Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(2), 228-243
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.142066

变分不等式与不动点问题的非单调步长惯性投影算法

杨　志*，**王仕伟**，**冷震北**，**匡　艳**

重庆对外经贸学院数学与计算机学院，重庆

收稿日期：2025年1月20日；录用日期：2025年2月14日；发布日期：2025年2月21日

摘　要

文章针对实Hilbert空间中的单调变分不等式和不动点连续映射的凸可行性问题，提出了一种非单调步长算法来求解。该算法利用可行集的信息构造特殊半空间，以及结合外梯度方法构造半空间。每次向两个半空间作投影。同时结合惯性加速技巧与Mann迭代方法，在一定条件下，建立了所提算法的弱收敛性定理。最后，我们进行了一些计算测试，以证明所提算法的效率和优点，并与现有算法进行了比较。

关键词

次梯度外梯度算法，类Mann迭代方法，弱收敛，变分不等式，不动点问题

Projection Algorithms with Line Search Process for Variational Inequality and Fixed Point Problems

Zhi Yang*, **Shiwei Wang, Zhenbei Leng, Yan Kuang**

School of Mathematics and Computer Science, Chongqing College of International Business and Economics, Chongqing

Received: Jan. 20th, 2025; accepted: Feb. 14th, 2025; published: Feb. 21st, 2025

Abstract

This paper presents a new inertial subgradient extragradient algorithm designed to solve variational inequalities and fixed point problems in real Hilbert spaces. Integrating the Mann iteration method with the subgradient extragradient approach and employing inertial acceleration techniques,

*通讯作者。

文章引用：杨志，王仕伟，冷震北，匡艳．变分不等式与不动点问题的非单调步长惯性投影算法[J]．应用数学进展，2025, 14(2): 228-243. DOI: 10.12677/aam.2025.142066

the algorithm constructs a half-space using subgradient information and projects onto it. Step lengths are determined via a line search procedure, eliminating the need to compute the Lipschitz constant of the mapping. The algorithm's weak convergence is established under assumptions like the pseudo-nonexpansiveness of the mappings. Finally, Numerical experiments additionally illustrate the algorithm's advantages over existing approaches in the literature.

Keywords

Subgradient Extragradient Algorithm, Mann-Type Method, Weak Convergence, Variational Inequality, Fixed Point Problem

1. 引言

设 H 是实 Hilbert 空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 H 中的内积与范数。关于变分不等式问题：求 $u\in C$ 满足

$$\langle F(u), y-u\rangle \geq 0, \forall y\in C, \tag{1}$$

其中 $F:H\to H$ 为映射，可行集 C 是 H 中的非空闭凸子集。记问题(1)的解集为 $VI(F,C)$。变分不等式理论来源于处理力学模拟的偏微分方程。自成立以来，由于该理论在经济学、信号处理、图像处理、优化和优化控制问题等方面的广泛应用，它已成为非线性分析的一个重要领域，详见参考文献[1]-[5]。在过去的几十年里，人们对开发有效和鲁棒的数值方法来解决变分不等式问题非常感兴趣，特别是对基于投影的方法及其变体非常感兴趣[6]-[11]。

Korpelevich [12]提出了外梯度方法，即在每次迭代中需要对可行集进行两次投影计算。而次梯度外梯度方法[13]和 Tseng 的外梯度方法[14]只需要在可行集上进行一次投影。然而，当可行集结构复杂或投影难以计算时，计算在一个非空闭凸集上的投影并不容易。因此，这两种方法在实际应用中大大提高了算法的计算性能。

另一方面，不动点问题与变分不等式密切相关。即求 $x\in H$，使得 $T(x)=x$，则称点 x 为 T 的不动点。记 $Fix(T)$ 为 T 不动点解集。本文主要是求解变分不等式问题和不动点问题的一般解。近年来，许多学者研究并提出了许多有效的迭代方法来求解变分不等式问题和不动点问题的公共解，例如，见文献[14]-[18]。最近，Kraikaew 和 Saejung [19]提出了一种寻找单调变分不等式和不动点问题的公共解的算法(SEGM)，其算法的结构是：

$$\begin{cases} y_n = P_C\left(x_n - \tau F(x_n)\right), \\ z_n = \theta_n x^0 + (1-\theta_n) P_{T_n}\left(x_n - \tau F(y_n)\right), \\ T_n := \left\{x\in H : \langle x_n - \tau F(x_n) - y_n, x - y_n\rangle \leq 0\right\}, \\ x_{n+1} = \gamma_n x_n + (1-\gamma_n) T(z_n), \end{cases}$$

其中 P_C 代表 H 在 C 上的度量投影，$F:H\to H$ 为单调 L-Lipschitz 连续映射，步长 $\tau\in\left(0,\frac{1}{L}\right)$ 的常数，$T:H\to H$ 是拟扩张映射。适当的条件下，证明了该算法迭代序列 $\{x_n\}$ 的强收敛性。然而，该算法需要知道 Lipschitz 常数，从而限制一些相关算法的使用。为了克服这一困难，人们提出了大量的算法，通过一

定的自适应标准来更新步长，例如，参见[20]-[22]。最近，Thong 和 Hieu [23]等提出如下算法(ISEGM)：

$$\begin{cases} y_n = P_C\left(s_n - \tau_n F\left(s_n\right)\right), \\ z_n = P_{T_n}\left(s_n - \tau_n F\left(y_n\right)\right), \\ x_{n+1} = \left(1-\gamma_n\right)\left(s_n\right) + \gamma_n T\left(z_n\right), \end{cases}$$

其中 $T, F: H \to H$ 的映射，$s_n = x_n + \alpha_n\left(x_n - x_{n-1}\right)$，$T_n := \left\{x \in H : \left\langle x_n - \tau_n F\left(s_n\right) - y_n, x - y_n\right\rangle \le 0\right\}$。步长 τ_n 将在每次迭代中自动更新，通过选择满足 $\tau\left\|F\left(s_n\right) - F\left(y_n\right)\right\| \le \mu\left\|s_n - y_n\right\|$ 的最大 $\tau \in \left\{\rho, \rho l, \rho l^2, \cdots\right\}$。算法 ISEGM 在映射是单调且 L-Lipschitz 连续时，生成的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $Fix(T) \cap VI(F, C)$，该算法利用线搜索过程选取步长，无需计算 Lipschitz 常数。最近，Tan 和 Fan [18]等提出如下算法(MTEA)：

$$\begin{cases} s_n = x_n + \delta_n\left(x_n - x_{n-1}\right), \\ y_n = P_C\left(s_n - \tau_n F\left(s_n\right)\right), \\ z_n = P_{T_n}\left(s_n - \tau_n F\left(y_n\right)\right), \\ T_n := \left\{x \in H : \left\langle x_n - \tau_n F\left(s_n\right) - y_n, x - y_n\right\rangle \le 0\right\}, \\ x_{n+1} = \left(1-\gamma_n\right)\left(\lambda_n z_n\right) + \gamma_n T\left(z_n\right), \end{cases}$$

其中 $T, F: H \to H$ 的映射，步长 τ_n 自动更新满足

$$\tau_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{\theta\left\|s_n - y_n\right\|}{\left\|F\left(s_n\right) - F\left(y_n\right)\right\|}, \tau_n + \zeta_n\right\}, & F\left(s_n\right) \ne F\left(y_n\right) \\ \tau_n + \zeta_n & \text{，其他} \end{cases}$$

