Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2025, 14(2), 356-361**
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.142076

基于双曲正切函数求取特征函数的光滑近似函数

邵鑫宇

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2025年1月24日；录用日期：2025年2月17日；发布日期：2025年2月25日

摘 要

文章针对概率约束优化问题，提出了一种新颖的特征函数光滑近似方法，该方法利用双曲正切函数来构造近似函数。概率约束优化问题在工程、金融、能源等领域具有广泛的应用，其理论研究与实际应用价值日益凸显。尽管如此，该类问题因其固有的非线性和随机性，使得传统的优化方法在求解时面临计算复杂度高、收敛速度慢等挑战。为了克服这些困难，文章首先对现有的光滑近似方法进行了深入的综述，包括序列凸近似、罚函数法、障碍函数法等，并比较了它们在处理概率约束优化问题时的性能和适用范围。在此基础上，我们提出了一种基于双曲正切函数的光滑近似方法，该方法通过提供更为平滑的近似，显著降低了问题的求解难度，并提高了计算效率。实验结果表明，相比于传统方法，本文提出的方法在保持求解质量的同时，大幅减少了计算时间，为概率约束优化问题的解决提供了新的思路和工具。

关键词

双曲正切函数，特征函数，光滑近似，概率约束优化

Smooth Approximation Function for the Characteristic Function Based on the Hyperbolic Tangent Function

Xinyu Shao

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 24th, 2025; accepted: Feb. 17th, 2025; published: Feb. 25th, 2025

Abstract

This paper addresses the probability constraint optimization problem and proposes a novel smooth

文章引用: 邵鑫宇. 基于双曲正切函数求取特征函数的光滑近似函数[J]. 应用数学进展, 2025, 14(2): 356-361.
DOI: 10.12677/aam.2025.142076

approximation method for the characteristic function, which utilizes the hyperbolic tangent function to construct the approximation. Probability constraint optimization problems are widely applied in fields such as engineering, finance, and energy, and their theoretical research and practical application value are increasingly prominent. Nevertheless, due to their inherent nonlinearity and randomness, traditional optimization methods face challenges such as high computational complexity and slow convergence speed when solving these problems. To overcome these difficulties, this paper first provides an in-depth review of existing smooth approximation methods, including sequential convex approximation, penalty function methods, and barrier function methods, and compares their performance and applicability in dealing with probability constraint optimization problems. Based on this, we propose a smooth approximation method based on the hyperbolic tangent function, which significantly reduces the difficulty of problem-solving and improves computational efficiency by providing a smoother approximation. Experimental results show that, compared to traditional methods, the method proposed in this paper greatly reduces computation time while maintaining solution quality, offering new insights and tools for solving probability constraint optimization problems.

Keywords

Hyperbolic Tangent Function, Characteristic Function, Smooth Approximation, Probability Constraint Optimization

1. 引言

概率约束优化方法在众多实际领域取得了广泛应用，其影响力遍及计算机科学、通信网络、网络优化、能源管理等多个行业。例如，在航空和铁路调度中，概率约束优化可以帮助制定调度计划，考虑到天气变化、设备故障等不确定性因素。为了应对约束条件中的不确定因素，一种合理的策略是确保所有约束在给定的高概率水平上得到满足。接下来，我们考虑如下的概率约束优化问题[1]：

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X} \quad g(x) \\ &\text{s.t.} \quad \Pr\left\{c_1(x,\xi)\le 0, c_2(x,\xi)\le 0,\cdots,c_m(x,\xi)\le 0\right\}\ge 1-\alpha \end{aligned} \tag{JCCP}$$

设 x 是 l 维的决策随机向量，$x\in R^l$，ξ 是支撑 $\Xi\subset R^k$ 的 k 维随机向量，$\alpha\in(0,1)$。其中，$g:R^l\to R$ 和 $c_i:R^l\times\Xi\to R, i=1,2,\cdots$，$m$ 是实值函数并且对于 $\forall\xi\in\Xi$，函数 $g:R^l\to R$ 和 $c_i:R^l\times\Xi\to R, i=1,2,\cdots$，$m$ 关于 x 都是凸连续可微的，设集合 Φ 表示问题(JCCP)的可行集。

