Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(2), 251-262
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.142068

四元数矩阵方程$AX+X^*B+CY=D$的三对角广义(反)对称解

王梓沣，张　澜*

内蒙古工业大学理学院，内蒙古　呼和浩特

收稿日期：2025年1月20日；录用日期：2025年2月14日；发布日期：2025年2月21日

摘　要

文章对于给定的四元数矩阵 A,B,C 和 D，深入讨论了矩阵方程 $AX+X^*B+CY=D$ 的三对角广义(反)对称解。利用Kronecker积，矩阵拉直算子以及Moore-Penrose广义逆等理论，充分考虑三对角广义(反)对称矩阵的结构特点，讨论了四元数矩阵方程三对角广义(反)对称解的结果，给出方程有解的充分必要条件及解的表达式。

关键词

四元数矩阵，Kronecker积，Moore-Penrose广义逆，三对角广义(反)对称矩阵

Tridiagonal Generalized (Skew-) Symmetric Solution for the Quaternion Matrix Equation $AX+X^*B+CY=D$

Zifeng Wang, Lan Zhang*

College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia

Received: Jan. 20th, 2025; accepted: Feb. 14th, 2025; published: Feb. 21st, 2025

Abstract

This paper discusses in depth the tridiagonal generalized (skew-) symmetric solutions for the given quaternion matrices A,B,C, and D in the matrix equation $AX+X^*B+CY=D$. By employing the theories of the Kronecker product, matrix vectorization, and the Moore-Penrose generalized

*通讯作者。

文章引用: 王梓沣, 张澜. 四元数矩阵方程 $AX+X^*B+CY=D$ 的三对角广义(反)对称解[J]. 应用数学进展, 2025, 14(2): 251-262. DOI: 10.12677/aam.2025.142068

inverse, the research thoroughly considers the structural characteristics of tridiagonal generalized (skew-) symmetric matrices. It discusses the outcomes of the quaternion matrix equation's tridiagonal generalized (skew-) symmetric solutions, provides the necessary and sufficient conditions for the equation to have a solution, and presents the expressions for these solutions.

Keywords

Quaternion Matrices, Kronecker Product, Moore-Penrose Generalized Inverse, Tridiagonal Generalized (Symmetric/Skew-Symmetric) Matrix

1. 引言

在多维空间的数学建模和工程应用中，四元数矩阵方程扮演着越来越重要的角色。四元数，作为一种强大的数学工具，因其在表示三维旋转方向上的简洁性和效率而被广泛采用。在计算机图形学中，四元数矩阵提供了一种自然的方式来处理三维空间中的旋转和方向，三对角广义(反)对称解的研究可以提高图形变换的准确性和效率。在物理模拟中，四元数矩阵可以用来模拟刚体的旋转和方向，三对角广义(反)对称解的研究可以提高这些模拟的精确度和可靠性。

近些年来，许多国内外学者都投入到四元数矩阵和四元数矩阵方程的研究中，Wolf [1]在实数范围上对实四元数矩阵的相似性进行了研究，Xie [2]对自伴四元数矩阵行列式的展开进行了研究，Liping 等人在简单阿廷环上考虑四元数矩阵方程[3]，Wang [4]研究了实四元数矩阵方程组的双对称和中心对称解[5]-[11]，分别考虑了四元数矩阵(组)方程$(AXB,CXD)=(E,F)$、$AXB=C$、$AXB+CXD=E$、$AXB+CYD=E$、$AX+XB=C$ 和 $AXA^H+BYB^H=C$ 的解。文献[12]是对三对角矩阵的逆阵元素解析进行研究，加快了逆矩阵计算的速度。文献[13]研究了四元数矩阵的特征值以及特征向量的问题。文献[14] [15]研究了四元数矩阵方程的 L-结构，对于四元数矩阵方程的其他代数性质也有研究[16]-[19]。尽管四元数矩阵方程的研究已经取得了一定的进展，但目前的研究还相对较少，需要进一步的探索和研究。在数值分析中，三对角广义(反)对称解可以用于求解线性方程组，特别是在处理大型稀疏矩阵时，这种解可以提高计算效率和精度。本文将深入分析三对角广义(反)对称解的结构特征，利用 Kronecker 积、矩阵拉直算子以及 Moore-Penrose 广义逆，证明了四元数矩阵方程 $AX+X^*B+CY=D$ 的三对角广义(反)对称解的存在性、唯一性的充要条件，并给出方程求解的有效算法。