算法 MTEA 在映射 F 是单调且 L-Lipschitz 连续时，生成的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $Fix(T) \cap VI(F, C)$。通过以上结构得到了的步长有 $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$。

当问题(1)的可行集为 $C = \left\{x \in H : c(x) \le 0\right\}$ 时，其中 $c: H \to R$ 是一个凸函数。He 和 Wu [24]提出了一种新算法，其算法的结构如下：

$$\begin{cases} y_n = P_{C_n}\left(x_n - \tau_n F\left(x_n\right)\right), \\ C_n := \left\{x \in H : c\left(x_n\right) + \left\langle c'\left(x_n\right), x - x_n\right\rangle \le 0\right\}, \\ x_{n+1} = P_{T_n}\left(x_n - \tau_n F\left(y_n\right)\right), \\ T_n := \left\{x \in H : \left\langle x_n - \tau_n F\left(x_n\right) - y_n, x - y_n\right\rangle \le 0\right\}, \end{cases} \tag{2}$$

其中步长 λ_n 由以下线搜索得到，即 $\lambda_n = \sigma\rho^{m_n}, \sigma > 0, \rho \in (0,1)$，在适当的假设下，得到了算法生成的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于问题(1)的一个解。可以看到，该算法不再直接计算可行集上的投影，而是以函数次梯度信息构造超平面，从而替代可行集上的投影。

近年来，许多研究者采用了快速迭代算法，如次梯度算法、惯性加速算法和 Mann 迭代算法等。在文献[18] [24]的基础上，本文提出了非单调步长的惯性外梯度次梯度投影算法，算法在不预先知道映射的利普希茨常数的情况下运行，每次迭代中使用一个新的非单调步长，从而实现了算法的简便性。同时证明了该算法在 Hilbert 空间中的弱收敛性。数值实验表明，相较于文献[18] [24]中的算法，本文提出的算法更为有效。

2. 预备知识

在本文中，总是假设 H 表示一个希尔伯特空间，C 表示 H 的非空凸闭子集。序列 $\{x_n\}$ 强收敛与弱

收敛分别记为$x_n \to x$、$x_n \rightharpoonup x$。记变分不等式问题与不等点问题的解集分别为$VI(F,C)$、$Fix(T)$。其公共解集为$Fix(T)\cap VI(F,C)$。本文假设问题(1)的可行集具有下列结构：

$$C=\{x\in H:c(x)\le 0\},\tag{3}$$

其中$c:H\to R$是一个凸函数。$x\in C$处的法锥$N_C(x)$定义为$N_C(x):=\{\varsigma\in H:\langle\varsigma,z-x\rangle,\forall z\in C\}$。对任意的$x,y\in H$和$\alpha$为实数，以下几种基本的不等式成立：

1) $\|x+y\|^2\le\|x\|^2+2\langle y,x+y\rangle$；

2) $\|\alpha x+(1-\alpha)y\|^2=\alpha\|x\|^2+(1-\alpha)\|y\|^2-\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2$。

目前已知，投影P_C具有以下基本性质：

3) $\langle x-P_C(x),y-P_C(x)\rangle\le 0$，$\forall y\in C$；

4) $\|P_C(x)-P_C(y)\|^2\le\langle P_C(x)-P_C(y),x-y\rangle$，$\forall y\in H$。

定义 2.1 设$F:H\to R$为凸函数。若F在$x\in H$处次可微的，那么

$$\partial F(x)=\{\xi\in H:F(y)\ge F(x)+\langle\xi,x-y\rangle,\forall y\in H\}$$

定义 2.2 函数$F:H\to R$在$x\in H$处称为Gateaux可微的，若存在$F'(x)\in H$满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x+t\mu)-F(x)}{t}=\langle\mu,F(x)\rangle,\forall\mu\in H,$$

其中$F'(x)$称为F在x处的Gateaux微分。称F在H上是Gateaux可微的，如果任意$x\in H$，则F在x上是Gateaux可微的。

定义 2.3 对任意的$x,y\in H$、$z\in Fix(F)$数，映射$F:H\to H$为

1) 单调映射，则有

$$\langle F(x)-F(x),x-y\rangle\ge 0$$

2) L-Lipschitz是连续的，若$L>0$且

$$\|F(x)-F(y)\|\le L\|x-y\|$$

3) 拟非扩张映射，如果

$$\|F(x)-z\|\le\|x-z\|$$

4) η-半压缩映射$\eta\in[0,1)$，若

$$\|F(x)-z\|^2\le\|x-z\|^2+\eta\|(I-F)x\|^2\tag{4}$$

或者等价于

$$\langle F(x)-x,x-z\rangle\le\frac{\eta-1}{2}\|F(x)-x\|^2\tag{5}$$

或者等价于

$$\langle F(x)-z,x-z\rangle\le\|x-z\|^2+\frac{\eta-1}{2}\|F(x)-x\|^2\tag{6}$$

定义 2.4 若$f:H\to(-\infty,+\infty]$且$x\in H$，序列$\{x_n\}\in H$，若$x_n\rightharpoonup x$有

$$f(x)\le\liminf_{x\to\infty}f(x_n)$$

则称 f 在 x 处是弱下半连续的。若 f 在 $\forall x \in H$ 都是弱下半连续，则称 f 在 H 上是弱下半连续的。

定义 2.5 设 $G: H \to 2^H$ 是 H 上的集值映射，若 G 是极大单调算子的充要条件为：

1) G 是单调算子，满足 $\langle \upsilon - v, x - y \rangle \ge 0,\ \forall \upsilon \in G(x), v \in G(y)$；

2) 任意单调算子的图像不包含 G 的图像 $graG := \{(x,\upsilon) \in H \times H : \upsilon \in G(x)\}$。

定义 2.6 设 $T: H \to H$ 是一个非线性算子且 $Fix(T) \ne \varnothing$，若对任意的序列 $\{x_n\} \in H$ 有以下关系成立：

$$x_n \rightharpoonup x \text{且} (I - T)x_n \to 0 \Rightarrow x \in Fix(T)$$

则称 $I - T$ 在 0 点处是半闭的。

基于以上的定义，下面的引理对于证明本文主要结果的收敛性是至关重要的。

引理 2.1 [25]若 $x \in H$，对任意 $\{x_n\} \subset H$ 且 $x_n \rightharpoonup x$，则有

$$\liminf_{x\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{x\to\infty} \|x_n - y\|, \forall x \ne y$$

引理 2.2 [26]假设解集 $VI(F,C)$ 非空且，C 是由式(3)定义，则 $u \in VI(F,C)$ 当且仅当以下条件中的一个成立：

1) $F(u) = 0$；

2) $u \in \partial C$ 且存在一个正常数 λ 满足 $F(u) = -\lambda c'(u)$。

引理 2.3 [27]设 $F: H \to H$ 是 Lipschitz 连续单调算子，定义

$$G(x) := \begin{cases} F(x) + N_C(x), & x \in C; \\ \varnothing, & x \notin C. \end{cases}$$

则 G 是极大单调算子。$0 \in G(x)$ 当且仅当 $x \in SOL(F,C)$。

引理 2.4 [28]假设 $\{a_n\},\{b_n\},\{d_n\}$ 是 $[0,+\infty)$ 数列满足：

$$a_{n+1} \le d_n(a_n - a_{n-1}) + b_n, \forall n \ge 1, \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$$

且对 $\forall n \ge 1$ 存在实数 d 使得 $0 \le d_n \le d < 1$，则下列结论成立：

1) $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - a_{n-1}]_+ < +\infty$，其中 $[m]_+ := \max\{m, 0\}$；

