

一种具有二阶收敛性的Stokes-Darcy耦合问题的统一混合有限元近似

谢富伟, 马晓华*

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2025年1月26日; 录用日期: 2025年2月19日; 发布日期: 2025年2月26日

摘要

文章给出了平面区域中Stokes-Darcy耦合问题的具有二阶收敛精度的统一近似格式。在这项工作中, 我们修改了Darcy变分格式并增强了其正定性, 使我们能够将P2元改进的Mini元应用于整个Stokes-Darcy耦合问题。此外, 由于这种二阶格式在耦合界面上有足够的自由度, 因此不需要在界面上添加额外的函数来稳定离散问题。最后, 通过两个算例验证了理论分析, 证明了该格式对于具有不同形状的耦合界面的问题具有良好的稳定性和准确性。

关键词

Stokes-Darcy耦合问题, 混合有限元, 统一近似, 二阶收敛性

A Unified Mixed Finite Element Approximation for Stokes-Darcy Coupling Problems with Second-Order Convergence

Fuwei Xie, Xiaohua Ma*

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Jan. 26th, 2025; accepted: Feb. 19th, 2025; published: Feb. 26th, 2025

Abstract

In this paper, a unified approximation with second-order convergence accuracy for the Stokes-Darcy coupled problem in the plane domain is presented. In this work, we modify the Darcy problem and enhance its positive definiteness, which allows us to apply the Mini-element improved with

*通讯作者。

P2-element to the entire coupled Stokes-Darcy problem. Moreover, since this second-order format has sufficient degrees of freedom on the coupled interface, we do not need to add additional functions on the interface to stabilize the discrete problem. Finally, the theoretical analysis is verified by two arithmetic examples, which prove that the scheme has good stability and accuracy for problems with different shapes of coupled interfaces.

Keywords

Coupled Stokes-Darcy Problem, Mixed Finite Element, Unified Approximation, Second-Order Convergence

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

由于在环境科学、生理学、生物工程、水文学和一些工业应用方面的重要性，近年来，许多用于解决 Stokes-Darcy 耦合问题的有效数值方法得到了快速发展。这两个方程在耦合界面处的取值往往受到质量守恒、法向力平衡和 BJS (Beavers-Joseph-Saffman) 条件的约束[1] [2]。

经过经典变分后，Stokes 方程的混合变分格式在任意协调有限元空间中都是正定的。而 Darcy 方程混合变分格式的正定性与压力离散空间密切相关。因此，适用于解决 Stokes 问题的有限元空间一般不适用于 Darcy 问题。有许多研究在两个区域采用不同的有限元空间(例如：[3]-[8])。其中一些文章[7] [8]采用了压力稳健格式，即速度的收敛性不再依赖于压力，使得压力本身的光滑性和低阶压力有限元空间不会影响速度的收敛。

为了在两个区域上使用相同的有限元空间，一些文章引入了惩罚项[9] [10]。另一方面，在[11]中，作者修改了耦合问题的公式，以便他们可以在两个区域上均匀地使用经典的 Mini 元素或 Taylor-Hood 元素。为了进一步发展统一的离散化，在[12]中，根据[13]的思想，作者修改了混合公式，使新问题与原问题有相同的解。在此基础上，作者将经典的 Mini 元素应用于改进的耦合二维 Stokes-Darcy 问题，使问题变得简单直接地实现。

在[12]中，作者使用的 Mini 元中压力和速度均基于 P_1 元，但由于在混合变分格式中速度要求梯度以及散度，所以均基于 P_1 元的速度空间会降低压力空间的收敛性。另外，由于 P_1 元在耦合界面上的自由度不足，作者需要在耦合界面上添加额外的稳定函数来保证近似解的稳定性。

本文的其余部分结构如下。在第 2 节中，我们陈述了经典的 Stokes-Darcy 耦合问题并对其进行了修改。在第 3 节中，我们提出了有限元离散化方法。在第 4 节中，我们构造了一个 Fortin 算子，在 Γ 具有特殊形状的条件下，证明了修改的 Stokes-Darcy 耦合问题的离散稳定条件，并在第 5 节中将其扩展到一般情况。最后，在第 6 节中，我们提供了两个数值例子来证实我们的结论。

