Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(2), 274-285
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.142070

Hans汉斯

Reweighted Wirtinger Flow在电力系统状态估计问题中的应用

毛晓雨

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2025年1月21日；录用日期：2025年2月15日；发布日期：2025年2月24日

摘　要

文章研究了Reweighted Wirtinger Flow (RWF)算法在基于二次测量的电力系统状态估计(PSSE)中的应用。PSSE是电力系统运行中的关键环节，它关系到电网的效率、可靠性和可持续性。传统的基于加权最小二乘(WLS)的高斯－牛顿迭代方法在处理非凸优化问题时容易陷入局部最优解。RWF算法在求解一般二次测量模型中被证明具有良好的性能，文章将其应用于PSSE问题，并通过对多个基准系统的数值实验，展示了RWF算法在计算速度和恢复精度方面的优势。实验结果表明，RWF算法在处理电力系统状态估计问题时，不仅提高了求解效率，还提升了恢复精度，尤其是在大规模系统中的应用潜力。此外，RWF算法在面对离群点时表现出更好的鲁棒性，这对于实际电力系统中的应用尤为重要。

关键词

RWF算法，电力系统状态估计，二次测量，鲁棒性

Application of Reweighted Wirtinger Flow in Power System State Estimation Problem

Xiaoyu Mao

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Jan. 21st, 2025; accepted: Feb. 15th, 2025; published: Feb. 24th, 2025

Abstract

This paper investigates the application of the Reweighted Wirtinger Flow (RWF) algorithm in Power System State Estimation (PSSE) based on quadratic measurements. PSSE is a critical component in the operation of power systems, affecting the efficiency, reliability, and sustainability of the power grid. Traditional Weighted Least Squares (WLS), based on Gauss-Newton iterative methods, tend to

文章引用: 毛晓雨. Reweighted Wirtinger Flow 在电力系统状态估计问题中的应用[J]. 应用数学进展, 2025, 14(2): 274-285. DOI: 10.12677/aam.2025.142070

get trapped in local optima when dealing with non-convex optimization problems. The RWF algorithm has been proven to perform well in solving general quadratic measurement models, and this paper applies it to the PSSE problem. Numerical experiments across multiple benchmark systems demonstrate the advantages of the RWF algorithm in terms of computational speed and estimation accuracy. The results indicate that the RWF algorithm not only improves solution efficiency but also enhances the accuracy of state estimation, especially for large-scale systems. Moreover, the RWF algorithm exhibits better robustness in the presence of outliers, which is particularly important for practical applications in power systems.

Keywords

Reweighted Wirtinger Flow Algorithm, Power System State Estimation, Quadratic Measurement, Robustness

1. 引言

电网作为一个庞大而复杂的网络，其持续运行状态的监测对于确保电网的效率、可靠性和可持续性至关重要。在电力系统状态估计(PSSE)的早期阶段，通过手动收集地理分布的电流和电压表读数来计算选定母线的电压。然而，由于非全时运行、模型不确定性和计量误差，传统的交流(AC)功率流方程变得不切实际。Schweppe 等人[1]的开创性工作为电力系统状态估计奠定了基础，解决了这一问题，并开启了后续众多研究者在此基础上提出并开发各种方法和扩展的先河。

随着监控控制和数据采集(SCADA)系统的进步，大量改进数据变得可访问，这为电力系统状态估计提供了新的机遇。Schweppe 等人[1]建立了现代电力系统状态估计的统计基础。在他们的工作之后，众多解决方案和电力系统状态估计的推广被提出并推进。电力系统状态估计的非线性模型是这一领域的核心，而求解这一非线性模型的常用方法是高斯牛顿法[2] [3]，高斯牛顿法的求解思路是利用其一阶泰勒展开近似线性化并进一步求解线性化模型，然而，这种方法容易陷入局部最优解，限制了其在实际应用中的有效性[2]。

Wang 等人[4]-[8]发现，电力系统的非线性模型可以写成二次型形式，这一发现催生了一系列新的方法，如半定规划松弛(SDR)和可行点追踪(FPP)。Zhu 等[9] [10]基于原问题的凸半定松弛，提出了求解状态估计的半定规划(SDP)公式，提供了有效可行的解。尽管 SDR 状态估计解具有接近最优的性能，但其计算量对于电力系统的实时运行来说可能会变得很繁重，并且随着问题的维度增加，计算复杂度也随之增加，这限制了其在大规模电力系统中的应用。鉴于此，Wang 等[4] [7]提出了一种更轻量级的替代方案：基于可行点跟踪(Fviable Point Tracking, FPP)的潮流分析和电力系统状态估计求解新方法。该方法迭代求解非凸二次约束的加权最小二乘，从而求解非凸二次约束二次规划的凸重构问题的可行解。与现有技术相比，所开发的求解器以更高的计算复杂度为代价，提供了更好的数值性能并收敛到 WLS 问题的一个稳定点，但它与各种 IEEE 测试系统上基于高斯牛顿法相比，其运行时间更长。