2) 存在 $a^* \in [0,+\infty)$ 使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = a^*$。

引理 2.5 [29] (Opail)假设 $C \subset H$ 是非空闭子集，若序列 $\{x_n\} \in H$ 满足：

1) 对于 $\forall x \in C, \lim_{x\to\infty} \|x_n - x\|$ 存在；

2) 序列 $\{x_n\}$ 任意弱聚点属于 C 中。

则 $\{x_n\}$ 弱收敛于 C 中的一个点。

3. 非单调步长梯度外梯度算法

在本节中，提出了一种惯次梯度外梯度方法来解决变分不等式问题和不动点问题，并分析了它们的收敛性。特别地，增加了一个惯性项和一个新的非单调步长，使算法具有更快的收敛速度，并且不需要事先知道 Lipschitz 常数的先验信息。首先，假设提出的算法 1 满足随后的一个条件：

(C1) 映射 $F: H \to H$ 是单调 L-Lipschitz 连续的；

(C2) 映射 $T: H \to H$ 是 η-半压缩映射且 $(I - T)$ 在 0 点是半闭的；

(C3) 解集非空，即 $Fix(T) \cap VI(F,C) \ne \varnothing$；

(C4) 可行集 $C = \{x \in H : c(x) \le 0\}$，其中 $c: H \to R$ 是一个连续的可微凸函数，且 $c'(x)$ 是 L_1-Lipschitz

连续的，其系数 $L_1>0$。存在 $L_2>0$ 使得 $\|F(x)\|\le L_2\|c'(x)\|,\forall x\in\partial C$，其中 ∂C 表示 C 的边界；

(C5) 假设 $\{\zeta_n\}$ 是非负序列且满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n<+\infty$。记 $\lim_{n\to\infty}\tau_n=\tau$，且 $Q<\frac{1-\theta}{2\tau}$ （Q 见下文)成立。假设正序列 $\{\gamma_n\}$ 满足 $\gamma_n\in(a,b)\subset(0,(1-\eta)(1-\alpha_n))$, $a>0,b>0$。假设非负序列 $\{\delta_n\}$ 满足 $0\le\delta_n\le\delta<\frac{1}{3}$。

本文算法结构如下：

算法 1

初始化：设任意 $x_0,x_1\in H$ 与参数 $\tau_1>0,\theta\in(0,1),\delta_n\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$，设 $n=1$。

步骤 1：设 $s_n=x_n+\delta_n(x_n-x_{n-1})$，计算

$$y_n=P_{C_n}(s_n-\tau_nF(s_n)),$$

其中 $C_n=\left\{x\in H:c(s_n)+\langle c'(s_n),x-s_n\rangle\le 0\right\}$。

步骤 2：计算

$$z_n=P_{T_n}(s_n-\tau_nF(y_n)),$$

其中 $T_n=\left\{x\in H:\langle s_n-\tau_nF(s_n)-y_n,x-y_n\rangle\le 0\right\}$。

步骤 3：计算 $x_{n+1}=(1-\gamma_n)z_n+\gamma_nT(z_n)$, 并且步长 τ_{n+1} 更新如下：

$$\tau_{n+1}=\begin{cases}\min\left\{\dfrac{\theta\|s_n-y_n\|}{\|F(s_n)-F(y_n)\|},\tau_n+\zeta_n\right\}, & F(s_n)\ne F(y_n)\\ \tau_n+\zeta_n, & \text{其他}\end{cases}\tag{7}$$

如果 $s_n=y_n=x_{n+1}=z_n$ 停止，否则，进入步骤 4。

步骤 4：令 $n:=n+1$ 返回步骤 1。

注 1：在算法 1 中：1) $C\subseteq C_n,\forall n\ge 1$。对任意的 $x\in C$，由次梯度的定义有 $c(s_n)+\langle c'(s_n),x-s_n\rangle\le c(x)\le 0$。因此，$x\in C_n$，从而有 $C\subseteq C_n$。2) $C\subseteq T_n,\forall n\ge 1$。事实上，假设存在 $z\in C_n\setminus T_n$，则有 $\langle S_n-\tau_nF(s_n)-y_n,z-y_n\rangle>0$ 与 $y_n=P_{C_n}(s_n-\tau_nF(s_n))$ 矛盾。因此 $C_n\subseteq T_n$。

3.1. 收敛性分析

引理 3.1 若假设条件(C1)成立。则由式(7)生成的序列 $\{\tau_n\}$ 是良性的，并且 $\lim_{n\to\infty}\tau_n=\tau$ 以及 $\tau\in[\min\left\{\frac{\theta}{L},\tau_1\right\},\tau_1+\phi]$，其中 $\phi=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n$。

证明：因为映射 F 单调 L-Lipschitz 连续的，即有

$$\frac{\theta\|s_n-y_n\|}{\|F(s_n)-F(y_n)\|}\ge\frac{\theta\|s_n-y_n\|}{L\|s_n-y_n\|}=\frac{\theta}{L},\ F(s_n)\ne F(y_n)$$

因此，$\tau_n\ge\min\left\{\frac{\theta}{L},\tau_1\right\}$，由 τ_{n+1} 的定义有 $\tau_{n+1}\le\tau_1+\phi$。所以，由式(7)定义的序列 $\{\tau_n\}$ 是有界的并且有 $\tau_n\in\left[\min\left\{\frac{\theta}{L},\tau_1\right\},\tau_1+\phi\right]$。记 $(\tau_{n+1}-\tau_n)^+:=\max\{0,\tau_{n+1}-\tau_n\}$ 与 $(\tau_{n+1}-\tau_n)^-:=\max\{0,-(\tau_{n+1}-\tau_n)\}$。通过 $\{\tau_n\}$ 的

定义，可得 $\sum_{n=1}^{\infty}(\tau_{n+1}-\tau_n)^+ \le \sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n < +\infty$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(\tau_{n+1}-\tau_n)^+$ 收敛。下面验证 $\sum_{n=1}^{\infty}(\tau_{n+1}-\tau_n)^-$ 的收敛性。假设 $\sum_{n=1}^{\infty}(\tau_{n+1}-\tau_n)^- = +\infty$，因为

$$\tau_{k+1}-\tau_1=\sum_{n=1}^{k}(\tau_{n+1}-\tau_n)=\sum_{n=1}^{k}(\tau_{n+1}-\tau_n)^+-\sum_{n=1}^{k}(\tau_{n+1}-\tau_n)^-$$

对上式取 $k\to+\infty$，则有 $\lim_{k\to\infty}\tau_k\to-\infty$，这与假设矛盾。因此，有 $\lim_{n\to\infty}\tau_n=\tau$ 与 $\tau\in\left[\min\left\{\frac{\theta}{L},\tau_1\right\},\tau_1+\phi\right]$ 成立。