2. Stokes-Darcy 耦合问题的陈述与修改

2.1. Stokes-Darcy 耦合问题的陈述

我们考虑一个多边形的有界开区域 $\Omega \subset R^2$ ，其被分为了两个多边形的子区域 Ω_s 和 Ω_d 。我们设 $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_s \cup \bar{\Omega}_d$ ， $\Omega_s \cap \Omega_d = \emptyset$ ， $\bar{\Omega}_s \cap \bar{\Omega}_d = \Gamma$ ，其中 Γ 表示耦合界面。最后，我们定义 $\Gamma_s = \partial\Omega_s \setminus \Gamma$ ，

$\Gamma_D = \partial\Omega_D \setminus \Gamma$ (如图 1)。

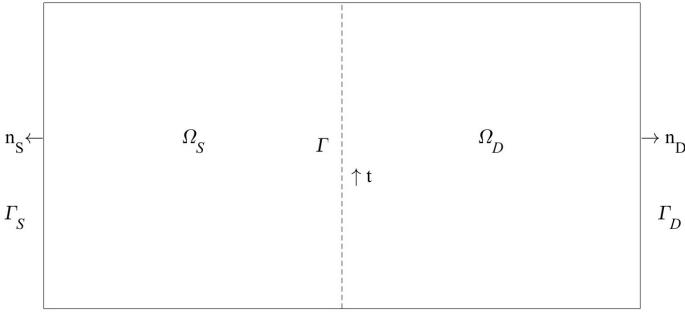


Figure 1. Two-dimensional domain diagram of coupling problem
图 1. 耦合问题的二维区域示意图

我们使用 $\mathbf{n}_S = (n_1^S, n_2^S)^T$ 和 $\mathbf{n}_D = (n_1^D, n_2^D)^T$ 来代表 $\partial\Omega_S$ 和 $\partial\Omega_D$ 上的单位外法向量, 考虑到两个区域上的函数性质不同, 对于定义在 Ω 上的任意函数, 我们定义 $\mathbf{v}_S = \mathbf{v}|_{\Omega_S}$ 和 $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}|_{\Omega_D}$ 。

在 Ω_S 中, 自由流体运动中速度 \mathbf{u}_S 和压力 p_S 由 Stokes 方程控制

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u}_S + \nabla p_S = \mathbf{f}_S, & \text{in } \Omega_S, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_S = g_S, & \text{in } \Omega_S, \\ \mathbf{u}_S = 0, & \text{in } \Gamma_S, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\mathbf{f}_S \in (L^2(\Omega_S))^2$ 代表单位质量的力, $g_S \in L^2(\Omega_S)$, $\mu > 0$ 代表粘度。

在 Ω_D 中, 多孔介质流动运动 Darcy 方程控制, 速度为 \mathbf{u}_D , 压力为 p_D

$$\begin{cases} \frac{\mu}{K}\mathbf{u}_D + \nabla p_D = \mathbf{f}_D, & \text{in } \Omega_D, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_D = g_D, & \text{in } \Omega_D, \\ \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D = 0, & \text{in } \Gamma_D, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $\mathbf{f}_D \in (L^2(\Omega_D))^2$ 代表单位质量的力, $g_D \in L^2(\Omega_D)$, $\mu > 0$ 代表粘度, K 代表渗透率常数。

在 Γ 上, 我们考虑以下耦合界面条件[4]

$$\begin{cases} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D + \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}_S = 0, \\ p_S \mathbf{n}_S - \mu \nabla \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}_S - p_D \mathbf{n}_D - \mu \frac{\alpha}{\sqrt{K}} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

其中第一个方程表示质量守恒, 第二个方程是由于法向力的平衡和 BJS 条件($\nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), i, j = 1, 2$)构成,

α 是通过实验证据确定的参数, \mathbf{t} 是 Γ 上的切向量。

我们用粗体表示向量值函数及其组成的空间。对于任意的子空间 $E \subset \Omega$, $\mathbf{H}^m(E)$ 的范数和半范数记作 $\|\cdot\|_{m,E}$ 和 $|\cdot|_{m,E}$ 并且用 $(\cdot, \cdot)_E$ 表示 $\mathbf{L}^2(E)$ 或 $L^2(E)$ 的内积。当 $E = \Omega$ 时, 则省去定义域下标。另外, $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$, $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0\}$ 。