四元数最早是由爱尔兰数学家 William Rowan Hamilton 在 1843 年发明的。四元数的表示集合如下

$$Q_S=\{q=q_a+q_bi+q_cj+q_dk;\ q_a,q_b,q_c,q_d\in R\},$$

其中 $i^2=j^2=k^2=-1, ij=-ji=k$。q^* 表示四元数 q 的共轭，$q^*=q_a-q_bi-q_cj-q_dk$，其满足 $(pq)^*=q^*p^*$。四元数的范数 $\|q\|=\sqrt{|qq^*|}=\sqrt{|q_a^2+q_b^2+q_c^2+q_d^2|}$，对于任意四元数矩阵 $A=A_1+A_2j\in Q_S^{m\times n}$ 的复表示矩阵如下：

$$F(A)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1}\end{pmatrix}\in C^{2m\times 2n}.$$

本文中由 $R^n, R^{m\times n}, C^{m\times n}, Q_S^{m\times n}, R_3^{n\times n}, Q_3^{n\times n}, I_n, 0$ 分别表示 n 维实向量组成的集合、$m\times n$ 实矩阵组成的集合、$m\times n$ 复矩阵组成的集合、$m\times n$ 四元数矩阵组成的集合、n 阶三对角实矩阵组成的集合、n 阶三对角四元数矩阵组成的集合、n 阶单位矩阵、相应类型零矩阵。对于 $A\in C^{m\times n}, \mathrm{Re}(A), \mathrm{Im}(A), \bar{A}, A^{\mathrm{T}}, A^*$ 和 A^+ 分别表示矩阵 A 的实部、虚部、共轭、转置、共轭转置和广义逆。$\otimes$ 表示矩阵的 Kronecker 积。

定义复矩阵的 Frobenius 范数，当 $A\in C^{m\times n}$ 时，

$$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2},$$

定义四元数矩阵的 Frobenius 范数，当 $A\in Q_s^{m\times n}$ 时，

$$\|A\|_F=\|F(A)\|_F=\sqrt{2\left(\|\mathrm{Re}\,A_1\|^2+\|\mathrm{Im}\,A_1\|^2+\|\mathrm{Re}\,A_2\|^2+\|\mathrm{Im}\,A_2\|^2\right)}.$$

定义 1 $A\in Q_3^{n\times n}$，若 $A=S_nAS_n$，其中 $S_n=(e_n,e_{n-1},\cdots,e_2,e_1)$，$e_i$ 为 n 阶单位矩阵的第 i 列，则 A 称为是一个三对角广义对称矩阵，分别用 $WR_3^{n\times n}$ 和 $WQ_3^{n\times n}$ 表示实和四元数三对角广义对称矩阵集合，若 $A=-S_nAS_n$，那 A 称为是一个三对角广义反对称矩阵，分别用符号 $AR_3^{n\times n}$ 和 $AQ_3^{n\times n}$ 表示实和四元数三对角广义反对称矩阵集合。

本文考虑以下问题：

问题 1 设 $A,B,C,D\in Q_S^{n\times n}$，考虑方程

$$AX+X^*B+CY=D, \tag{1}$$

其中 $X,Y\in WQ_3^{n\times n}\cup AQ_3^{n\times n}$ 的解，令

$$H_L=\left\{[X,Y]\,|\,X,Y\in WQ_3^{n\times n}\cup AQ_3^{n\times n}, \|AX+X^*B+CY-D\|_F=\min_{X_0,Y_0\in WQ_3^{n\times n}\cup AQ_3^{n\times n}}\|AX_0+X_0^*B+CY_0-D\|_F\right\},$$

求矩阵 $[X_W,Y_A]\in H_L$ 使

$$\|[X_W,Y_Y]\|_F^2=\min_{[X,Y]\in H_L}\left(\|X\|_F^2+\|Y\|_F^2\right).$$

2. 预备知识

下面给出本文所需要的预备知识。首先利用三对角广义(反)对称矩阵的特殊结构，给出其拉直的简化表达式。

若矩阵 $A\in WR_3^{n\times n}$，当 $n=2k$ 时，矩阵 A 满足

$$A=\begin{pmatrix}
a_1 & c_1 \\
b_1 & a_2 & a_2 \\
 & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & b_{k-2} & a_{k-1} & c_{k-1} \\
 & & & b_{k-1} & a_k & b_k \\
 & & & & b_k & a_k & b_{k-1} \\
 & & & & & c_{k-1} & a_{k-1} & b_{k-2} \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & & & & & c_3 & a_3 & b_2 \\
 & & & & & & & & c_2 & a_2 & b_1 \\
 & & & & & & & & & c_1 & a_1
\end{pmatrix},$$