注 2：值得注意的是，随着迭代次数的增加，算法 1 中生成的步长 τ_n 可以增加。因此，使用这种类型的步长减少了对初始步长 τ_1 的依赖。

定理 3.1 如果算法 1 中 $s_n=y_n=x_{n+1}=z_n$ 成立，则有 $s_n\in FixT\cap VI(F,C)$。

证明 因为 $s_n=y_n$，于是 $s_n=P_{C_n}(s_n-\tau_nF(s_n))$，从而 $s_n\in C_n$。由 C_n 的定义可得

$$c(s_n)=c(s_n)+\langle c'(s_n),s_n-s_n\rangle\le 0$$

因此 $s_n\in C$。

下面证明 $s_n\in VI(F,C)$，由 $s_n=P_{C_n}(s_n-\tau_nF(s_n))$ 可得

$$\langle s_n-\tau_nF(s_n)-s_n,y-s_n\rangle\le 0,\ \forall y\in C_n$$

因此有

$$\tau_n\langle F(s_n),y-s_n\rangle\ge 0,\ \forall y\in C_n$$

又根据注 1 可知 $C\subseteq C_n$，且 $\tau_n>0$，故有

$$\langle F(s_n),y-s_n\rangle\ge 0,\ \forall y\in C_n$$

所以 $s_n\in VI(F,C)$。因为 $s_n=x_{n+1}=z_n$，则有 $s_n=(1-\beta_n)s_n+\beta_nT(s_n)$，因此 $T(s_n)=s_n$，即 $s_n\in Fix(T)$，所以 $s_n\in Fix(T)\cap VI(F,C)$。

引理 3.2 假设(C1)~(C5)成立。令 $\{z_n\}$ 是由算法 1 生成的序列，对任意 $u\in VI(F,C)$ 有下列不等式成立：

$$\|z_n-u\|^2\le\|s_n-u\|^2-\left(1-\theta\frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\right)\|y_n-z_n\|^2 \tag{8}$$

证明：因为 $u\in VI(F,C)\subseteq C\subseteq T_n$，由投影基本性质及 x_{n+1} 的定义有

$$\begin{aligned}2\|z_n-u\|^2&=2\|P_{H_n}(s_n-\tau_nF(y_n))-P_{H_n}(u)\|^2\\&\le 2\langle z_n-u,s_n-\tau_nF(y_n)-u\rangle\\&=\|z_n-u\|^2+\|s_n-\tau_nF(y_n)-u\|^2-\|z_n-s_n+\tau_nF(y_n)\|^2\\&=\|z_n-u\|^2+\|s_n-u\|^2+\tau_n^2\|F(y_n)\|^2-2\langle\tau_nF(y_n),s_n-u\rangle\\&\quad-\|z_n-s_n\|^2-\tau_n^2\|F(y_n)\|^2-2\langle z_n-s_n,\tau_nF(y_n)\rangle\\&=\|z_n-u\|^2+\|s_n-y_n\|^2-\|z_n-s_n\|^2-2\langle z_n-u,\tau_nF(y_n)\rangle.\end{aligned} \tag{9}$$

于是有

$$\|z_n-u\|^2\le\|s_n-y_n\|^2-\|z_n-s_n\|^2-2\langle z_n-u,\tau_nF(y_n)\rangle. \tag{10}$$

因为$u\in VI(F,C)$，所以$\langle F(u),y_n-u\rangle\ge0$。另外，因为$F$单调映射，则有$2\tau_n\langle F(y_n)-F(u),y_n-u\rangle\ge0$，于是将此项目添加到(10)的右侧

$$\begin{aligned}\|z_n-u\|^2&\le\|s_n-u\|^2-\|z_n-s_n\|^2-2\langle z_n-u,\tau_nF(y_n)\rangle\\&\quad+2\tau_n\langle y_n-u,F(y_n)-F(u)\rangle\\&=\|s_n-u\|^2-\|z_n-s_n\|^2+2\langle y_n-z_n,\tau_nF(y_n)\rangle\\&\quad-2\tau_n\langle F(u),y_n-u\rangle\\&=\|s_n-u\|^2-\|z_n-s_n\|^2+2\tau_n\langle y_n-z_n,F(y_n)-F(s_n)\rangle\\&\quad+2\tau_n\langle F(s_n),y_n-z_n\rangle+2\tau_n\langle F(u),u-y_n\rangle\end{aligned} \tag{11}$$

注意到

$$\begin{aligned}&2\tau_n\langle F(y_n)-F(s_n),y_n-z_n\rangle\\&\le2\tau_n\|F(y_n)-F(s_n)\|\|y_n-z_n\|\le2\theta\frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\|y_n-s_n\|\|y_n-z_n\|\\&\le\theta\frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\|y_n-s_n\|^2+\theta\frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\|y_n-z_n\|^2.\end{aligned} \tag{12}$$

下面估计$2\tau_n\langle F(s_n),y_n-z_n\rangle$。因为有$z_n=P_{H_n}(s_n-\tau_nF(y_n)),\ z_n\in H_n$，

$$\langle s_n-\tau_nF(s_n)-y_n,z_n-y_n\rangle\le0 \tag{13}$$

所以有

$$\begin{aligned}2\tau_n\langle F(s_n),y_n-z_n\rangle&\le2\langle y_n-s_n,z_n-y_n\rangle\\&=\|z_n-s_n\|^2-\|y_n-s_n\|^2-\|z_n-y_n\|^2。\end{aligned} \tag{14}$$

结合式(11)、(12)与(14)有

$$\|z_n-u\|^2\le\|s_n-u\|^2-\left(1-\theta\frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\right)\|y_n-s_n\|^2-\left(1-\theta\frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\right)\|y_n-z_n\|^2+2\tau_n\langle F(u),u-y_n\rangle \tag{15}$$

若$F(u)\ne0$，引理2.2有$F(u)=-\lambda_uc'(u)$，$u\in\partial C$成立，从而$c(u)=0$。因为$c(x)$为凸函数，于是$c(y_n)\ge c(u)+\langle c'(u),y_n-u\rangle=-\frac{1}{\lambda_u}\langle F(u),y_n-u\rangle$。

因此有

$$\langle F(u),u-y_n\rangle\le\lambda_uc(y_n) \tag{16}$$

由C_n的定义与$y_n\in C_n$可得

$$c(s_n)+\langle c'(s_n),y_n-s_n\rangle\le0$$

另外，由次微分定义有

$$\langle c'(y_n),s_n-y_n\rangle+c(y_n)\le c(s_n)$$

通过以上两个不等式有

$$c(y_n) \le \langle c'(s_n) - c'(y_n), s_n - y_n \rangle \tag{17}$$

从而由假设(C4)与式(16)、(17)可知

$$\begin{aligned} \langle F(u), u - y_n \rangle &\le \lambda_u c(y_n) \le \lambda_u \langle c'(s_n) - c'(y_n), s_n - y_n \rangle \\ &\le \lambda_u \| c'(s_n) - c'(y_n) \| \| s_n - y_n \| \\ &\le \lambda_u L_1 \| s_n - y_n \|^2 . \end{aligned}$$

由引理 2.2 与假设(C4)有，则上式可为

$$\langle F(u), u - y_n \rangle \le \lambda_u L_1 \| \omega_n - y_n \|^2 \le Q \| s_n - y_n \|^2 \tag{18}$$

记 $Q = L_1 L_2 > 0$ 。因为假设(C5)成立，即 $0 < Q < \frac{1-\theta}{2\tau}$ ，结合式(15)、(18)与引理 3.1 有

$$\begin{aligned} \| z_n - u \|^2 &\le \| s_n - u \|^2 - \left(1 - \theta \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\right) \| y_n - z_n \|^2 - \left(1 - \theta \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}} - 2M\tau_n\right) \| y_n - s_n \|^2 \\ &\le \| s_n - u \|^2 - \left(1 - \theta \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\right) \| y_n - z_n \|^2 . \end{aligned} \tag{19}$$

如果 $F(u) = 0$ ，由式(15)知

$$\| z_n - u \|^2 \le \| s_n - u \|^2 - \left(1 - \theta \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\right) \| y_n - z_n \|^2 。$$