对于上述类型二次问题的求解，Molybog 等[11]提出了两种基于二次优化的方法来解决二次回归问题，并提供了保证每种方法正确恢复未知状态的充分条件，并在欧洲电网数据上的实验也表明了该方法在电力系统状态估计上有良好的效果。受此启发，本文考虑使用同类型二次测量模型的求解方法应用于

电力系统状态估计问题中。状态估计问题是复数二次测量问题，在众多求解二次测量模型的方法中，Wirtinger Flow (WF)算法[12]是首先被提出解决复数求导问题的。Yuan 等人[13]在 WF 方法的基础上，提出了一种处理相位恢复(PR)问题的加权 Wirtinger 流(RWF)方法，RWF 通过解决一系列权重变化的子 PR 问题来搜索全局最优。

随着公用事业越来越多地转向智能电网技术以及其他具有固有网络漏洞的升级，电网已经看到来自对抗性网络攻击的相关威胁在形式和频率上都在增长[14]。离群点(即坏数据)的存在对算法的准确性和稳健性提出了挑战。这些离群点可能源于测量设备的故障、数据传输错误或外部环境干扰。因此，研究能够抵抗这些异常数据影响的算法变得尤为重要。近年来，对状态估计问题的稳健性研究逐渐增多，特别是在处理异常数据和提高算法鲁棒性方面[8] [15]-[18]。根据 Yuan 等人[13]的研究，RWF 算法在处理离群点方面具有稳健性。RWF 算法通过迭代过程中不断调整权重来优化目标函数，这种策略间接地实现了对离群点的抑制效果。数值测试结果也证实了 RWF 算法在低采样复杂度下相对于 WF 算法具有更低的采样复杂度，并且对离群点具有更好的鲁棒性。

本研究的动机在于利用 RWF 算法的稳健性来解决电力系统状态估计问题。在多个基准系统上进行的数值实验结果表明，RWF 算法在计算速度和恢复精度上展现出良好的性能。对于在电力系统特殊性的情况下 RWF 算法的收敛性，本文也说明了在一定条件下其收敛性可以得到理论保证，这为电力系统状态估计提供了一种新的、稳健的求解方法，有望在实际电力系统的应用中取得更好的效果。

2. 研究问题

给定一个有 N 个母线的电力系统，其中电压相量 $v \in \mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ 未知，状态估计问题寻求从一组 SCADA 测量值 $z_1, \cdots, z_m \in \mathbb{R}$ 中恢复电压相量 v，其中每一个测量值都可以表示成 v 的表达式：

$$z_i = h_i(v) + \varepsilon_i \tag{1}$$

其中 ε_i 为未知测量噪声。在状态估计中，经典 SCADA 对节点和支路功率以及电压幅值的测量可表示为以下齐次二次型：

$$h_i(v) = v^H M_i v,\ M_i = M_i^H \tag{2}$$

其中 M_i 是厄米测量矩阵，每个 M_i 的具体表达式均从测量值与电压相量的二次关系式中得到，下面我们介绍其具体表达式。

根据 Wang 等人[4]-[8]对二次测量下 PSSE 的研究，状态估计中所需的测量值即节点电压幅值、节点注入功率及支路功率均能写成关于电压相量 v 的二次表达式，具体表示为：由 N 个节点和 L 条支线组成的电网建模为 $\mathcal{G} := \{N, L\}$，其中 $\mathcal{N} = \{1, 2, \cdots, N\}$ 表示 N 个节点的集合，$\mathcal{L} = \{(n, n')\} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 为支线集合。根据基尔霍夫定律、欧姆定律和潮流方程，可以推导出节点注入功率、支路潮流、电压幅值的平方相对于电压矢量的二次函数。给定 m 个 SCADA 测量值 $z_1, \cdots, z_m \in \mathbb{R}$，每个测量值都可以用关于电压向量 $v \in \mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ 的二次形式表示。假设功率是电压和电流的乘积，而电流通常被假定为与电压线性相关，那么功率也必须与电压成二次相关。设 $Y_{i,j} \in \mathbb{C}$ 为母线 i 至母线 j 经线路或变压器的导纳，设 $Y_i \in \mathbb{C}$ 为母线 i 处的并联导纳。根据文献推导，测量值对电压矢量的二次型具体形式如下：

功率表达式：

$$\begin{cases} p_i = v^H M_i^p v, \text{ with } M_i^p := \dfrac{Y_i^H + Y_i}{2}, \\ q_i = v^H M_i^q v, \text{ with } H_i^q := \dfrac{Y_i^H - Y_i}{2j}, \end{cases}$$

其中，对于任意 $i \in \mathcal{N}$， $Y_i := e_i e_i^{\mathrm{T}} Y$，其中 $\{e_i\}_{i=1}^N$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 的标准基向量。

支路潮流表示为：

$$\begin{cases} P_{i,j} = v^H M_{i,j}^P v, \text{ with } M_{i,j}^P := \dfrac{Y_{i,j}^H + Y_{i,j}}{2}, \\ Q_{i,j} = v^H M_{i,j}^Q v, \text{ with } M_{i,j}^Q := \dfrac{Y_{i,j}^H - Y_{i,j}}{2j}, \end{cases}$$