当 $n=2k+1$ 时，矩阵 A 满足

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & b_{k-1} & a_k & c_k & & & & \\ & & & b_k & a_{k+1} & b_k & & & \\ & & & & c_k & a_k & b_{k-1} & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & c_2 & a_2 & b_1 \\ & & & & & & & c_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

若 $A\in AR_3^{n\times n}$，当 $n=2k$ 时，矩阵 A 满足

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & & & & & \\ b_1 & a_2 & a_2 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & b_{k-2} & a_{k-1} & c_{k-1} & & & & & \\ & & & b_{k-1} & a_k & -b_k & & & & \\ & & & & b_k & -a_k & -b_{k-1} & & & \\ & & & & & -c_{k-1} & -a_{k-1} & -b_{k-2} & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & -c_3 & -a_3 & -b_2 \\ & & & & & & & & -c_2 & -a_2 & -b_1 \\ & & & & & & & & & -c_1 & -a_1 \end{pmatrix},$$

当 $n=2k+1$ 时，矩阵 A 满足

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & b_{k-1} & a_k & c_k & & & & \\ & & & b_k & a_{k+1} & b_k & & & \\ & & & & -c_k & -a_k & -b_{k-1} & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & -c_2 & -a_2 & -b_1 \\ & & & & & & & -c_1 & -a_1 \end{pmatrix},$$

其中 $a_{k+1}=0$，设 $A\in WR_3^{n\times n}\cup AR_3^{n\times n}$，当 $n=2k$ 时，令 $A_1=\left(\sqrt{2}a_1,\sqrt{2}b_1\right)$，$A_2=\left(\sqrt{2}c_1,\sqrt{2}a_2,\sqrt{2}b_2\right)$，$\cdots$，$A_{k-1}=\left(\sqrt{2}c_{k-2},\sqrt{2}a_{k-1},\sqrt{2}b_{n-1}\right)$，$A_k=\left(\sqrt{2}c_{k-1},\sqrt{2}a_k,\sqrt{2}b_k\right)$。记 $\mathrm{vec}_{2k}(A)=\left(A_1,A_2,\cdots,A_{k-1},A_k\right)^{\mathrm{T}}$。则

$$\mathrm{vec}(A)=K_{\mu(2k)}\mathrm{vec}_{2k}(A)\quad(\mu=W,A),\tag{2}$$

其中 $K_{W_{(2k)}},K_{A_{(2k)}}\in R^{4k^2\times(3k-1)}$ 为列正交矩阵，

$$K_{W_{(2k)}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_4 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{k-1} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_k & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{k+2} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{k+1} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-1} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-2} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-3} & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-1} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$K_{A_{(2k)}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_4 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{k-1} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_k & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{k+2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{k+1} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-1} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-3} & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-1} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 e_i 为 I_{2k} 的第 i 列。

当 $n=2k+1$ 时，令 $A_1=\left(\sqrt{2}a_1,\sqrt{2}b_1\right)$，$A_2=\left(\sqrt{2}c_1,\sqrt{2}a_2,\sqrt{2}b_2\right)$，$\cdots$，$A_k=\left(\sqrt{2}c_{k-1},\sqrt{2}a_k,\sqrt{2}b_k\right)$，$A_{k+1}=\left(\sqrt{2}c_k,a_{k+1}\right)$。特别注意的是，当 A 为三对角广义反对称矩阵时，$a_{k+1}=0$，此时 $A_{k+1}=\left(\sqrt{2}c_k,0\right)$。记 $\mathrm{vec}_{2k+1}(A)=\left(A_1,A_2,\cdots,A_{n-1},A_n\right)^{\mathrm{T}}\in R^{3k+1}$ 则

$$\mathrm{vec}(A)=K_{\mu(2k+1)}\mathrm{vec}_{2k+1}(A)\quad(\mu=W,A), \tag{5}$$

其中 $K_{W_{(2k+1)}},K_{A_{(2k+1)}}\in R^{(2k+1)^2\times(3k+1)}$ 为列正交矩阵

$$K_{W_{(2k+1)}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_4 & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}e_k+\frac{1}{\sqrt{2}}e_{k+2} & e_{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-1} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-2} & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k+1} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k+1} & \frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$K_{A_{(2k+1)}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_4 & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}e_k+\frac{1}{\sqrt{2}}e_{k+2} & e_{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-1} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-2} & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k+1} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k+1} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中 e_i 为 I_{2k+1} 的第 i 列。