结合边界及耦合界面条件, 速度空间可以定义为

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) : \mathbf{v}_S \in \mathbf{H}^1(\Omega_S), \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_S, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_D = 0 \text{ on } \Gamma_D \text{ and } \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}_D + \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}_S = 0 \text{ on } \Gamma\} \quad (2.4)$$

其范数为 $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} = \left(\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_S}^2 + \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega_D}^2 + \|div \mathbf{v}\|_{0,\Omega_D}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_S}^2 + \|\mathbf{v}\|_{H(div,\Omega_D)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ 。接下来, 我们定义压力空间

$$Q = L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0 \right\} \quad (2.5)$$

其范数为 $\|q\|_Q = \|q\|_0$ 。

然后, 耦合问题(2.1)~(2.3)的混合变分公式可以表述为: 找到 $(\mathbf{u}, p) \subset \mathbf{V} \times Q$ 满足

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ b(\mathbf{u}, q) = G(q) & \forall q \in Q. \end{cases} \quad (2.6)$$

其中

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_S} + \mu \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t}) (\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{t}) d\sigma + \frac{\mu}{K} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_D}, \\ b(\mathbf{v}, q) &= (q, div \mathbf{v}), \\ F(\mathbf{v}) &= (\mathbf{f}_S, \mathbf{v})_{\Omega_S} + (\mathbf{f}_D, \mathbf{v})_{\Omega_D}, G(q) = -(g_S, q)_{\Omega_S} - (g_D, q)_{\Omega_D}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2. Stokes-Darcy 耦合问题的修改

注意到, 双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 仅在 $\mathbf{V}_{0,D} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} : (q, div \mathbf{v})_{\Omega_D} = 0, \forall q \in Q \right\}$ 上正定, 而在 \mathbf{V} 上不为正定。这会给我们构建统一的有限元空间带来困难, 因此我们将修改耦合问题。

根据散度定理, 可得 $div \mathbf{V} \subset Q$, 同时对于 $\forall q \subset Q$, 都存在 $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ 使得 $q = div \mathbf{v}$ 。因此, 可以看到 $div \mathbf{V}$ 与 Q 是等距同构的。因此(2.6)中第二个方程 Q 中的元素可以用 $div \mathbf{V}$ 中的元素替换, 即

$$(div \mathbf{u}, div \mathbf{v}) = (g_D, div \mathbf{v}) \quad (2.8)$$

我们取其在 Ω_D 上的部分便可得

$$(div \mathbf{u}, div \mathbf{v})_{\Omega_D} = (g_D, div \mathbf{v})_{\Omega_D} \quad (2.9)$$

将(2.9)添加到(2.6)中的第一个方程, 我们可以得到修改后的耦合问题: 找到 $(\mathbf{u}, p) \subset \mathbf{V} \times Q$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \tilde{F}(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ b(\mathbf{u}, q) = G(q) & \forall q \in Q. \end{cases} \quad (2.10)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_S} + \mu \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t}) (\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{t}) d\sigma + \frac{\mu}{K} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_D} + (div \mathbf{u}, div \mathbf{v})_{\Omega_D}, \\ \tilde{F}(\mathbf{v}) &= (\mathbf{f}_S, \mathbf{v})_{\Omega_S} + (\mathbf{f}_D, \mathbf{v})_{\Omega_D} + (g_D, div \mathbf{v})_{\Omega_D}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

定理 2.1 对称连续双线性型 $\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 在 \mathbf{V} 上是正定的, 即存在正常数 C_1 和 C_2 使得

$$\begin{aligned} |\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq C_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}, & \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbf{V} \\ \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\geq C_2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2, & \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} \end{aligned} \quad (2.12)$$

证明: 根据迹定理和 holder 不等式, 我们可得

$$\begin{aligned}
|\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq \left| \mu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_S} \right| + \left| \frac{\mu}{K} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_D} \right| + \left| (div \mathbf{u}, div \mathbf{v})_{\Omega_D} \right| + \left| \mu \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t})(\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{t}) d\sigma \right| \\
&\leq \mu \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega_S} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_S} + \frac{\mu}{K} \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega_D} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega_D} + \|div \mathbf{u}\|_{0,\Omega_D} \|div \mathbf{v}\|_{0,\Omega_D} + \mu \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \left(\int_{\Gamma} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t})^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma} (\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{t})^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mu \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega_S} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_S} + \frac{\mu}{K} \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega_D} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega_D} + \|div \mathbf{u}\|_{0,\Omega_D} \|div \mathbf{v}\|_{0,\Omega_D} + \mu \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega_S} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_S} \\
&\leq C_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}.
\end{aligned}$$