对于任意的 $(i,j) \in \mathcal{L}$， $Y_{i,j} := e_i e_{i,j}^{\mathrm{T}} Y_f$；

电压幅值的平方表示为：

$$V_i^2 = v^H M_i^V v, \text{ with } M_i^V := e_i e_i^{\mathrm{T}}.$$

将这些表达式应用到模型(2)中，则可得到电力系统状态估计的二次测量模型，从中求解电压相量 v 的值，最常用的策略即为最小二乘估计，其表达式如下：

$$\min_{v \in \mathbb{C}^N} \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left(h_i(v) - z_i\right)^2.$$

由于 $h_i(v)$ 的二次性质，上述最小二乘问题是一个非凸的强 NP 困难问题。

3. 用于 PSSE 的 RWF 算法

3.1. 模型重构

根据 Yuan 等人[13]文章的介绍，RWF 算法的核心在于引入权重 ω_i 来调整目标函数中每一项的贡献。这些权重根据当前迭代点 v_k 与最优解的距离动态调整，以强化算法对正确方向的搜索。通过动态调整目标函数中每一项的权重，有效地平衡了优化过程中的局部最小值问题，提高了算法的收敛速度和恢复精度。因此 RWF 算法下 PSSE 的最小二乘估计转化为：

$$\min_{v \in \mathbb{C}^N} f(v) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \omega_i \left(h_i(v) - z_i\right)^2 \tag{3}$$

其中 $\omega_i \geq 0$ 为权重。WF 算法实际上为 RWF 对于任意 $z_i, i = 1, \cdots, m$，$\omega_i = 1$ 的情形，因此 RWF 采用 Wirtinger 梯度的梯度下降法求解式(3)，其 Wirtinger 梯度表达式如下：

$$\nabla f(v) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \nabla f_i(v) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \omega_i \left(v^H M_i v - z_i\right) M_i v \tag{4}$$

3.2. 算法框架

该算法的关键在于选取合适的权重 ω_i。根据 Yuan 等人[13]文中的思想，使用一种自适应的权重设置，其表达式如下：

$$\omega_i^k = \frac{1}{\left|v_k^H M_i v_k - z_i\right| + \eta_i}, i = 1, \cdots, m, \tag{5}$$

其中 v_k 为第 k 次迭代的结果，η_i 是一个参数，它可以在迭代过程中改变或一直处于停滞状态。算法初始点 v_0 采用谱初始点，本文将采用带 Armijo 步长的梯度下降处理 RWF 的算法，其框架如下：

3.3. 算法收敛性

在本节中，我们将详细分析 RWF 算法在 PSSE 问题中的收敛性。具体来说，我们将证明算法在一定

条件下能够收敛到问题的局部极小点。

算法 1. 适用于 PSSE 的 RWF 算法(带 Armijo 步长)

输入：

当前迭代点 v_k

测量向量 $z=\{z_i\}_{i=1}^m$

测量矩阵 $M=\{M_i\}_{i=1}^m$

权重参数 η

最大迭代次数 T_1

初始步长 μ_0

Armijo 参数 α 和 β 其中($0<\alpha<1$ 且 $0<\beta<1$)

输出：

更新后的迭代点 v_{k+1}

步骤：

1. 初始化：

设置初始迭代点 $v_0=v_k$

设置初始步长 $\mu=\mu_0$

2. 梯度下降迭代：

对于 $t=1,2,\cdots,T_1$

计算梯度 $G_t=\nabla f(v_t)$

计算新的迭代点 $v_{new}=v_t-\mu G_t$

若 $f(v_{new})<f(v_t)-\beta\mu\|G_t\|^2$ ，则接受新的迭代点

$$v_{t+1}=v_{new}$$

否则，减小步长 $\mu=\alpha\mu$ 并重新计算 v_{new}

若 $f(v_{t+1})<f(v_t)-5\times10^{-4}\times\mu\times\|G_t\|^2$ ，则终止梯度下降迭代

3. 输出更新后的迭代点：

返回更新后的迭代点 $v_{k+1}=v_{t+1}$

首先，根据 Zhang 等人[19]的研究，我们将模型(3)写成实数域上的形式，即(3)可转化为：

$$\min_{x\in\mathbb{C}^{2N}} f(x):=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^m\left(x^{\mathrm{T}}A_i x-y_i\right)^2 \tag{6}$$

其中

$$x=\begin{bmatrix}\operatorname{Re}v\\ \operatorname{Im}v\end{bmatrix},\quad A_i=\sqrt{\omega_i}\begin{bmatrix}I_N & 0\\ 0 & 0\\ 0 & I_N\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\operatorname{Re}M_i & -\operatorname{Im}M_i\\ \operatorname{Im}M_i & \operatorname{Re}M_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_N & 0\\ 0 & 0\\ 0 & I_N\end{bmatrix},\quad y_i=\sqrt{\omega_i}z_i.$$

Zhang 等人[19]已证明模型(6)与模型(3)的解是一一对应的，因此我们只需证明在实数域上算法 1 收敛即可。

单等人[20]针对二次测量模型提出了带 Armijo 步长的 RWF 算法，并对其收敛性进行了严格的证明。他们的证明基于实数域上的模型，这与我们转换后的模型(6)是一致的。因此，我们可以直接引用单等人的证明来说明我们的算法是收敛的[20]。