为了方便说明，统一记为

$$\mathrm{vec}_\delta(A)=\begin{cases}\mathrm{vec}_{2k}(A) & n=2k,\\ \mathrm{vec}_{2k+1}(A) & n=2k+1,\end{cases}\quad K_W=\begin{cases}K_{W_{(2k)}} & n=2k,\\ K_{W_{(2k+1)}} & n=2k+1,\end{cases}\quad K_A=\begin{cases}K_{A_{(2k)}} & n=2k,\\ K_{A_{(2k+1)}} & n=2k+1.\end{cases}$$

引理 1 [8]对于 $A,B,C\in C^{n\times n}$，有 $\mathrm{vec}(ABC)=\left(C^{\mathrm{T}}\otimes A\right)\mathrm{vec}(B)$。

由于四元数不具有交换性，引理 1 在四元数上并不成立，下面给出引理 1 在四元数中的推广。设 $A=A_1+A_2j\in Q_s^{n\times n}$，令 $\Phi_A=(A_1,A_2)$，$\vec{A}=\left(\mathrm{Re}(A_1),\mathrm{Im}(A_1),\mathrm{Re}(A_2),\mathrm{Im}(A_2)\right)$。其拉直为

$$\mathrm{vec}(A)=\mathrm{vec}(A_1)+\mathrm{vec}(A_2)j,\ \mathrm{vec}(\Phi_A)=\begin{pmatrix}\mathrm{vec}(A_1)\\ \mathrm{vec}(A_2)\end{pmatrix},$$

则

$$\left\|\mathrm{vec}(A)\right\|_F=\sqrt{2}\left\|\mathrm{vec}(\Phi_A)\right\|_F=\sqrt{2}\left\|\begin{pmatrix}\mathrm{vec}(A_1)\\ \mathrm{vec}(A_2)\end{pmatrix}\right\|_F.$$

引理 2 [8]设 $A=A_1+A_2 j\in Q_S^{n\times n}, B=B_1+B_2 j\in Q_S^{n\times n}, C=C_1+C_2 j\in Q_S^{n\times n}$，那么

$$\mathrm{vec}(\Phi_{ABC})=\left(F(C)^{\mathrm{T}}\otimes A_1, F(Cj)^{*}\otimes A_2\right)\begin{bmatrix}\mathrm{vec}(\Phi_B)\\ \mathrm{vec}(\Phi_{-jBj})\end{bmatrix}.$$

下面给出四元数三对角广义(反)对称矩阵拉直的一个结果。首先分析其结构，对于 $A=A_1+A_2 j\in WQ_3^{n\times n}$，$S_nAS_n=A$，$S_n(A_1+A_2 j)S_n=A_1+A_2 j$，可得 $S_n(A_i)S_n=A_i$，$i=1,2$，有 $\mathrm{Re}(A_i)=S_n(\mathrm{Re}(A_i))S_n$，$\mathrm{Im}(A_i)=S_n(\mathrm{Im}(A_i))S_n$，$i=1,2$，即 $A_1,A_2\in WR_3^{n\times n}$。同理，当 $A=A_1+A_2 j\in AQ_3^{n\times n}$，可得 $A_1,A_2\in AR_3^{n\times n}$。

当 $X\in Q_S^{m\times n}$ 时，记

$$\mathrm{vec}_\delta(\vec{X})=\begin{pmatrix}\mathrm{vec}_\delta(\mathrm{Re}(X_1))\\ \mathrm{vec}_\delta(\mathrm{Im}(X_1))\\ \mathrm{vec}_\delta(\mathrm{Re}(X_2))\\ \mathrm{vec}_\delta(\mathrm{Im}(X_2))\end{pmatrix}$$

引理 3 当 $X=X_1+X_2 j\in WQ_3^{n\times n}$，

$$\begin{pmatrix}\mathrm{vec}(\Phi_X)\\ \mathrm{vec}(\Phi_{-jXj})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{vec}(X_1)\\ \mathrm{vec}(X_2)\\ \mathrm{vec}(\overline{X_1})\\ \mathrm{vec}(\overline{X_2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K_W & iK_W & 0 & 0\\ 0 & 0 & K_W & iK_W\\ K_W & -iK_W & 0 & 0\\ 0 & 0 & K_W & -iK_W\end{pmatrix}\mathrm{vec}_\delta(\vec{X}).$$