设 $c(x,\xi)=\max\left\{c_1(x,\xi),c_2(x,\xi),\cdots,c_m(x,\xi)\right\}$，

$P(x)=1-\Pr\left\{c_1(x,\xi)\le 0,c_2(x,\xi)\le 0,\cdots,c_m(x,\xi)\le 0\right\}=\Pr\left\{c(x,\xi)>0\right\}$。从而，问题(JCCP)就可以改写为如下形式：

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X} \quad g(x) \\ &\text{s.t.} \quad p(x)\le\alpha \end{aligned} \tag{P}$$

为了方便记法，将问题(P)改写为：

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X} \quad g(x) \\ &\text{s.t.} \quad \mathrm{E}\left[1_{(0,+\infty)}\left(c(x,\xi)\right)\right] \le \alpha \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中，$1_{(0,+\infty)}(z)=\begin{cases}1 & z\in(0,+\infty)\\ 0 & z\notin(0,+\infty)\end{cases}$。

我们可以看到在处理问题(JCCP)时，求取特征函数的光滑近似函数至关重要。由于特征函数本身具有非光滑性质，因此，寻找特征函数的光滑近似函数成为研究该问题的重点。本文基于双曲正切函数，构建特征函数$1_{(0,+\infty)}(z)$的光滑近似函数。与 sigmoid 函数进行比较，sigmoid 函数因其连续性和单调性在光滑近似中得到了广泛应用。通过分析，我们发现双曲正切近似函数在以下方面表现出了优势：

1) 收敛速度：与 sigmoid 函数相比，双曲正切函数在迭代初期就能更快地接近真实特征函数，从而加快了整体优化过程的收敛速度。

2) 灵活性：双曲正切函数的参数调整更为灵活，使得其在适应不同类型的概率约束优化问题时具有更高的适应性。

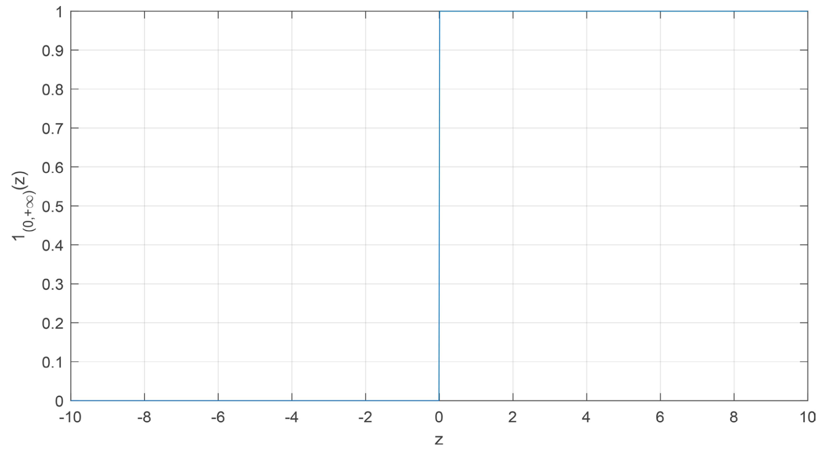

Figure 1. Image of the characteristic function $1_{(0,+\infty)}(z)$

图 1. 特征函数$1_{(0,+\infty)}(z)$的图像

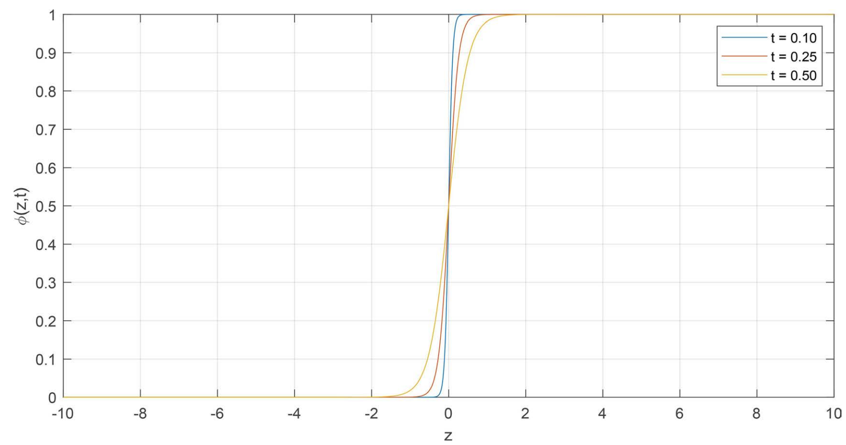

Figure 2. Image of function $\varphi(z,t)$

图 2. 函数$\varphi(z,t)$的图像

2. 特征函数 $1_{(0,+\infty)}(z)$ 的光滑近似函数

定义 1 [2]令 $\varphi: R^2 \to R^+$ 是一个非负的实值函数，$\varphi(z,t)$ 满足以下两个条件：

1) 函数 $\varphi(z,t)$ 是一光滑函数，其中 $t>0$ 是一个参数；
2) $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(z,t)=1_{(0,+\infty)}(z)$。