为分析收敛性，我们首先写出模型(6)的梯度 $\nabla f(x)$ 和 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(x)$ 如下：

$$\nabla f(x)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}A_i x\left(x^{\mathrm{T}}A_i x-y_i\right),$$

$$\nabla^2 f(x)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[A_i\left(x^{\mathrm{T}}A_i x-y_i\right)+2A_i x x^{\mathrm{T}}A_i\right],$$

为了确保模型(6)满足单等人[20]证明中所依赖的条件，我们需要验证以下几点：

1) 目标函数的性质

a) 连续可微性：目标函数 $f(x)$ 是连续可微的，因为它是多项式函数。

b) 梯度的 Lipschitz 连续性：目标函数的梯度 $\nabla f(x)$ 需要满足 Lipschitz 连续性条件。具体来说，存在常数 $L>0$，使得对于任意 $x,z\in R^{2N}$，

$$\left\|\nabla f(x)-\nabla f(z)\right\|\le L\left\|x-z\right\|,$$

这可以通过计算目标函数的梯度 $\nabla f(x)$ 来验证。由于 $f(x)$ 是四次多项式，其梯度是三次多项式，因此在任何有界区间内，梯度的 Lipschitz 连续性条件自然满足。

2) 步长的选择

算法使用了 Armijo 步长，这是一种常用的步长选择策略，可以保证算法的收敛性。具体来说，步长 τ_k 满足以下条件：

$$f\left(x_k-\tau_k\nabla f(x_k)\right)\le f(x_k)-\alpha\tau_k\left\|f(x_k)\right\|^2,$$

其中，α 是一个常数，通常取值在 $(0,0.5)$ 之间。Armijo 步长的选择可以确保每一步的迭代都能有效地减少目标函数的值。

在上述条件下，根据单等人[20]的证明，我们讨论 RWF 在 PSSE 问题下的收敛性如下：

1) 目标函数的强制性

引理 1 函数 $f(x)$ 是强制的，即 $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x)=\infty$。并且对于任意给定的 $h\in\mathbb{R}$，函数的水平集 $I_h=\left\{x\in\mathbb{R}^{2N}: f(x)\le h\right\}$ 是紧的。

证明：由于 $x^{\mathrm{T}}A_i x$ 是实数且非负，注意到 $f(x)=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(x^{\mathrm{T}}A_i x-y_i\right)^2\ge 0$，我们可以考虑 $x^{\mathrm{T}}A_i x$ 随着 $\|x\|$ 增加而二次增长，假设 $x^{\mathrm{T}}A_i x$ 至少以 $\|x\|^2$ 的速度增长。因此，我们可以写出 $x^{\mathrm{T}}A_i x\ge\lambda_i\|x\|^2$，其中 λ_i 是一个正常数，取决于 A_i，在状态估计的实际问题中，A_i 依靠电力系统的物理特征，它通常是有界的。这个不等式表明 $x^{\mathrm{T}}A_i x$ 至少以 $\|x\|^2$ 的速度增长，因此有 $f(x)\ge\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_i\|x\|^2-y_i\right)^2$，展开得 $f(x)\ge\frac{1}{2m}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\|x\|^4-2\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_i\|x\|^2+\sum_{i=1}^{m}y_i^2\right)$，由于 λ_i 是正常数，当 $\|x\|\to\infty$ 时，$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\|x\|^4$ 的增长速度远大于其他项，因此 $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x)=\infty$，这表明 $f(x)$ 是强制的。由于 $f(x)$ 是连续的，并且随着 $\|x\|$ 的增加而无限增加，水平集 I_h 必须是有界的，因此是紧的。

2) 梯度和 Hessian 矩阵的有界性

引理 2 对任意给定的 $h<\infty$，$\sup_{\|x\|\le h}\left\|\nabla f(x)\right\|$ 和 $\sup_{\|x\|\le h}\left\|\nabla^2 f(x)\right\|$ 存在。

证明：首先，我们考虑梯度的上界。对于任意的 $a\in\mathbb{R}^{2N}$，我们有：

$$\left|\left\langle a,\nabla f\left(x\right)\right\rangle\right|\le\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|\left\langle x,A_i x\right\rangle-y_i\right|\left|\left\langle a,A_i x\right\rangle\right|,$$

利用柯西－施瓦茨不等式，我们可以得到：

$$\left|\left\langle a,\nabla f\left(x\right)\right\rangle\right|\le\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\left\langle x,A_i x\right\rangle-y_i\right)^2}\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left\langle a,A_i x\right\rangle^2},$$

进一步简化：

$$\left|\left\langle a,\nabla f\left(x\right)\right\rangle\right|\le\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\left\langle x,A_i x\right\rangle-y_i\right)^2}\left\|a\right\|\left\|x\right\|,$$

由于$\left\|x\right\|\le h$，因此可以得到：

$$\sup_{\left\|x\right\|\le h}\left\|\nabla f\left(x\right)\right\|\le\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\left\langle x,A_i x\right\rangle-y_i\right)^2}h.$$