当 $X=X_1+X_2 j\in AQ_3^{n\times n}$，

$$\begin{pmatrix}\mathrm{vec}(\Phi_X)\\ \mathrm{vec}(\Phi_{-jXj})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{vec}(X_1)\\ \mathrm{vec}(X_2)\\ \mathrm{vec}(\overline{X_1})\\ \mathrm{vec}(\overline{X_2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K_A & iK_A & 0 & 0\\ 0 & 0 & K_A & iK_A\\ K_A & -iK_A & 0 & 0\\ 0 & 0 & K_A & -iK_A\end{pmatrix}\mathrm{vec}_\delta(\vec{X}).$$

证明 由式(2)和式(5)直接可得。

引理 4 对于 $X\in R^{n\times m}$，有 $\mathrm{vec}(X^{\mathrm{T}})=L\mathrm{vec}(X)$，其中矩阵 $L\in R^{nm\times nm}$ 的形式如下

$$L=\begin{pmatrix}
e_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & e_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & e_n & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & e_1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & e_2 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_{n-1} & \ddots & 0 & 0 & 0 & e_n & \ddots & 0 & 0\\
0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0\\
0 & 0 & \ddots & e_1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & e_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & e_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \ddots & e_n & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & e_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_n
\end{pmatrix}.$$

其中 e_i 为 n 阶单位矩阵的第 i 列

证明 直接计算可得。

引理 5 设 $X\in Q_S^{n\times n}$，则

$$\begin{pmatrix} \operatorname{vec}\left(\Phi_{X^*}\right) \\ \operatorname{vec}\left(\Phi_{-jX^*j}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{vec}\left(\Phi_X\right) \\ \operatorname{vec}\left(\Phi_{-jXj}\right) \end{pmatrix},$$

其中

$$G_1 = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix}; G_2 = \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & -L \end{pmatrix}$$

证明 $X \in Q_S^{n\times n}$，$X = X_1 + X_2 j$，$\vec{X} = \left(\operatorname{Re}\left(X_1\right), \operatorname{Im}\left(X_1\right), \operatorname{Re}\left(X_2\right), \operatorname{Im}\left(X_2\right)\right)$，则

$$\overrightarrow{X^*} = \left(\operatorname{Re}\left(X_1\right)^{\mathrm{T}}, -\operatorname{Im}\left(X_1\right)^{\mathrm{T}}, -\operatorname{Re}\left(X_2\right)^{\mathrm{T}}, -\operatorname{Im}\left(X_2\right)^{\mathrm{T}}\right),$$

再由引理 4 可得结果。

引理 6 [9]对于 $A \in R^{n\times n}$ 和 $b \in R^n$，矩阵方程 $Ax = b$ 有解 $x \in R^n$ 当且仅当 $AA^+b = b$，通解可表示为 $x = A^+b + \left(I - A^+A\right)y$，其中 $y \in R^n$ 是任意向量。此时其极小范数解是 $x = A^+b$。当 $AA^+b \neq b$，矩阵方程 $Ax = b$ 的最小二乘解能表示为 $x = A^+b + \left(I - A^+A\right)y$，其中 $y \in R^n$ 是任意向量，此时其极小范数最小二乘解是 $x = A^+b$。

3. 主要结果

对于 $A, B, C, D \in Q_S^{n\times n}, A = A_1 + A_2 j, B = B_1 + B_2 j, C = C_1 + C_2 j, D = D_1 + D_2 j$，先讨论 $X \in WQ_3^{n\times n}, Y \in AQ_3^{n\times n}$ 时方程的解，方程其他形式的解以推论形式给出。设

$$P = \left(\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \otimes A_1, \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \otimes A_2\right) + \left(\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \otimes I_n, 0_{n\times n}\right) \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} K_W & iK_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_W & iK_W \\ K_W & -iK_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_W & -iK_W \end{pmatrix}. \tag{8}$$

$$Q = \left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \otimes C_1, \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \otimes C_2\right) \begin{pmatrix} K_A & iK_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_A & iK_A \\ K_A & -iK_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_A & -iK_A \end{pmatrix}. \tag{9}$$

$$T_1 = \left[\operatorname{Re} P, \operatorname{Re} Q\right], T_2 = \left[\operatorname{Im} P, \operatorname{Im} Q\right], d = \begin{bmatrix} \operatorname{vec}\left(\operatorname{Re}\Phi_D\right) \\ \operatorname{vec}\left(\operatorname{Im}\Phi_D\right) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

定理 1 设 $A, B, C, D \in Q_S^{n\times n}$；$A = A_1 + A_2 j, B = B_1 + B_2 j, C = C_1 + C_2 j$，$D = D_1 + D_2 j$，令 T_1, T_2, d 如式(10)定义，且 $M = \operatorname{diag}\left(K_W, K_A\right)$，则问题(1)有解 $X \in WQ_3^{n\times n}, Y \in AQ_3^{n\times n}$，当且仅