综上引理 3.2 成立。

定理 3.2 若假设条件(C1)~(C6)成立。则算法 1 生成的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $Fix(T) \cap VI(F, C)$ 。

证明 通过引理 3.2 可知 $\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \theta \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\right) = 1 - \theta > 0$，即存在 $n_0 \in N$ 使得 $\left(1 - \theta \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\right) > 0, \forall n \ge n_0$，因此由引理 3.2 可得

$$\| z_n - u \| \le \| s_n - u \|, \ \forall n \ge n_0 \tag{20}$$

接下来，将证明分成四个部分。

情形 1. 序列 $\{x_n\}$ 是有界的。通过式(4)与(6)以及 $x_{n+1} = (1-\gamma_n) z_n + \gamma_n T(z_n)$ 可知

$$\begin{aligned} \| x_{n+1} - u \|^2 &= \| (1-\gamma_n)(z_n - u) + \gamma_n (T(z_n) - u) \|^2 \\ &= (1-\gamma_n)^2 \| z_n - u \|^2 + \gamma_n^2 \| T(z_n) - u \|^2 \\ &\quad + 2(1-\gamma_n)\gamma_n \langle z_n - u, T(z_n) - u \rangle \\ &\le (1-\gamma_n)^2 \| z_n - u \|^2 + \gamma_n^2 \| z_n - u \|^2 + \eta \gamma_n^2 \| T(z_n) - z_n \|^2 \\ &\quad + 2(1-\gamma_n)\gamma_n \left[\| z_n - u \|^2 - \frac{1-\eta}{2} \| T(z_n) - z_n \|^2 \right] \\ &= \| z_n - u \|^2 + \gamma_n \left[\gamma_n - (1-\eta) \| T(z_n) - z_n \|^2 \right] \end{aligned} \tag{21}$$

因此，由 $\{\gamma_n\} \subset (0, 1-\eta)$ 与式(20)有

$$\| x_{n+1} - u \| \le \| z_n - u \| \le \| s_n - u \|, \ \forall n \ge n_0 \tag{22}$$

通过 s_n 的定义有

$$\begin{aligned}\|s_n-u\|^2&=\|x_n+\delta_n(x_n-x_{n-1})-u\|^2\\&=\|(1+\delta_n)(x_n-u)-\delta_n(x_{n-1}-u)\|^2\\&=(1+\delta_n)\|x_n-u\|^2-\delta_n\|x_{n-1}-u\|^2+(1+\delta_n)\delta_n\|x_n-x_{n-1}\|^2.\end{aligned}\tag{23}$$

另外有不等式

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-s_n\|^2&=\|x_{n+1}-x_n-\delta_n(x_n-x_{n-1})\|^2\\&=\|x_{n+1}-x_n\|^2+\delta_n^2\|x_n-x_{n-1}\|^2-2\delta_n\langle x_{n+1}-x_n,x_n-x_{n-1}\rangle\\&\geq\|x_{n+1}-x_n\|^2+\delta_n^2\|x_n-x_{n-1}\|^2-2\delta_n\|x_{n+1}-x_n\|\|x_n-x_{n-1}\|\\&\geq(1-\delta_n)\|x_{n+1}-x_n\|^2+(\delta_n^2-\delta_n)\|x_n-x_{n-1}\|^2.\end{aligned}\tag{24}$$

结合式(22)、(23)和(24)整理可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u\|^2&\leq(1+\delta_n)\|x_n-u\|^2-\delta_n\|x_{n-1}-u\|^2+(1+\delta_n)\delta_n\|x_n-x_{n-1}\|^2\\&\quad-(1-\delta_n)\|x_{n+1}-x_n\|^2-(\delta_n^2-\delta_n)\|x_n-x_{n-1}\|^2\\&=(1+\delta_n)\|x_n-u\|^2-\delta_n\|x_{n-1}-u\|^2-(1-\delta_n)\|x_{n+1}-x_n\|^2\\&\quad+\left[\delta_n(1+\delta_n)-(\delta_n^2-\delta_n)\right]\|x_n-x_{n-1}\|^2\\&=(1+\delta_n)\|x_n-u\|^2-\delta_n\|x_{n-1}-u\|^2-(1-\delta_n)\|x_{n+1}-x_n\|^2\\&\quad+2\delta_n\|x_n-x_{n-1}\|^2\\&\leq(1+\delta_{n+1})\|x_n-u\|^2-\delta_n\|x_{n-1}-u\|^2-(1-\delta_n)\|x_{n+1}-x_n\|^2\\&\quad+2\delta_n\|x_n-x_{n-1}\|^2,\quad\forall n\geq n_0.\end{aligned}\tag{25}$$

从而由式(25)可得

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-u\|^2-\delta_{n+1}\|x_n-u\|^2+2\delta_{n+1}\|x_{n+1}-u\|^2\\&\leq\|x_n-u\|^2-\delta_n\|x_{n-1}-u\|^2+2\delta_n\|x_n-x_{n-1}\|^2\\&\quad+2\delta_{n+1}\|x_{n+1}-x_n\|^2-(1-\delta_n)\|x_{n+1}-x_n\|^2,\quad\forall n\geq n_0.\end{aligned}\tag{26}$$

令 $\Xi_n=\|x_n-u\|^2-\delta_n\|x_{n-1}-u\|^2+2\delta_n\|x_n-x_{n-1}\|^2$，从而有

$$\Xi_{n+1}-\Xi_n\leq-(1-\delta_n-2\delta_{n+1})\|x_{n+1}-x_n\|^2\tag{27}$$

由假设(C5) $\delta_n\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$，于是 $1-\delta_n-2\delta_{n+1}>0$，即有

$$\Xi_{n+1}-\Xi_n\leq-\sigma\|x_{n+1}-x_n\|^2\leq0\tag{28}$$

其中 $\sigma=1-3\delta>0$。从而序列 Ξ_n 是非增的，于是有

$$\begin{aligned}\Xi_n&=\|x_n-u\|^2-\delta_n\|x_{n-1}-u\|^2+2\delta_n\|x_n-x_{n-1}\|^2\\&\geq\|x_n-u\|^2-\delta_n\|x_{n-1}-u\|^2.\end{aligned}\tag{29}$$

通过式(29)可知

DOI: 10.12677/aam.2025.142066

$$\begin{aligned}\|x_n-u\|^2 &\le \delta_n\|x_{n-1}-u\|^2+\Xi_n \\ &\le \delta\|x_n-u\|^2+\Xi_1 \\ &\le \delta^2\|x_n-u\|^2+\Xi_1(1+\delta) \\ &\le \cdots \le \delta^n\|x_0-u\|^2+\Xi_1\left(1+\delta+\cdots+\delta^{n-1}\right) \\ &\le \delta^n\|x_0-u\|^2+\frac{\Xi_1}{1-\delta}.\end{aligned} \tag{30}$$

因为Ξ_{n+1}定义可知

$$\begin{aligned}\Xi_{n+1}&=\|x_{n+1}-u\|^2-\delta_{n+1}\|x_n-u\|^2+2\delta_{n+1}\|x_{n+1}-x_n\|^2 \\ &\ge -\delta_{n+1}\|x_n-u\|^2.\end{aligned} \tag{31}$$

整理式(30)与(31)得

$$-\Xi_{n+1}\le \delta_{n+1}\|x_n-u\|^2\le \delta\|x_n-u\|^2\le \delta^{n+1}\|x_0-u\|^2+\frac{\delta\,\Xi_1}{1-\delta}$$