在状态估计的实际问题中，系统的测量数量 m，状态向量 x，测量矩阵 A_i，以及测量值 y_i 均依靠实际的电力系统信息，因此 $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\left\langle x,A_i x\right\rangle-y_i\right)^2$ 是有限的，那么梯度的上界是存在的。

对于 Hessian 矩阵，我们有：

$$\left|\left\langle a,\nabla^2 f\left(x\right)a\right\rangle\right|\le\frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}\left\langle a,A_i x\right\rangle^2+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|\left\langle x,A_i x\right\rangle-y_i\right|\left\|\left\langle a,A_i x\right\rangle\right\|,$$

同样利用柯西－施瓦茨不等式，我们可以得到：

$$\left|\left\langle a,\nabla^2 f\left(x\right)a\right\rangle\right|\le\frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}\left\langle a,A_i x\right\rangle^2+\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\left\langle x,A_i x\right\rangle-y_i\right)^2}\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left\langle a,A_i a\right\rangle^2},$$

进一步简化：

$$\left|\left\langle a,\nabla^2 f\left(x\right)a\right\rangle\right|\le\frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}\left\langle a,A_i x\right\rangle^2+\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\left\langle x,A_i x\right\rangle-y_i\right)^2}\left\|a\right\|^2.$$

同样在状态估计的实际问题中，$\frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}\left\|A_i x\right\|^2$ 和 $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\left\langle x,A_i x\right\rangle-y_i\right)^2$ 通常是有限的，因此海瑟矩阵的上界存在。

3) 序列的非增性和有界性

序列的非增性：由 Armijo 步长的选择可知，算法产生的序列$\left\{f\left(x_k\right)\right\}$是非增的。具体来说，对于任意 $k\ge0$， $f\left(x_{k+1}\right)\le f\left(x_k\right)$。

序列的有界性：由$\left\{f\left(x_k\right)\right\}$非增得 $f\left(x_k\right)\le f\left(x_0\right)$，因此$\left\{x_k\right\}\subseteq I_{f\left(x_0\right)}$，由 $I_{f\left(x_0\right)}$ 有界可知$\left\{x_k\right\}$有界。

4) 收敛到局部极小点

由$\left\{f\left(x_k\right)\right\}$的非增性和有界性可知，它收敛于某个极限 f^*。根据非增性和 Armijo 条件，我们有：

$$\alpha\tau_k\left\|\nabla f\left(x_k\right)\right\|^2\le f\left(x_k\right)-f\left(x_{k+1}\right)$$

当 $k\to\infty$ 时，右侧趋于 0，因此$\left\|\nabla f\left(x_k\right)\right\|^2\to0$，即 $\nabla f\left(x_k\right)\to0$。

由于梯度 $\nabla f\left(x_k\right)$ 收敛到 0，且$\left\{x_k\right\}$有界，根据目标函数的连续可微性和梯度的 Lipschitz 连续性，我们可以推断出$\left\{x_k\right\}$收敛到某个点 x^*，其中 $\nabla f\left(x^*\right)=0$。这意味着算法产生的序列$\left\{x_k\right\}$收敛到问题的局部极小点 x^*。

通过上述讨论，我们可以得出结论：在电力系统状态估计问题中，RWF 算法是收敛的。具体来说，算法产生的序列$\{x_k\}$将收敛到问题的局部极小点x^*。这意味着，随着迭代的进行，算法将逐渐逼近最优解，从而有效地恢复电力系统的状态。

4. 数值实验

4.1. 实验数据来源及指标分析

本文为验证基于 RWF 算法的 PSSE 在不同节点系统上的恢复结果与算法性能，使用 MATPOWER 数据库中 2 组电力系统标准算例数据集进行实验，这 2 组数据集分别为 IEEE 57-bus、IEEE 118-bus 节点系统，其中 IEEE 57-bus 系统包含 57 个节点和 80 条支线，总共有 331 个测量值，IEEE 118-bus 系统包含 118 个节点和 186 条支线，测量值个数为 726 个。

本文采用 RWF 算法与 WF 算法进行对比实验，即在每个数据集上分别使用两个算法进行 PSSE 实验，每个数据集重复实验 100 次，以平均值作为最终的实验结果。本文比较的评价指标如下：

平均计算时间(Mean Time)：计算 100 次实验恢复真实值所需的平均计算时间，单位为秒；

平均目标函数值(Mean Objective Value)：计算 100 次实验恢复到真实值后的平均目标函数值；

成功恢复率(Success Recovery Rates)：实验恢复成功的标准参考 Wang 等人[7]文章的标准，即当$\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(z_i - v^H M_i v\right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{m} z_i^2 < succeps$时，认为恢复成功，100 次实验中恢复成功的实验次数占总次数的百分比作为恢复成功率。

4.2. 结果分析

在本研究中，我们系统地比较了 RWF 算法和 WF 算法在不同规模电力系统上的性能。为了全面评估两种算法在电力系统状态估计问题中的鲁棒性和准确性，我们引入了多种噪声模型，包括高斯噪声(Gaussian)、泊松噪声(Poisson)、均匀噪声(Uniform)、柯西噪声(Cauchy)、拉普拉斯噪声(Laplace)以及 t 分布噪声(Student’s t)。这些噪声模型的引入，旨在模拟实际电力系统中可能遇到的各种测量误差和不确定性。