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d = d,$$

此时方程通解为

$$H_L = \left\{ \left[X, Y\right] \left| \begin{bmatrix} \operatorname{vec}\left(\vec{X}\right) \\ \operatorname{vec}\left(\vec{Y}\right) \end{bmatrix} = M\left(\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d + \left(I - \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}\right) z\right) \right. \right\},$$

其中 $z \in \begin{cases} R^{2(3k-1)} & n=2k \\ R^{2(3k+1)} & n=2k+1 \end{cases}$ 是任意向量，且极小范数解为 $\begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\vec{X}) \\ \mathrm{vec}(\vec{Y}) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d$。如果 $\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d \neq d$，则问题(1)有最小二乘解，此时

$$H_L = \left\{ [X,Y] \middle| \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\vec{X}) \\ \mathrm{vec}(\vec{Y}) \end{bmatrix} = M\left(\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d + \left[I - \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \right] z \right) \right\},$$

且有极小范数最小二乘解 $\begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\vec{X}) \\ \mathrm{vec}(\vec{Y}) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d$。

证明 由引理 2 可得

$$\begin{aligned} \left\| AX + X^*B + CY - D \right\|_F^2 &= 2\left\| \Phi_{AX} + \Phi_{X^*B} + \Phi_{CY} - \Phi_D \right\|_F^2 \\ &= 2\left\| \mathrm{vec}(\Phi_{AX}) + \mathrm{vec}(\Phi_{X^*B}) + \mathrm{vec}(\Phi_{CY}) - \mathrm{vec}(\Phi_D) \right\|_F^2 \\ &= 2\left\| P\,\mathrm{vec}_\delta(\vec{X}) + Q\,\mathrm{vec}_\delta(\vec{Y}) - \mathrm{vec}(\Phi_D) \right\|_F^2 \\ &= 2\left\| \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,P & \mathrm{Re}\,Q \\ \mathrm{Im}\,P & \mathrm{Im}\,Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{vec}_\delta(\vec{X}) \\ \mathrm{vec}_\delta(\vec{Y}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\mathrm{Re}\,\Phi_D) \\ \mathrm{vec}(\mathrm{Im}\,\Phi_D) \end{bmatrix} \right\|_F^2 \\ &= 2\left\| \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{vec}_\delta(\vec{X}) \\ \mathrm{vec}_\delta(\vec{Y}) \end{bmatrix} - d \right\|_F^2 . \end{aligned}$$

考虑方程 $\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} t = d$，其中 $t = \begin{bmatrix} \mathrm{vec}_\delta(\vec{X}) \\ \mathrm{vec}_\delta(\vec{Y}) \end{bmatrix}$。当满足

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d = d, \tag{11}$$

由引理 6 得方程有解，解为

$$\begin{bmatrix} \mathrm{vec}_\delta(\vec{X}) \\ \mathrm{vec}_\delta(\vec{Y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d + \left(I - \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \right) z,$$

其中 $z \in \begin{cases} R^{2(3k-1)} & n=2k \\ R^{2(3k+1)} & n=2k+1 \end{cases}$ 是任意向量，进一步可得解集

$$H_L = \left\{ [X,Y] \middle| \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\vec{X}) \\ \mathrm{vec}(\vec{Y}) \end{bmatrix} = M\left(\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d + \left[I - \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \right] z \right) \right\}.$$

相应的极小范数解满足

$$\begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\vec{X}) \\ \mathrm{vec}(\vec{Y}) \end{bmatrix} = M\left(\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d \right).$$

若不满足式(11)，此时方程有最小二乘解为

$$\begin{bmatrix} \mathrm{vec}_W(\vec{X}) \\ \mathrm{vec}_A(\vec{Y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d + \left(I - \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \right) z,$$

进一步可得解集

$$H_L = \left\{ [X,Y] \left| \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\vec{X}) \\ \mathrm{vec}(\vec{Y}) \end{bmatrix} = M\left(\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d + \left[I - \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \right] z \right) \right. \right\}.$$

相应的最小范数最小二乘解满足

$$\begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\vec{X}) \\ \mathrm{vec}(\vec{Y}) \end{bmatrix} = M\left(\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d \right). \qquad \square$$

推论 1：对于问题(1)的其他解，需根据解 X,Y 的范围，选取参数，

当 $X \in WQ_3^{n\times n}$，取

$$P = \left(\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \otimes A_1, \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \otimes A_2 \right) + \left(\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{B_1} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \otimes I_n, 0_{n\times n} \right) \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} K_W & iK_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_W & iK_W \\ K_W & -iK_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_W & -iK_W \end{pmatrix}.$$