结合上述不等式与式(28)有

$$\begin{aligned}\sigma\sum_{n=1}^{k}\|x_{n+1}-x_n\|^2 &\le \Xi_1-\Xi_{k+1} \\ &\le \delta^{k+1}\|x_0-u\|^2+\frac{\Xi_1}{1-\delta}\ \le \|x_0-u\|^2+\frac{\Xi_1}{1-\delta}.\end{aligned} \tag{32}$$

因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_{n+1}-x_n\|^2<+\infty \tag{33}$$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|^2=0$，由此可知$\lim\limits_{x\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$。

因为δ_n有界，通过式(25)有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u\|^2 &\le (1+\delta_n)\|x_n-u\|^2-\delta_n\|x_{n-1}-u\|^2+2\delta_n\|x_n-x_{n-1}\|^2 \\ &=\|x_n-u\|^2+\delta_n\left(\|x_n-u\|^2-\|x_{n-1}-u\|^2\right)+2\delta_n\|x_n-x_{n-1}\|^2.\end{aligned} \tag{34}$$

由引理 2.5 与式(33)知$\lim\limits_{x\to\infty}\|x_n-u\|^2$存在，因此$\lim\limits_{x\to\infty}\|x_n-u\|$存在，进而序列$\{x_n\}$是有界。

情形 2. 序列存在且$\lim\limits_{x\to\infty}\|y_n-z_n\|=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\|s_n-y_n\|=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\|T(z_n)-z_n\|=0$。

由情形 1 的过程知$\lim\limits_{x\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$，通过$s_n$的定义

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-s_n\|&=\|x_{n+1}-x_n-\delta_n(x_n-x_{n-1})\| \\ &\le \|x_{n+1}-x_n\|+\delta_n\|x_n-x_{n-1}\| \\ &\le \|x_{n+1}-x_n\|+\delta\|x_n-x_{n-1}\|.\end{aligned} \tag{35}$$

由式(35)知当$n\to\infty$时，$\lim\limits_{x\to\infty}\|x_{n+1}-s_n\|=0$。又因$\lim\limits_{x\to\infty}\|x_n-u\|^2$存在，所以取$n\to\infty$。由式(23)有

$$\lim_{x\to\infty}\|x_n-u\|^2=\lim_{x\to\infty}\|s_n-u\|^2 \tag{36}$$

另外取$n\to\infty$时，由式(22)结合式(36)有

$$\lim_{x\to\infty}\|x_n-u\|^2=\lim_{x\to\infty}\|z_n-u\|^2=\lim_{x\to\infty}\|s_n-u\|^2 \tag{37}$$

对式(8)取 $n\to\infty$ 时有 $\lim_{x\to\infty}\|z_n-y_n\|^2=0$，因此有

$$\lim_{x\to\infty}\|z_n-y_n\|=0 \tag{38}$$

通过式(19)可得

$$\|z_n-u\|^2\le\|s_n-u\|^2-\left(1-\theta\frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}\right)\|y_n-z_n\|^2-\left(1-\theta\frac{\tau_n}{\tau_{n+1}}-2M\tau_n\right)\|y_n-s_n\|^2$$

即 $n\to\infty$ 时，结合式(37)、(38)以及假设(C5)推出

$$\lim_{x\to\infty}\|s_n-y_n\|=0 \tag{39}$$

当 $n\to\infty$ 时，由引理 3.1 与式(21)有

$$\lim_{x\to\infty}\|T(z_n)-z_n\|=0 \tag{40}$$

情形 3. 序列 $\{x_n\}$ 的弱聚点属于 $Fix(S)$。因为 δ_n 有界以及情形 1 知 $\lim_{x\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$，并且由 s_n 的定义有

$$\|x_n-s_n\|=\delta_n\|x_n-x_{n-1}\|\to 0 \tag{41}$$

此外，情形 2 结论，得出 $\lim_{x\to\infty}\|z_n-s_n\|=0$，因此

$$\lim_{x\to\infty}\|z_n-s_n\|=0 \tag{42}$$

由情形 1 知 $\{x_n\}$ 是有界的序列，假设存在子列 $\{x_{n_j}\}\subset\{x_n\}$ 使得 $x_{n_j}\rightharpoonup p$。即有，

$$\limsup_{x\to\infty}\langle u,u-x_n\rangle=\lim_{x\to\infty}\langle u,u-x_{n_j}\rangle=\langle u,u-p\rangle$$

通过式(41)可以得到 $s_{n_j}\rightharpoonup p$。同理由式(42)有 $z_{n_j}\rightharpoonup p$，结合 $\lim_{x\to\infty}\|Tz_n-z_n\|=0$，所以 $p\in Fix(T)$。

情形 4. 序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $VI(F,C)$。因为情形 3 与式(39)知 $s_{n_j}\rightharpoonup p$，则有 $y_{n_j}\rightharpoonup p$。由半空间 C_{n_j} 定义与 $y_{n_j}\in C_{n_j}$ 可得

$$c(s_{n_j})+\langle c'(s_{n_j}),y_{n_k}-s_{n_j}\rangle\le 0$$

因为 $\{x_n\}$ 有界，所以由式(41)可得 $\{s_n\}$ 是有界，并且由于 $c'(s_n)$ 是 Lipschitz 连续的，从而知存在 $M>0$ 满足 $\|c'(s_n)\|\le M$。因此由以上不等式可得

$$c(s_{n_j})\le+\|c'(s_{n_j})\|\|y_{n_j}-s_{n_j}\|\le M\|y_{n_j}-s_{n_j}\| \tag{43}$$

由假设(C4)知 $c(x)$ 弱下半连续。结合式(43)、$s_{n_j}\rightharpoonup p$ 和 $\lim_{x\to\infty}\|s_{n_j}-y_{n_j}\|=0$，由定义 2.4 有

$$c(p)\le\liminf_{x\to\infty}c(s_{n_j})\le\liminf_{x\to\infty}M\|s_{n_j}-y_{n_j}\|=0$$

因此由 C 的定义知 $p\in C$。

下面证明 $p\in VI(F,C)$，令

$$G(x):=\begin{cases}F(x)+N_C(x) & x\in C;\\ \varnothing & x\notin C,\end{cases}$$

其中 $N_C(x):=\{\varepsilon\in H:\langle\varepsilon,z-x\rangle\le 0,\forall z\in C\}$。由引理 2.3 知 G 是极大单调算子，则对任意 $(x,y)\in graG$，通过定义 2.5 有

$$y\in G(x)=F(x)+N_C(x)$$

等价于

$$y-F(x)\in N_C(x)$$

由法锥 $N_C(x)$ 的定义及 $p\in C$ 可得

$$\langle y-F(x),p-x\rangle\le 0,\ (x,y)\in graG$$

整理可得

$$\langle y,x-p\rangle\ge\langle F(x),x-p\rangle,\ (x,y)\in graG \tag{44}$$

通过 T_n 的定义有

$$\left\langle s_{n_j}-\tau_{n_j}F\left(s_{n_j}\right)-y_{n_j},x-y_{n_j}\right\rangle\le 0$$

因为 $\tau_{n_j}>0$，因此

$$\left\langle \frac{s_{n_j}-y_{n_j}}{\tau_{n_j}}-F\left(s_{n_j}\right),x-y_{n_j}\right\rangle\le 0 \tag{45}$$