同理可得

$$\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})_{\Omega_S} + \frac{\mu}{K} (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega_D} + (div \mathbf{u}, div \mathbf{u})_{\Omega_D} + \mu \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t})(\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t}) d\sigma \geq C_2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2.$$

3. 修改的 Stokes-Darcy 耦合问题的有限元近似

令 $\{S_h\}_{h>0}$ 为区域 Ω 的拟一致三角剖分族, 每个单元 $T \in S_h$ 位于 Ω_S 或 Ω_D 中(即 Γ 仅穿过单元的边缘, 不穿过任何单元内部)。我们将任意 $T \in S_h$ 的直径表示为 h_T , 且令 $h = \max(h_T)$ 。根据拟一致网格的性质, 我们有 $\frac{h_T}{h} \geq C, \forall T \in S_h$ 。从现在开始, 我们将用 C 表示一个通用正常数, 它不一定每次出现时都相同, 但都与 h 无关。

对于 $\forall T \in S_h$, 气泡函数定义为

$$b_T(x) = \begin{cases} \lambda_1(x)\lambda_2(x)\lambda_3(x), & x \in T, \\ 0, & x \notin T. \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)$ 分别表示 $\forall T \in S_h$ 三个顶点上的一次帽函数。显然, $b_T(x) \in H_0^1(T) \subset H_0^1(\Omega)$ 。

然后我们给出如下的速度有限元空间

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_h = & \left\{ \mathbf{v}_h^S \in \mathbf{C}^0(\Omega_S), \mathbf{v}_h^D \in \mathbf{C}^0(\Omega_D) : \mathbf{v}_h|_T \in \mathbf{P}_2(T), \forall T \in S_h, \mathbf{v}_h = 0 \text{ on } \Gamma_S, \right. \\
& \left. \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_D = 0 \text{ on } \Gamma_D \text{ and } \mathbf{v}_h^D \cdot \mathbf{n}_D + \mathbf{v}_h^S \cdot \mathbf{n}_S = 0 \text{ on } \Gamma \right\} \oplus \left(\text{span} \{b_T(x); \forall T \in S_h\} \right)^2
\end{aligned} \quad (3.2)$$

和压力的有限元空间

$$\mathcal{Q}_h = \left\{ q_h^S \Big|_{\Omega_S} \in C^0(\Omega_S), q_h^D \Big|_{\Omega_D} \in C^0(\Omega_D) : q_h|_T \in P_1(T), \forall T \in S_h \right\} \cap \mathcal{Q} \quad (3.3)$$

然后我们从(2.9)得到离散的混合问题: 找到 $(\mathbf{u}_h, p_h) \subset \mathbf{V}_h \times \mathcal{Q}_h$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = \tilde{F}(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = G(q_h) & \forall q_h \in \mathcal{Q}_h. \end{cases} \quad (3.4)$$

4. 具有特殊形状的耦合界面的稳定性分析

在本节中, 我们假设耦合界面 Γ 满足以下几何性质(我们会在下一章移除该假设):

假设 4.1 Γ 是一条穿过 Ω 的无分支的折线段, 其两个端点是与 $\partial\Omega$ 的交点。

4.1. 一些引理

引理 4.2 [14] $\lambda_i(x), \lambda_j(x), \lambda_k(x)$ 为 $\forall T \in S_h$ 的三个顶点上的一次帽函数, 则

$$\int_T \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta \lambda_k^\gamma dx = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2|T|, \quad \|\lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta \lambda_k^\gamma\|_1 \leq C \quad (4.1)$$

其中 α, β, γ 是非负整数。另外, 在该单元的边 e_{ij} 上有

$$\int_e \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta d\sigma = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} 2|e| \quad (4.2)$$