则称函数 $\varphi(z,t)$ 是 $1_{(0,+\infty)}(z)$ 的一个光滑近似函数。

本文主要构建有如下性质的特征函数 $1_{(0,+\infty)}(z)$，$z\in R$ 的光滑近似函数。

命题 1 [3]当 $t>0$ 时，假设函数 $\varphi(z,t)$ 有如下性质：

对于任意 $z\in R$，$\varphi(z,t)\in(0,1)$，且 $\varphi(0,t)=\dfrac{1}{2}$。

$$\lim_{t\to 0}\varphi(z,t)=1_{(0,+\infty)}(z),\ z\in R\setminus\{0\}$$

当 $z>0$ 时，$\varphi(z,t)$ 关于 t 单调递减；当 $z<0$ 时，$\varphi(z,t)$ 关于 t 单调递增；

$\varphi(z,t)$ 关于 z 是单调递增的。

$\varphi(z,t)$ 关于 z 是无穷阶连续可微的。

下面讨论满足上述性质的特征函数 $1_{(0,+\infty)}(z)$，$z\in R$ 的光滑近似函数，及其构造方法。

例 1 考虑函数

$$\varphi(z,t)=\frac{e^{\frac{z}{t}}-e^{-\frac{z}{t}}}{2\left(e^{\frac{z}{t}}+e^{-\frac{z}{t}}\right)}+\frac{1}{2}$$

由图 1、图 2 可知，当 $t\to 0$ 时，$\varphi(z,t)$ 是特征函数 $1_{(0,+\infty)}(z)$，$z\in R$ 的一个光滑近似函数。

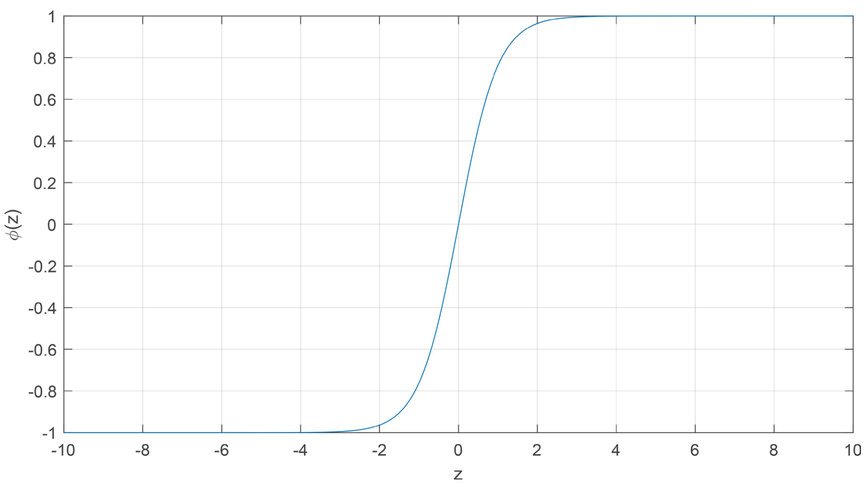

Figure 3. Image of the hyperbolic tangent function $\varphi(z)=\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$

图 3. 双曲正切函数 $\varphi(z)=\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$ 的图像

构造满足上述性质的函数：

设函数 $y=\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$，$z\in R$，这是我们常见的双曲正切函数，由双曲正切函数的性质和图 3 可知