为了定量评估两种算法的成功率，我们采用了一个严格的评判标准$succeps = 1\times 10^{-3}$，该标准基于恢复结果与真实状态之间的偏差。这一标准不仅考虑了算法在不同噪声条件下的恢复精度，还考虑了算法在存在离群点时的鲁棒性。通过在 IEEE 57-bus 和 IEEE 118-bus 标准测试系统上的数值实验，我们收集了关于算法成功率、平均恢复时间和平均目标函数值的详尽数据。

4.2.1. 正常噪声水平下结果分析

表 1 给出了 IEEE 57-bus 节点系统在不同噪声模型下两种算法的成功恢复率、平均恢复时间和平均目标函数值。从表中可以看出，在所有测试的噪声模型下，RWF 算法均达到了 100%的成功恢复率，显示出其在不同噪声条件下的稳定性和鲁棒性。相比之下，WF 算法在柯西噪声和 t 分布噪声下的成功恢复率显著下降，这可能是由于 WF 算法对这种重尾噪声的敏感性较高。在平均恢复时间方面，RWF 算法在所有噪声模型下均表现出较快的计算速度，这表明 RWF 算法在计算效率上具有明显优势。在平均目标函数值方面，RWF 算法同样表现优异。在所有噪声模型下，RWF 算法的平均目标函数值均低于 WF 算法，这意味着 RWF 算法能够更准确地估计系统状态，进一步证明了 RWF 算法在状态估计精度上的优势。不同噪声类型对算法性能的影响也值得关注，在柯西噪声和 t 分布噪声模型下，WF 算法的性能显著下降，这表明 WF 算法可能对某些类型的噪声更为敏感。

Table 1. Results of the IEEE 57-bus node system
表 1. IEEE 57-bus 节点系统结果

噪声类型	计算方法	成功恢复率	平均恢复时间(单位：秒)	平均目标函数值
$N(0,0.1)$	RWF	100%	3.4924	0.0236
	WF	100%	57.1453	0.0292
$\text{Poisson}(1)$	RWF	100%	3.7296	0.1767
	WF	100%	51.7792	0.4750
$\text{Uniform}(-0.1,0.1)$	RWF	100%	2.9401	0.0220
	WF	100%	49.7954	0.0270
$\text{Cauchy}(0,0.1)$	RWF	100%	2.4697	0.2263
	WF	36%	41.6546	0.9576
$\text{Laplace}(0,0.1)$	RWF	100%	2.6478	0.0282
	WF	100%	37.6550	0.0319
$t(5)$	RWF	100%	2.4954	0.2745
	WF	0%	36.6105	0.8623

表 2 给出了 IEEE 118-bus 节点系统在不同噪声模型下两种算法的成功恢复率、平均恢复时间和平均目标函数值。从表中可以看出，在所有测试的噪声水平下，RWF 和 WF 算法均达到了 100%的成功恢复率，显示出这两种算法在不同噪声条件下的稳定性和鲁棒性。在平均恢复时间方面，RWF 算法在所有噪声模型下均表现出较快的计算速度，这表明 RWF 算法在计算效率上具有明显优势。在平均目标函数值方面，RWF 算法同样表现优异。在所有噪声水平下，RWF 算法的平均目标函数值均低于 WF 算法，这意味着 RWF 算法能够更准确地估计系统状态。

Table 2. Results of the IEEE 118-bus node system
表 2. IEEE 118-bus 节点系统结果

噪声类型	计算方法	成功恢复率	平均恢复时间(单位：秒)	平均目标函数值
$N(0,0.1)$	RWF	100%	26.5902	0.0575
	WF	100%	197.9061	0.1246
$\text{Poisson}(1)$	RWF	100%	31.9709	0.4075
	WF	100%	191.5144	0.6348
$\text{Uniform}(-0.1,0.1)$	RWF	100%	2.9401	0.0220
	WF	100%	49.7954	0.0270
$\text{Cauchy}(0,0.1)$	RWF	100%	29.3492	0.3158
	WF	100%	177.4501	0.7157
$\text{Laplace}(0,0.1)$	RWF	100%	47.9880	0.0628
	WF	100%	280.6012	0.1384
$t(5)$	RWF	100%	30.4371	0.3021
	WF	100%	179.3002	0.9296

4.2.2. 带离群点噪声水平下结果分析

理论分析表明 RWF 算法相对于 WF 算法来说具有更好的稳健性。为了进一步体现这一点在电力系统状态估计这一问题上的作用，我们在上述几种噪声水平的基础上增加了样本量为 1%的离群点，比较两种算法的成功恢复率、平均恢复时间以及平均目标函数值，对比分析两种算法的结果。