引理 4.3 [14] 设 $P_h : \mathbf{H}^1(E) \rightarrow \mathbf{P}_1(E)$ 是 L^2 投影算子, 则其满足

$$\|P_h \mathbf{v}\|_{1,E} + h^{-1} \|\mathbf{v} - P_h \mathbf{v}\|_{0,E} + \|\mathbf{v} - P_h \mathbf{v}\|_{1,E} \leq C \|\mathbf{v}\|_{1,E} \quad (4.3)$$

引理 4.4 [15] 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|\mathbf{v}\|_{0,\partial E} \leq C \|\mathbf{v}\|_{0,E}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{1,E}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(E) \quad (4.4)$$

4.2. 构造 Fortin 算子

根据假设 4.1 可得经过三角剖分后, Γ 被分成 m 段, 共有 $m+1$ 个节点。其中每段 $e_{i\Gamma}$ ($i=1:m$) 为单元 T 的一条边, 每个节点 i_Γ ($i=1:m$) 为单元 T 的一个顶点。并且在节点 i_Γ 上的帽函数 $\lambda_{i\Gamma}$ 的支集最多含有 Γ 上的两条边, 对于相邻的两个帽函数 $\lambda_{i\Gamma}, \lambda_{j\Gamma}$, 他们支集的交集只含有 Γ 上的一条边。定义 $\Psi_0 = 4\lambda_{0\Gamma} \lambda_{1\Gamma} \mathbf{n}_1$, $\Psi_m = 4\lambda_{m-1\Gamma} \lambda_{m\Gamma} \mathbf{n}_n$, $\Psi_i = \lambda_{i\Gamma} (2\lambda_{i\Gamma} - 1)(\mathbf{n}_{i-1} + \mathbf{n}_i)$, ($i=1:m-1$)。其中, \mathbf{n}_i ($i=1:m$) 为边 $e_{i\Gamma}$ 的单位法向量, 指向 Ω_S 外侧。根据定义可得, $\text{span}(\Psi_i, i=0:m) \subset \mathbf{V}_h$, $Q_h|_\Gamma \subset \text{span}(\lambda_{i\Gamma}, i=0:m)$ 。

定理 4.5 存在算子 $r_h : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_h$ 使得

$$b(\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}, q_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (4.5)$$

证明: 定义

$$r_h \mathbf{v} = P_h \mathbf{v} + \sum_{T \in S_h} \mathbf{c}_T b_T + \sum_{i=0}^n k_i \Psi_i, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (4.6)$$

利用格林公式可得

$$b(\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}, q_h) = \sum_{T \in S_h} \left(\int_T \nabla q_h \cdot (\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}) dx \right) - \int_\Gamma (q_h^S - q_h^D) (\mathbf{v}_S - r_h \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n}_S dt. \quad (4.7)$$

由于 ∇q_h 在 T 上是常向量且 $Q_h|_\Gamma \subset \text{span}(\lambda_{i\Gamma}, i=0:m)$, 所以若式(4.5)成立, 只需

$$\int_\Gamma \lambda_{i\Gamma} (\mathbf{v}_S - r_h \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n}_S d\sigma = 0, \quad i = 0:m, \quad (4.8)$$

$$\int_\Omega \mathbf{v} - r_h \mathbf{v} = 0, \quad \forall T \in S_h. \quad (4.9)$$

将(4.6)代入(4.8)可得

$$\sum_{j=0}^m k_j \int_\Gamma \lambda_{i\Gamma} \Psi_j \cdot \mathbf{n}_S d\sigma = \int_\Gamma \lambda_{i\Gamma} (\mathbf{v}_S - P_h \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n}_S d\sigma, \quad i = 0:m. \quad (4.10)$$

利用引理 4.2 可以将(4.10)转化为下述线性方程组

$$A_\Gamma K = F_\Gamma \quad (4.11)$$

其中

$$A_\Gamma = \text{diag} \left(\frac{|e_{1\Gamma}|}{3}, \frac{(|e_{1\Gamma}| + |e_{2\Gamma}|)(1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)}{6}, \dots, \frac{(|e_{i\Gamma}| + |e_{i+1\Gamma}|)(1 + \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i+1})}{6}, \dots, \frac{(|e_{m-1\Gamma}| + |e_{m\Gamma}|)(1 + \mathbf{n}_{m-1} \cdot \mathbf{n}_m)}{6}, \frac{|e_{m\Gamma}|}{3} \right),$$