$-1<\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}<1$。引入 t，$t>0$，有 $-1<\dfrac{e^{\frac{z}{t}}-e^{-\frac{z}{t}}}{e^{\frac{z}{t}}+e^{-\frac{z}{t}}}<1$。对式子整体加 1，可得，$0<\dfrac{e^{\frac{z}{t}}-e^{-\frac{z}{t}}}{e^{\frac{z}{t}}+e^{-\frac{z}{t}}}+1<2$。对式子整体乘以$\dfrac{1}{2}$，得 $0<\dfrac{e^{\frac{z}{t}}-e^{-\frac{z}{t}}}{2\left(e^{\frac{z}{t}}+e^{-\frac{z}{t}}\right)}+\dfrac{1}{2}<1$。设函数 $\varphi(z,t)=\dfrac{e^{\frac{z}{t}}-e^{-\frac{z}{t}}}{2\left(e^{\frac{z}{t}}+e^{-\frac{z}{t}}\right)}+\dfrac{1}{2}$。

验证函数 $\varphi(z,t)$ 是否满足上述性质：

第 1 条：由上述构造方法可知，对于任意 $z\in R$，$\varphi(z,t)\in(0,1)$；且当 $z=0$ 可得 $\varphi(0,t)=\dfrac{1}{2}$。

第 2 条：判断当 $z\in R\setminus\{0\}$ 时，是否有 $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(z,t)=1_{(0,+\infty)}(z)$ 成立。

当 $z>0$ 时，$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\frac{z}{t}}-e^{-\frac{z}{t}}}{2\left(e^{\frac{z}{t}}+e^{-\frac{z}{t}}\right)}+\dfrac{1}{2}\overset{u=e^{\frac{z}{t}}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u-\frac{1}{u}}{2\left(u+\frac{1}{u}\right)}+\dfrac{1}{2}=1$。

当 $z<0$ 时，$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\frac{z}{t}}-e^{-\frac{z}{t}}}{2\left(e^{\frac{z}{t}}+e^{-\frac{z}{t}}\right)}+\dfrac{1}{2}\overset{u=e^{\frac{z}{t}}}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u-\frac{1}{u}}{2\left(u+\frac{1}{u}\right)}+\dfrac{1}{2}=0$。

第 3 条：判断当 $z>0$ 时，$\varphi(z,t)$ 是否关于 t 单调递减；当 $z<0$ 时，$\varphi(z,t)$ 是否关于 t 单调递增。

$$\varphi(z,t)=\frac{e^{\frac{z}{t}}-e^{-\frac{z}{t}}}{2\left(e^{\frac{z}{t}}+e^{-\frac{z}{t}}\right)}+\frac{1}{2}.$$

首先，我们将计算 $\varphi(z,t)$ 关于 t 的偏导数。计算得到 $\varphi(z,t)$ 关于 t 的导数为：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{2ze^{\frac{2z}{t}}}{t^{2}\left(e^{\frac{4z}{t}}+2e^{\frac{2z}{t}}+1\right)}.$$

接下来，我们需要分析这个导数的符号。当 $z>0$ 时，由于 $t>0$，我们可以得到分子 $2ze^{\frac{2z}{t}}$ 总是正的，分母 $t^{2}\left(e^{\frac{4z}{t}}+2e^{\frac{2z}{t}}+1\right)$ 也总是正的，因此，导数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-\dfrac{2ze^{\frac{2z}{t}}}{t^{2}\left(e^{\frac{4z}{t}}+2e^{\frac{2z}{t}}+1\right)}$ 总是负的，即当 $z>0$ 时，$\varphi(z,t)$ 是否关于 t 单调递减。同理可得，当 $z<0$ 时，$\varphi(z,t)$ 是否关于 t 单调递增。

第 4 条：判断 $\varphi(z,t)$ 关于 z 是否是单调递增的。

首先，我们需要计算函数 $\varphi(z,t)$ 关于 z 的导数，计算得到函数 $\varphi(z,t)$ 关于 z 的导数为：$\dfrac{d\varphi}{dz}=\dfrac{2e^{\frac{2z}{t}}}{t\left(e^{\frac{4z}{t}}+2e^{\frac{2z}{t}}+1\right)}$。

接下来，我们需要分析这个导数的符号。由于 $t>0$，我们可以看到分母 $t\left(e^{\frac{4z}{t}}+2e^{\frac{2z}{t}}+1\right)$ 总是正的，分

子$2\mathrm{e}^{\frac{2z}{t}}$也总是正的。因此，导数$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}=\frac{2\mathrm{e}^{\frac{2z}{t}}}{t\left(\mathrm{e}^{\frac{4z}{t}}+2\mathrm{e}^{\frac{2z}{t}}+1\right)}$总是正的，即$\varphi(z,t)$关于$z$是单调递增的。