表 3 给出了 IEEE 57-bus 节点系统在不同噪声水平下再加离群点时两种算法的成功恢复率、平均恢复时间和平均目标函数值。从表中可以看出，在带有离群点的条件下，RWF 算法在所有测试的噪声模型下均表现出较高的成功恢复率，尤其是在柯西噪声和 t 分布噪声下。相比之下，WF 算法在这个噪声下的成功恢复率显著较低。在平均恢复时间方面，RWF 算法同样表现出较快的计算速度，这表明 RWF 算法在计算效率上具有明显优势。在平均目标函数值方面，RWF 算法在大多数噪声水平下均低于 WF 算法，这意味着 RWF 算法能够更准确地估计系统状态。在所有噪声模型中，RWF 算法在处理离群点方面表现出更好的性能，这可能是由于 RWF 算法在迭代过程中对权重的调整，有助于抑制离群点的影响。

Table 3. Results of the IEEE 57-bus node system with outliers
表 3. IEEE 57-bus 节点系统带离群点的结果

噪声类型	计算方法	成功恢复率	平均恢复时间(单位：秒)	平均目标函数值
$N(0,0.1)$	RWF	69%	2.0703	0.0375
	WF	0%	28.7438	0.1418
$\text{Poisson}(1)$	RWF	90%	2.4875	0.2087
	WF	0%	43.1485	0.7945
$\text{Uniform}(-0.1,0.1)$	RWF	70%	2.0466	0.0341
	WF	1%	28.6996	0.1299
$\text{Cauchy}(0,0.1)$	RWF	99%	2.2245	0.2547
	WF	7%	28.5978	0.5427
$\text{Laplace}(0,0.1)$	RWF	73%	2.2664	0.0423
	WF	0%	27.9481	0.1663
$t(5)$	RWF	100%	2.4691	0.2862
	WF	0%	36.7567	0.9710

表 4 展示了 IEEE 118-bus 节点系统在不同噪声水平下再加离群点时两种算法的成功恢复率、平均恢复时间和平均目标函数值。从表中可以看出，RWF 算法在所有测试的噪声模型下均表现出 100%的成功恢复率，显示出其在不同噪声条件下的稳定性和鲁棒性。相比之下，WF 算法的恢复成功率较 RWF 算法低。在平均恢复时间方面，RWF 算法在所有噪声模型下均表现出较快的计算速度，这表明 RWF 算法在计算效率上具有明显优势。在平均目标函数值方面，RWF 算法在大多数噪声模型下均低于 WF 算法，这意味着 RWF 算法能够更准确地估计系统状态。在所有噪声模型中，RWF 算法在处理离群点方面表现出更好的性能，这可能是由于 RWF 算法在迭代过程中对权重的调整，有助于抑制离群点的影响。

综合上述结果，我们得到了 RWF 和 WF 算法在不同 IEEE 标准测试系统上的性能对比。综合考虑计算效率、恢复精度和成功率，RWF 算法在电力系统状态估计中表现出了全面的优势。特别是在大规模电力系统的应用中，RWF 算法不仅能够提供更快的计算速度，还能保证较高的恢复精度。并且在有离群点的情况下，RWF 算法比 WF 算法表现出了更好的处理坏数据的能力。这些特性使得 RWF 算法在实际的电力系统状态估计中具有重要的应用价值，尤其是在对计算效率和精度要求较高的场合。

Table 4. Results of the IEEE 118-bus node system with outliers
表 4. IEEE 118-bus 节点系统带离群点的结果

噪声类型	计算方法	成功恢复率	平均恢复时间(单位：秒)	平均目标函数值
$N(0,0.1)$	RWF	100%	28.4267	0.0847
	WF	0%	199.1064	0.5707
$\text{Poisson}(1)$	RWF	100%	30.0700	0.4078
	WF	43%	202.8189	0.8047
$\text{Uniform}(-0.1,0.1)$	RWF	100%	28.9004	0.0837
	WF	0%	193.4823	0.5655
$\text{Cauchy}(0,0.1)$	RWF	100%	28.8243	0.3475
	WF	94%	177.7113	0.4644
$\text{Laplace}(0,0.1)$	RWF	100%	46.8641	0.0897
	WF	2%	271.9761	0.5647
$t(5)$	RWF	100%	30.0803	0.3099
	WF	99%	178.2434	0.4165

尽管 RWF 算法在本研究中展现出了相对于 WF 算法的优势，但为了更全面评估其处理离群点的能力，未来的工作需要进一步与其他常用的鲁棒估计方法进行对比。后续研究将考虑将 RWF 算法与处理坏数据的 LAV 估计方法进行对比，以探究 RWF 算法在 PSSE 问题上的深层次优势。

5. 结论

本文介绍了一种用于电力系统状态估计(PSSE)的 RWF 算法。该算法通过动态调整目标函数中每一项的权重，有效解决了优化过程中的局部最小值问题，提高了算法的计算效率和精度。在 MATPOWER 数据库中的不同节点系统上的实验结果表明，RWF 算法在不同噪声水平下的计算时间、目标函数值和恢复正确率均优于传统的 WF 算法。特别是在大规模电力系统的应用中，RWF 算法不仅计算速度更快，而且恢复精度更高。此外，在引入离群点的情况下，RWF 算法相较于 WF 算法表现出更好的鲁棒性。这些特性使得 RWF 算法在实际的电力系统状态估计中具有重要的应用价值，尤其是在对计算效率和精度要求较高的场合。为了进一步增强本文的说服力，我们对 PSSE 问题下 RWF 算法的收敛过程进行了详细的理论分析，证明了 RWF 算法在一定条件下能够收敛到问题的局部极小点。这些理论分析为 RWF 算法在 PSSE 问题中的应用提供了坚实的理论基础。RWF 算法为提高电力系统状态估计过程的效率和准确性提供了一种有前景的方法，为实际应用提供了一种健壮且高效的解决方案。

