Communications on Pure & Applied Analysis*, **18**, 2283-2298. https://doi.org/10.3934/cpaa.2019103

[7] Giorgini, A., Miranville, A. and Temam, R. (2019) Uniqueness and Regularity for the Navier-Stokes-Cahn-Hilliard System. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **51**, 2535-2574. https://doi.org/10.1137/18m1223459

[8] 黄旭凤, 蒲志林. 具有动态边界条件的 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 系统解的渐近行为[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2023, 44(1):1-16.

[9] Bates, P.W. and Han, J. (2005) The Neumann Boundary Problem for a Nonlocal Cahn-Hilliard Equation. *Journal of Differential Equations*, **212**, 235-277. https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.07.003

[10] Colli, P., Frigeri, S. and Grasselli, M. (2012) Global Existence of Weak Solutions to a Nonlocal Cahn-Hilliard-Navier-Stokes System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **386**, 428-444. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.08.008

[11] Frigeri, S. and Grasselli, M. (2012) Global and Trajectory Attractors for a Nonlocal Cahn-Hilliard-Navier-Stokes System. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **24**, 827-856. https://doi.org/10.1007/s10884-012-9272-3

[12] Frigeri, S. and Grasselli, M. (2012) Nonlocal Cahn-Hilliard-Navier-Stokes Systems with Singular Potentials. *Dynamics of Partial Differential Equations*, **9**, 273-304. https://doi.org/10.4310/dpde.2012.v9.n4.a1

[13] Frigeri, S., Grasselli, M. and Krejčí, P. (2013) Strong Solutions for Two-Dimensional Nonlocal Cahn-Hilliard-Navier Stokes Systems. *Journal of Differential Equations*, **255**, 2587-2614. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.07.016

[14] Frigeri, S., Gal, C.G. and Grasselli, M. (2016) On Nonlocal Cahn-Hilliard-Navier-Stokes Systems in Two Dimensions. *Journal of Nonlinear Science*, **26**, 847-893. https://doi.org/10.1007/s00332-016-9292-y

[15] Frigeri, S., Grasselli, M. and Rocca, E. (2015) A Diffuse Interface Model for Two-Phase Incompressible Flows with Non-Local Interactions and Non-Constant Mobility. *Nonlinearity*, **28**, 1257-1293. https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/5/1257

[16] Frigeri, S. (2016) Global Existence of Weak Solutions for a Nonlocal Model for Two-Phase Flows of Incompressible Fluids with Unmatched Densities. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **26**, 1955-1993. https://doi.org/10.1142/s0218202516500494

[17] Frigeri, S., Gal, C.G., Grasselli, M. and Sprekels, J. (2019) Two-Dimensional Nonlocal Cahn-Hilliard-Navier-Stokes Systems with Variable Viscosity, Degenerate Mobility and Singular Potential. *Nonlinearity*, **32**, 678-727. https://doi.org/10.1088/1361-6544/aaedd0

[18] Frigeri, S. (2021) On a Nonlocal Cahn-Hilliard/Navier-Stokes System with Degenerate Mobility and Singular Potential for Incompressible Fluids with Different Densities. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **38**, 647-687. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2020.08.005

[19] Guan, Z., Lowengrub, J.S., Wang, C. and Wise, S.M. (2014) Second Order Convex Splitting Schemes for Periodic Nonlocal Cahn-Hilliard and Allen-Cahn Equations. *Journal of Computational Physics*, **277**, 48-71. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.08.001

[20] Du, Q., Ju, L., Li, X. and Qiao, Z. (2018) Stabilized Linear Semi-Implicit Schemes for the Nonlocal Cahn-Hilliard Equation. *Journal of Computational Physics*, **363**, 39-54. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.02.023

[21] Yang, X. and Zhao, J. (2019) Efficient Linear Schemes for the Nonlocal Cahn-Hilliard Equation of Phase Field Models. *Computer Physics Communications*, **235**, 234-245. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2018.08.012

[22] Liu, Z. and Li, X. (2020) The Fast Scalar Auxiliary Variable Approach with Unconditional Energy Stability for Nonlocal Cahn-Hilliard Equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **37**, 244-261. https://doi.org/10.1002/num.22527

[23] Zeng, S., Xie, Z., Yang, X. and Wang, J. (2023) Fully Discrete, Decoupled and Energy-Stable Fourier-Spectral Numerical Scheme for the Nonlocal Cahn-Hilliard Equation Coupled with Navier-Stokes/Darcy Flow Regime of Two-Phase Incompressible Flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **415**, Article ID: 116289. https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116289

[24] Biswas, T., Dharmatti, S. and Mohan, M.T. (2020) Maximum Principle for Some Optimal Control Problems Governed by 2D Nonlocal Cahn-Hillard-Navier-Stokes Equations. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **22**, 34-42. https://doi.org/10.1007/s00021-020-00493-8

[25] Frigeri, S., Grasselli, M. and Sprekels, J. (2018) Optimal Distributed Control of Two-Dimensional Nonlocal Cahn-Hilliard-Navier-Stokes Systems with Degenerate Mobility and Singular Potential. *Applied Mathematics & Optimization*, **81**, 899-931. https://doi.org/10.1007/s00245-018-9524-7

[26] Robinson, J.C. (2001) Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors. Cambridge University Press, 151-156.

[27] Brezis, H. (2011) Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, 55-141.