第5条：判断$\varphi(z,t)$关于z是否是无穷阶连续可微的。

要判断$\varphi(z,t)$是否关于z是无穷阶连续可微的，我们需要考虑其组成部分：指数函数$\mathrm{e}^{\frac{z}{t}}$和$\mathrm{e}^{-\frac{z}{t}}$。由于指数函数$\mathrm{e}^{x}$对于所有实数$x$都是无穷阶连续可微的，且$\varphi(z,t)$是由指数函数的组合构成的(通过加法、减法、乘法和除法)，因此$\varphi(z,t)$也是无穷阶连续可微的。

综上，$\varphi(z,t)$是特征函数$1_{(0,+\infty)}(z)$，$z\in R$的一个光滑近似函数。

3. 问题(P)的等价问题

设$\bar{p}(x,t):=E[\varphi(z,t)]=E[\varphi(c(x,\xi),t)]$，并且有$\bar{p}(x)=\lim_{t\to 0}\bar{p}(x,t)$。从而我们可以建立问题(P)的近似问题[1]：

$$\begin{aligned}&\min_{x\in X}\quad g(x)\\&\text{s.t.}\quad \bar{p}(x)\le\alpha\end{aligned}\tag{$\bar{\mathrm{P}}$}$$

接下来，为了证明问题(P)与问题($\bar{\mathrm{P}}$)等价，给出以下假设：

假设1 集合X是$\mathbb{R}^l$的紧致凸子集，并且随机变量ξ的支撑集$\Xi\in R^n$是R^k闭子集。对于任意的$\xi\in R^n$，函数$g(x)$和$c_i(x,\xi)$，$i=1,\cdots,m$，关于$\forall x\in D$都是凸连续可微的，其中D是集合X一个有界的开集。

假设2 对于$\forall x\in R^l$，函数$c(x,\cdot)$都是可测的，并且$c(x,\cdot)$对于几乎所有的$\xi\in\Xi$都是连续的。

假设3 对于任意$\bar{x}\in X$，集合$\{\xi\in\Xi:c(\bar{x},\xi)=0\}$的P测度为零，即$c(\bar{x},\xi)\ne 0$几乎必然成立。

定理1 [4]：若假设1~3成立。那么，对于任何$x\in X$和$t>0$，有$\lim_{t\to 0}\bar{p}(x,\mu)=p(x)$成立，即问题(P)与问题($\bar{\mathrm{P}}$)等价。

证明：令$z=c(x,\xi)$，由例1和Lebsgue收敛定理可知，

$$\begin{aligned}\bar{p}(x)&=\lim_{t\to 0}\bar{p}(x,t)=\lim_{t\to 0}E[\varphi(c(x,\xi),t)]=\lim_{t\to 0}\int_{\Xi}\varphi(c(x,\xi),t)\mathrm{d}P(\xi)\\&=\int_{\Xi}\lim_{t\to 0}\varphi(c(x,\xi),t)\mathrm{d}P(\xi)=\int_{\Xi}I_{(0,+\infty)}(c(x,\xi))\mathrm{d}P(\xi)=E[I_{(0,+\infty)}(c(x,\xi))]=P(x)\end{aligned}$$

从而，问题(P)与问题($\bar{\mathrm{P}}$)等价。

参考文献

[1] Ren, Y.H., Sun, Y.C., Li, D.C. and Guo, F.F. (2024) A D.C. Approximation Approach for Optimization with Probabilistic Constraints Based on Chen-Harker-Kanzow-Smale Smooth Plus Function. *Mathematical Methods of Operations Research*, **99**, 179-203. https://doi.org/10.1007/s00186-024-00859-y

[2] Ren, Y.H., Xiong, Y., Yan, Y.H. and Gu, J. (2022) A Smooth Approximation Approach for Optimization with Probabilistic Constraints Based on Sigmoid Function. *Journal of Inequalities and Applications*, **2022**, Article No. 38. https://doi.org/10.1186/s13660-022-02774-4

[3] Ren, Y.H., Wang, J. and Li, Y. (2014) A Smooth D.C. Approximation of Function $1_{(0,+\infty)}(z)$. *Far East Journal of Applied Mathematics*, **89**, 145-153.

[4] 曹丽娜. 一类求解概率约束优化问题的光滑近似方法[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2018.