基金项目

河北省自然科学基金(项目编号：A2023202038)。

参考文献

[1] Schweppe, F. and Wildes, J. (1970) Power System Static-State Estimation, Part I: Exact Model. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **89**, 120-125. https://doi.org/10.1109/tpas.1970.292678

[2] Bertsekas, D.P. (1997) Nonlinear Programming. *Journal of the Operational Research Society*, **48**, 334-334. https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600425

[3] Abur, A. (2004) Power System State Estimation: Theory and Implementation. Marcel Dekker.

[4] Wang, G., Zamzam, A.S., Giannakis, G.B. and Sidiropoulos, N.D. (2016) Power System State Estimation via Feasible Point Pursuit. 2016 *IEEE Global Conference on Signal and Information Processing* (*GlobalSIP*), Washington DC, 7-9 December 2016, 773-777. https://doi.org/10.1109/globalsip.2016.7905947

[5] Wang, G., Giannakis, G.B. and Eldar, Y.C. (2018) Solving Systems of Random Quadratic Equations via Truncated Amplitude Flow. *IEEE Transactions on Information Theory*, **64**, 773-794. https://doi.org/10.1109/tit.2017.2756858

[6] Wang, G., Giannakis, G.B., Saad, Y. and Chen, J. (2018) Phase Retrieval via Reweighted Amplitude Flow. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **66**, 2818-2833. https://doi.org/10.1109/tsp.2018.2818077

[7] Wang, G., Zamzam, A.S., Giannakis, G.B. and Sidiropoulos, N.D. (2018) Power System State Estimation via Feasible Point Pursuit: Algorithms and Cramér-Rao Bound. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **66**, 1649-1658. https://doi.org/10.1109/tsp.2018.2791977

[8] Wang, G., Zhu, H., Giannakis, G.B. and Sun, J. (2019) Robust Power System State Estimation from Rank-One Measurements. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, **6**, 1391-1403. https://doi.org/10.1109/tcns.2019.2890954

[9] Zhu, H. and Giannakis, G.B. (2011) Estimating the State of AC Power Systems Using Semidefinite Programming. 2011 *North American Power Symposium*, Boston, 4-6 August 2011, 1-7. https://doi.org/10.1109/naps.2011.6024862

[10] Zhu, H. and Giannakis, G.B. (2014) Power System Nonlinear State Estimation Using Distributed Semidefinite Programming. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, **8**, 1039-1050. https://doi.org/10.1109/jstsp.2014.2331033

[11] Molybog, I., Madani, R. and Lavaei, J. (2020) Conic Optimization for Quadratic Regression under Sparse Noise. *Journal of Machine Learning Research*, **21**, 1-36.

[12] Candes, E.J., Li, X. and Soltanolkotabi, M. (2015) Phase Retrieval via Wirtinger Flow: Theory and Algorithms. *IEEE Transactions on Information Theory*, **61**, 1985-2007. https://doi.org/10.1109/tit.2015.2399924

[13] Yuan, Z. and Wang, H. (2017) Phase Retrieval via Reweighted Wirtinger Flow. *Applied Optics*, **56**, 2418-2427. https://doi.org/10.1364/ao.56.002418

[14] Fairley, P. (2016) Cybersecurity at U.S. Utilities Due for an Upgrade: Tech to Detect Intrusions into Industrial Control Systems Will Be Mandatory [News]. *IEEE Spectrum*, **53**, 11-13. https://doi.org/10.1109/mspec.2016.7459104

[15] Wang, G., Giannakis, G.B. and Chen, J. (2019) Robust and Scalable Power System State Estimation via Composite Optimization. *IEEE Transactions on Smart Grid*, **10**, 6137-6147. https://doi.org/10.1109/tsg.2019.2897100

[16] Zhu, H. and Giannakis, G.B. (2012) Robust Power System State Estimation for the Nonlinear AC Flow Model. 2012 *North American Power Symposium* (*NAPS*), Champaign, 9-11 September 2012, 1-6. https://doi.org/10.1109/naps.2012.6336405

[17] Kekatos, V. and Giannakis, G.B. (2013) Distributed Robust Power System State Estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, **28**, 1617-1626. https://doi.org/10.1109/tpwrs.2012.2219629

[18] Aghamolki, H.G., Miao, Z. and Fan, L. (2018) SOCP Convex Relaxation-Based Simultaneous State Estimation and Bad Data Identification. arXiv: 1804.05130.

[19] Zhang, R.Y., Lavaei, J. and Baldick, R. (2019) Spurious Local Minima in Power System State Estimation. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, **6**, 1086-1096. https://doi.org/10.1109/tcns.2019.2920586

[20] 单晓雅. 二次测量回归的 Reweighted Wirtinger Flow 算法及收敛性分析[J]. 应用数学进展, 2024, 13(11): 4966-4974.