当 $X \in AQ_3^{n\times n}$，取

$$P = \left(\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \otimes A_1, \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \otimes A_2 \right) + \left(\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{B_1} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \otimes I_n, 0_{n\times n} \right) \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} K_A & iK_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_A & iK_A \\ K_A & -iK_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_A & -iK_A \end{pmatrix}.$$

当 $Y \in WQ_3^{n\times n}$，取

$$Q = \left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \otimes C_1, \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \otimes C_2 \right) \begin{pmatrix} K_W & iK_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_W & iK_W \\ K_W & -iK_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_W & -iK_W \end{pmatrix}.$$

当 $Y \in AQ_3^{n\times n}$，取

$$Q = \left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \otimes C_1, \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \otimes C_2 \right) \begin{pmatrix} K_A & iK_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_A & iK_A \\ K_A & -iK_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_A & -iK_A \end{pmatrix}.$$

令

$$M = \mathrm{diag}(M_{11}, M_{22}). \tag{12}$$

当 $X \in WQ_3^{n\times n}$，取 $M_{11} = \begin{pmatrix} K_W & iK_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_W & iK_W \\ K_W & -iK_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_W & -iK_W \end{pmatrix}$，当 $X \in AQ_3^{n\times n}$，取 $M_{11} = \begin{pmatrix} K_A & iK_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_A & iK_A \\ K_A & -iK_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_A & -iK_A \end{pmatrix}$，

当 $Y \in WQ_3^{n\times n}$，取 $M_{22}=\begin{pmatrix} K_W & iK_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_W & iK_W \\ K_W & -iK_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_W & -iK_W \end{pmatrix}$，当 $Y \in AQ_3^{n\times n}$，取 $M_{22}=\begin{pmatrix} K_A & iK_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_A & iK_A \\ K_A & -iK_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_A & -iK_A \end{pmatrix}$，取 T_1,T_2,d 如式(10)，与定理 1 的证明类似，可得方程(1)相应的 $X,Y \in WQ_3^{n\times n} \cup AQ_3^{n\times n}$ 解。

4. 算法

算法：

Step 1：给出 A,B,C,D；

Step 2：根据 X,Y 要求的范围，由式(3) (4)和式(6) (7)计算相应的 K_W 和 K_A；

Step 3：根据 X,Y 要求的范围，由推论 1 中的式(8) (9)得出相应的 P,Q；

Step 4：根据式(10)得出 T_1,T_2,d；

Step 5：根据 X,Y 要求的范围，由式(12)得出对应的 M；

Step 6：检验 $\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^+ d = d$ 是否成立；

Step 7：根据定理 1 及推论得出相应的解。

例：设

$$A=\begin{bmatrix} 1+2i & 2+j & 3+k \\ 0 & -i+3j & -2j \\ 3i & 2+i & -1-k \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & j+k & 3-2i \\ 2+k & -j & -2i+k \\ 0 & -2-k & 2i \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 3-i & 2i & 3-i+k \\ -k & 4 & 2+i \\ j & 2i+3k & 2i+k \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} -j-k & i-j & 2-j \\ -2i+3k & i-k & 2+k \\ 3 & 0 & 3+2j \end{bmatrix}$$

对于 $X \in WQ_3^{n\times n}, Y \in AQ_3^{n\times n}$，考虑解的情况按照算法步骤计算可得如下情况：

数值实验表明，以误差为 10^{-13} 量级，式(11)成立，为了方便计算，取 z 为相应类型零向量，可以得到相应的一组解 $[X,Y]$，其中

$$X=\begin{pmatrix} 0.031+0.160i-0.251j-0.537k & 0.181+0.081i+0.772j+0.459k & 0 \\ 0.194+0.768i+0.608j+0.317k & -0.270-0.782i+0.643j+1.839k & 0.194+0.768i+0.608j+0.317k \\ 0 & 0.181+0.081i+0.772j+0.459k & 0.031+0.160i-0.251j-0.537k \end{pmatrix}$$

$$Y=\begin{pmatrix} -0.190+0.151i-0.536j+0.343k & 0.005+0.402i+0.046j+0.178k & 0 \\ -0.946-0.861i-0.180j-0.042k & 0 & 0.946+0.861i+0.180j+0.042k \\ 0 & -0.005-0.402i-0.046j-0.178k & 0.190-0.151i+0.536j-0.343k \end{pmatrix}$$

基金项目

国家自然科学基金(12261065)和内蒙古自治区自然科学基金项目(2023LHMS01016)。

参考文献

[1] Wolf, L.A. (1936) Similarity of Matrices in Which the Elements Are Real Quaternions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **42**, 737-743. https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1936-06417-7

[2] Xie, B.J. (1980) An Expansion Theorem for Determinants of Self-Adjoint Quaternion Matrices and Its Applications.