结合式(44)与(45)可得

$$\begin{aligned}\langle y,x-p\rangle&\ge\langle F(x),x-p\rangle+\left\langle\frac{y_{n_j}-s_{n_j}}{\tau_{n_k}}+F\left(s_{n_j}\right),y_{n_j}-x\right\rangle\\&=\left\langle F(x),x-y_{n_j}+y_{n_j}-p\right\rangle+\left\langle\frac{y_{n_j}-s_{n_j}}{\tau_{n_k}}+F\left(s_{n_j}\right),y_{n_j}-x\right\rangle\end{aligned}$$

由内积的性质有

$$\begin{aligned}&\left\langle F(x),x-y_{n_j}\right\rangle+\left\langle F(x),y_{n_j}-p\right\rangle+\left\langle F\left(s_{n_j}\right),y_{n_j}-x\right\rangle+\left\langle\frac{y_{n_j}-s_{n_j}}{\tau_{n_j}},y_{n_j}-x\right\rangle\\&=\left\langle F(x)-F\left(y_{n_j}\right),x-y_{n_j}\right\rangle+\left\langle F\left(y_{n_j}\right)-F\left(s_{n_j}\right),x-y_{n_j}\right\rangle\\&\quad+\left\langle F(x),y_{n_j}-p\right\rangle+\left\langle\frac{y_{n_j}-s_{n_j}}{\tau_{n_k}},y_{n_j}-x\right\rangle\end{aligned}$$

由 F 的单调性知

$$\langle y,x-p\rangle\ge\left\langle F(x),y_{n_j}-p\right\rangle+\left\langle F\left(y_{n_j}\right)-F\left(s_{n_j}\right),x-y_{n_j}\right\rangle+\left\langle\frac{y_{n_j}-s_{n_j}}{\tau_{n_j}},y_{n_j}-x\right\rangle \tag{46}$$

因此有

$$\begin{aligned}\langle y,x-p\rangle&\ge\left\langle F(x),y_{n_j}-p\right\rangle+\left\langle F\left(y_{n_j}\right)-F\left(s_{n_j}\right),x-y_{n_k}\right\rangle\\&\quad+\frac{1}{\tau_{n_k}}\left\langle y_{n_j}-s_{n_j},y_{n_j}-x\right\rangle。\end{aligned} \tag{47}$$

由情形 3 过程有 $s_{n_j} \rightharpoonup p$， $y_{n_j} \rightharpoonup p$，从而有

$$\left\langle y_{n_j} - s_{n_j}, y_{n_j} - x \right\rangle \to 0,\ j \to \infty \tag{48}$$

因为 F 是 Lipschitz 连续，并且 $y_{n_j} \rightharpoonup p$， $x_{n_j} \rightharpoonup p$，于是有

$$\left\langle F\left(y_{n_j}\right) - F\left(x_{n_j}\right), x - y_{n_j} \right\rangle \to 0,\ j \to \infty \tag{49}$$

又因 $y_{n_j} \rightharpoonup p$，所以

$$\left\langle F(x), y_{n_j} - p \right\rangle \to 0,\ j \to \infty \tag{50}$$

通过式(48)-(50)，当 $j \to \infty$ 时，由式(47)可得

$$\langle y, x - p \rangle \ge 0,\ \forall (x, y) \in graG$$

因为 G 为极大单调算子，所以 $0 \in G(p)$，从而 $p \in G^{-1}(0) = VI(F, C)$。设序列 $\{x_n\}$ 存在子序列 $\left\{x_{n_j}\right\}$ 和 $\left\{x_{m_j}\right\}$ 使得 $x_{n_j} \rightharpoonup p$， $x_{m_j} \rightharpoonup q$ $\left(p, q \in VI(F, C)\right)$。任意给定 $p \in VI(F, C)$，由情形 1 知 $\lim\limits_{x\to\infty}\|x_n - p\|$ 存在，结合引理 2.1 有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\|x_n - p\| &= \lim_{x\to\infty}\left\|x_{n_j} - p\right\| = \liminf_{x\to\infty}\left\|x_{n_j} - p\right\| \\
&< \liminf_{x\to\infty}\left\|x_{n_j} - q\right\| = \liminf_{x\to\infty}\left\|x_{n_j} - q\right\| \\
&= \lim_{x\to\infty}\|x_m - q\| = \lim_{x\to\infty}\left\|x_{m_j} - q\right\| \\
&< \liminf_{x\to\infty}\left\|x_{n_j} - p\right\| = \lim_{x\to\infty}\left\|x_{m_j} - p\right\| \\
&= \lim_{x\to\infty}\|x_n - p\|.
\end{aligned}$$

从而有 $\lim\limits_{x\to\infty}\|x_n - p\| < \lim\limits_{x\to\infty}\|x_n - p\|$ 不成立，故与假设矛盾，所以 $p = q$，因此 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $VI(F, C)$。综合情形 3 与情形 4 有序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $Fix(T) \cap VI(F, C)$。

3.2. 数值结果

在本节研究中，我们利用例子 3.1 展示了算法 3.1 的计算机验证结果，并且在不同的拟非扩张映射下对其进行了测试，与文献[18]和[24]中的算法进行了比较。数值实验表明，引入惯性项和适当的拟非扩张映射能显著减少算法 3.1 的计算时间。所有实验均在一台装有 AMD Ryzen7 4700U 处理器和 2.0 GB 内存的笔记本电脑上，使用 Matlab 2021 b 进行。运行时间以 CPU 秒为单位表示，迭代步骤则用 iter 表示。

例 3.1 定义 $C = \left\{x \in R_+^n : x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \le n\right\}$， $F(x) := Ax + q$，其中 A 为 $n \times n$ 矩阵，$q = (-1, -1, \cdots, -1)$，

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & & & \\ 1 & 4 & -2 & & \\ & 1 & 4 & -2 & \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

初始点： $x_0 = (0, 0, \cdots, 0)$, $x_1 = (1, 1, \cdots, 1)$。取拟非扩张映射分别为 $f(x) = \dfrac{1}{2}x$，集合 C 是非空闭凸集，F 在 C 上单调且 Lipschiz 连续在本文的算法中，选取符合条件的如下参数：$\lambda_0 = 1, \mu = 0.8, \alpha_n = 0.25, \beta_n = 0.3$。算法 3.1 与文献[18]算法(3)和[24]算法(4)的比较结果如表 1 所示。

Table 1. The numerical result for example 3.1
表 1. 例 3.1 数值结果

n	ε	算法 4 [24]		算法 3 [18]		算法 3.1	
		iter	CPU	iter	CPU	iter	CPU
5	10^{-4}	20	0.034	21	0.035	19	0.027
	10^{-5}	28	0.041	25	0.036	25	0.038
	10^{-6}	32	0.048	31	0.046	30	0.044
50	10^{-4}	45	0.076	22	0.039	30	0.041
	10^{-5}	58	0.089	29	0.043	39	0.045
	10^{-6}	71	0.109	35	0.058	48	0.055
500	10^{-4}	77	1.223	22	0.641	40	0.618
	10^{-5}	99	1.778	29	0.841	51	0.808
	10^{-6}	122	1.958	35	0.984	62	0.966

由数值实验可见，本文算法相较于文献[18] [24]有一定的优越性，收敛效果更好。比如在维度为 500 的时候，本文算法相比于文献[18]中的算法，找到解的时间明显更快。对于精度，在同一维度与精度下，本文算法仍具有一定的优越性。

4. 结论

本文提出了一种新算法，用于在可行集为凸函数时求解变分不等式与不动点问题的公共解。该算法利用拟非扩张映射和惯性加速技术，已证明具有弱收敛性。本文采用线搜索程序来更新算法的步长，无须事先知道 Lipschitz 系数，并根据类 Mann 迭代生成新的迭代点。最后，通过数值实验验证了新算法的有效性。

基金项目

资助项目 1：KYZK2024027：变分不等式与不动点问题非单调步长的惯性投影算法。
资助项目 2：KYZK2024010：图像处理中的张量离散不适定问题及其高性能迭代算法研究。
资助项目 3：KYZK2024003：变分不等式与不动点问题在 NASH 群体博弈的应用研究。

参考文献

[1] Ansari, Q.H., Islam, M. and Yao, J. (2018) Nonsmooth Variational Inequalities on Hadamard Manifolds. *Applicable Analysis*, **99**, 340-358. https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1495329

[2] Van Huy, P., Hien, N.D. and Anh, T.V. (2020) A Strongly Convergent Modified Halpern Subgradient Extragradient Method for Solving the Split Variational Inequality Problem. *Vietnam Journal of Mathematics*, **48**, 187-204. https://doi.org/10.1007/s10013-019-00378-y

[3] Sahu, D.R., Yao, J.C., Verma, M. and Shukla, K.K. (2020) Convergence Rate Analysis of Proximal Gradient Methods with Applications to Composite Minimization Problems. *Optimization*, **70**, 75-100. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1702040

[4] Nam, N.M., Rector, R.B. and Giles, D. (2017) Minimizing Differences of Convex Functions with Applications to Facility Location and Clustering. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **173**, 255-278. https://doi.org/10.1007/s10957-017-1075-6

[5] Censor, Y., Gibali, A. and Reich, S. (2012) Extensions of Korpelevich's Extragradient Method for the Variational Inequality Problem in Euclidean Space. *Optimization*, **61**, 1119-1132. https://doi.org/10.1080/02331934.2010.539689

[6] Shan, Z., Zhu, L., Wang, Y. and Yin, T. (2022) Modified Mann-Type Inertial Subgradient Extragradient Methods for Solving Variational Inequalities in Real Hilbert Spaces. *Filomat*, **36**, 1557-1572. https://doi.org/10.2298/fil2205557s

[7] Gibali, A. and Thong, D.V. (2020) A New Low-Cost Double Projection Method for Solving Variational Inequalities. *Optimization and Engineering*, **21**, 1613-1634. https://doi.org/10.1007/s11081-020-09490-2

[8] Gibali, A. and Shehu, Y. (2018) An Efficient Iterative Method for Finding Common Fixed Point and Variational Inequalities in Hilbert Spaces. *Optimization*, **68**, 13-32. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1490417

[9] Alber, Y.I. and Iusem, A.N. (2001) Extension of Subgradient Techniques for Nonsmooth Optimization in Banach Paces. *Set-Valued Analysis*, **9**, 315-335. https://doi.org/10.1023/a:1012665832688

[10] Liu, H. and Yang, J. (2020) Weak Convergence of Iterative Methods for Solving Quasimonotone Variational Inequalities. *Computational Optimization and Applications*, **77**, 491-508. https://doi.org/10.1007/s10589-020-00217-8

[11] Wang, Y., Fang, X., Guan, J.L., *et al*. (2020) On Split Null Point and Common Fixed Point Problems for Multivalued Demicontractive Mappings. *Optimization*, **4**, 1-20.

[12] Korpelevich, G.M. (1976) An Extragradient Method for Finding Saddle Points and for Other Problems. *Matecon*, **12**, 747-756.

[13] Tseng, P. (2000) A Modified Forward-Backward Splitting Method for Maximal Monotone Mappings. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **38**, 431-446. https://doi.org/10.1137/s0363012998338806

[14] Ceng, L., Petrușel, A., Yao, J. and Yao, Y. (2018) Hybrid Viscosity Extragradient Method for Systems of Variational Inequalities, Fixed Points of Nonexpansive Mappings, Zero Points of Accretive Operators in Banach Spaces. *Fixed Point Theory*, **19**, 487-502. https://doi.org/10.24193/fpt-ro.2018.2.39

[15] Shehu, Y. and Iyiola, O.S. (2017) Iterative Algorithms for Solving Fixed Point Problems and Variational Inequalities with Uniformly Continuous Monotone Operators. *Numerical Algorithms*, **79**, 529-553. https://doi.org/10.1007/s11075-017-0449-z

[16] Zhao, X. and Yao, Y. (2020) Modified Extragradient Algorithms for Solving Monotone Variational Inequalities and Fixed Point Problems. *Optimization*, **69**, 1987-2002. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1711087

[17] Shehu, Y. and Cholamjiak, P. (2015) Another Look at the Split Common Fixed Point Problem for Demicontractive Operators. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, **110**, 201-218. https://doi.org/10.1007/s13398-015-0231-9

[18] Tan, B., Fan, J. and Qin, X. (2021) Inertial Extragradient Algorithms with Non-Monotonic Step Sizes for Solving Variational Inequalities and Fixed Point Problems. *Advances in Operator Theory*, **6**, Article No. 61. https://doi.org/10.1007/s43036-021-00155-0

[19] Kraikaew, R. and Saejung, S. (2013) Strong Convergence of the Halpern Subgradient Extragradient Method for Solving Variational Inequalities in Hilbert Spaces. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **163**, 399-412. https://doi.org/10.1007/s10957-013-0494-2

[20] Dong, Q., He, S. and Rassias, M.T. (2020) General Splitting Methods with Linearization for the Split Feasibility Problem. *Journal of Global Optimization*, **79**, 813-836. https://doi.org/10.1007/s10898-020-00963-3

[21] Shehu, Y. and Iyiola, O.S. (2016) Strong convergence result for monotone variational inequalities. *Numerical Algorithms*, **76**, 259-282. https://doi.org/10.1007/s11075-016-0253-1

[22] Tong, M.Y. and Tian, M. (2020) Strong Convergence of the Tseng Extragradient Method for Solving Variational Inequalities. *Applied Set-Valued Analysis and Optimization*, **2**, 19-33.

[23] Thong, D.V. and Van Hieu, D. (2018) Some Extragradient-Viscosity Algorithms for Solving Variational Inequality Problems and Fixed Point Problems. *Numerical Algorithms*, **82**, 761-789. https://doi.org/10.1007/s11075-018-0626-8

[24] He, S. and Wu, T. (2017) A Modified Subgradient Extragradient Method for Solving Monotone Variational Inequalities. *Journal of Inequalities and Applications*, **2017**, Article No. 89. https://doi.org/10.1186/s13660-017-1366-3

[25] Opial, Z. (1967) Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Nonexpansive Mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, 591-597. https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1967-11761-0

[26] Ye, M. (2018) An Improved Projection Method for Solving Generalized Variational Inequality Problems. *Optimization*, **67**, 1523-1533. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1478971

[27] Rockafellar, R.T. (1970) On the Maximality of Sums of Nonlinear Monotone Operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, **149**, 75-88. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1970-0282272-5

[28] He, S. and Xu, H. (2012) Uniqueness of Supporting Hyperplanes and an Alternative to Solutions of Variational Inequalities. *Journal of Global Optimization*, **57**, 1375-1384. https://doi.org/10.1007/s10898-012-9995-z

[29] Alvarez, F. and Attouch, H. (2001) An Inertial Proximal Method for Maximal Monotone Operators via Discretization of a Non-Linear Oscillator with Damping. *Set-Valued Analysis*, **9**, 3-11. https://doi.org/10.1023/a:1011253113155