Acta Mathematica Sinica, **23**, 668-683.

[3] Liping, H. and Qingguang, Z. (1995) The Matrix Equation $AXB + CYD = E$ over a Simple Artinian Ring. *Linear and Multilinear Algebra*, **38**, 225-232. https://doi.org/10.1080/03081089508818358

[4] Wang, Q. (2005) Bisymmetric and Centrosymmetric Solutions to Systems of Real Quaternion Matrix Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **49**, 641-650. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.01.014

[5] Yuan, S., Liao, A. and Lei, Y. (2008) Least Squares Hermitian Solution of the Matrix Equation $(AXB, CXD) = (E, F)$ with the Least Norm over the Skew Field of Quaternions. *Mathematical and Computer Modelling*, **48**, 91-100. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2007.08.009

[6] Karimi, S. (2015) The Right-Left Preconditioning Technique for the Solution of the Large Matrix Equation $AXB = C$. *International Journal of Computer Mathematics*, **93**, 1226-1239. https://doi.org/10.1080/00207160.2015.1045420

[7] Zhang, F.X., Mu, W.S., Li, Y. and Zhao, J.L. (2016) Special Least Squares Solutions of the Quaternion Matrix Equation $AXB + CXD = E$. *Computers & Mathematics with Applications*, **72**, 1426-1435. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.07.019

[8] Yuan, S.-F., Wang, Q.-W., Yu, Y.-B. and Tian, Y. (2017) On Hermitian Solutions of the Split Quaternion Matrix Equation $AXB + CXD = E$. *Advances in Applied Clifford Algebras*, **27**, 3235-3252. https://doi.org/10.1007/s00006-017-0806-y

[9] Yuan, S., Wang, Q. and Zhang, X. (2013) Least-Squares Problem for the Quaternion Matrix Equation $AXB + CXD = E$ over Different Constrained Matrices. *International Journal of Computer Mathematics*, **90**, 565-576. https://doi.org/10.1080/00207160.2012.722626

[10] 李明照，袁仕芳，田勇．分裂四元数矩阵方程 $AX + XB = C$ 的反 Hermite 解[J]．井冈山大学学报(自然科学版), 2018, 39(5): 13-16.

[11] 李明照，袁仕芳，田勇．分裂四元数矩阵方程 $AXA^H + BYB^H = C$ 的反 Hermite 解[J]．五邑大学学报(自然科学版), 2019, 33(1): 6-11.

[12] 毕永青．三对角对称 Toeplitz 矩阵的解析逆阵[J]．西南民族大学学报(自然科学版), 2003, 29(4): 390-393.

[13] Özdemir, M., Erdoğdu, M. and Şimşek, H. (2013) On the Eigenvalues and Eigenvectors of a Lorentzian Rotation Matrix by Using Split Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, **24**, 179-192. https://doi.org/10.1007/s00006-013-0424-2

[14] Yuan, S. and Wang, Q. (2015) L-Structured Quaternion Matrices and Quaternion Linear Matrix Equations. *Linear and Multilinear Algebra*, **64**, 321-339. https://doi.org/10.1080/03081087.2015.1037302

[15] Wei, A., Li, Y., Ding, W. and Zhao, J. (2022) Two Algebraic Methods for Least Squares L-Structured and Generalized L-Structured Problems of the Commutative Quaternion Stein Matrix Equation. *Computational and Applied Mathematics*, **41**, Article No. 251. https://doi.org/10.1007/s40314-022-01943-x

[16] He, Z. (2019) Some New Results on a System of Sylvester-Type Quaternion Matrix Equations. *Linear and Multilinear Algebra*, **69**, 3069-3091. https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1704213

[17] Kyrchei, I.I. (2010) Cramer's Rule for Some Quaternion Matrix Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 2024-2030. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.07.003

[18] 王茂香，姜同松，张兆忠．分裂四元数线性方程组的 Cramer 法则[J]．泰山学院学报, 2016, 38(6): 37-41.

[19] Zhang, Z., Jiang, Z. and Jiang, T. (2015) Algebraic Methods for Least Squares Problem in Split Quaternionic Mechanics. *Applied Mathematics and Computation*, **269**, 618-625. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.07.072