$$K = (k_0, \quad k_1, \quad \dots \quad k_i \quad \dots \quad k_{m-1}, \quad k_m)^T,$$

$$F_\Gamma = \left(\int_\Gamma \lambda_{0\Gamma} (\mathbf{v}_S - P_h \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n}_S d\sigma, \quad \int_\Gamma (\lambda_{1\Gamma} - \lambda_{0\Gamma}) (\mathbf{v}_S - P_h \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n}_S d\sigma, \quad \dots \quad \int_\Gamma \lambda_{i\Gamma} (\mathbf{v}_S - P_h \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n}_S d\sigma \quad \dots \right.$$

$$\left. \dots \quad \int_\Gamma (\lambda_{m-1\Gamma} - \lambda_{m\Gamma}) (\mathbf{v}_S - P_h \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n}_S d\sigma, \quad \int_\Gamma \lambda_{m\Gamma} (\mathbf{v}_S - P_h \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n}_S d\sigma \right)^T.$$

根据拟一致剖分的性质可得, 存在与 h 无关的常数 C , 使得 $1 + \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i+1} \geq C > 0$ 。因此, 方程组(4.11)存在唯一解。

接着利用引理 4.2 并使用同样的方法将(4.6)代入(4.9)可得

$$\mathbf{c}_T = \frac{60 \int_T \left(\mathbf{v} - P_h \mathbf{v} - \sum_{i=0}^m k_i \boldsymbol{\psi}_i \right) dx}{|T|}, \quad \forall T \in S_h. \quad (4.12)$$

由此可得 \mathbf{c}_T 存在唯一解, 定理 4.5 得证。

定理 4.6 对于 $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, 算子 r_h 满足

$$\|r_h \mathbf{v}\|_V \leq C \|\mathbf{v}\|_1. \quad (4.13)$$

证明: 利用 holder 不等式, $1 + \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i+1} \geq C > 0$, 引理 4.3 以及引理 4.4 可由(4.11)得

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m |k_i|^2 &\leq \sum_{i=0}^m Ch^{-2} \left(\int_{\Gamma} \lambda_{it} (\mathbf{v}_s - P_h \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n}_s d\sigma \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=0}^m Ch^{-2} \left(\int_{\Gamma} \lambda_{it}^2 d\sigma \|\mathbf{v}_s - P_h \mathbf{v}_s\|_{0,e_{it}}^2 \right) \\ &\leq Ch^{-1} \|\mathbf{v}_s - P_h \mathbf{v}_s\|_{0,\Gamma}^2 \\ &\leq Ch^{-1} \|\mathbf{v}_s - P_h \mathbf{v}_s\|_{0,\Omega_s} \|\mathbf{v}_s - P_h \mathbf{v}_s\|_{1,\Omega_s} \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|_1^2. \end{aligned}$$

利用相同的方法可由(4.11)得

$$\begin{aligned} \sum_{T \in S_h} \|\mathbf{c}_T\|^2 &\leq Ch^{-4} \sum_{T \in S_h} \left(\int_T \left(\mathbf{v} - P_h \mathbf{v} - \sum_{i=0}^m k_i \boldsymbol{\psi}_i \right) dx \right)^2 \\ &\leq Ch^{-4} \sum_{T \in S_h} \left(\int_T 1 dx \right)^2 \left\| \mathbf{v} - P_h \mathbf{v} - \sum_{i=0}^m k_i \boldsymbol{\psi}_i \right\|_{0,T}^2 \\ &\leq Ch^{-2} \left\| \mathbf{v} - P_h \mathbf{v} - \sum_{i=0}^m k_i \boldsymbol{\psi}_i \right\|_0^2 \\ &\leq C \left(\|\mathbf{v}\|_1 + h^{-1} \left\| \sum_{i=0}^m k_i \boldsymbol{\psi}_i \right\|_0 \right)^2. \end{aligned}$$

结合引理 4.2 可得

$$\begin{aligned} \|r_h \mathbf{v}\|_V &\leq \|r_h \mathbf{v}\|_1 \leq \|P_h \mathbf{v}\|_1 + \left\| \sum_{T \in S_h} \mathbf{c}_T b_T \right\|_1 + \left\| \sum_{i=0}^m k_i \boldsymbol{\psi}_i \right\|_1 \\ &= \|P_h \mathbf{v}\|_1 + \left(\sum_{T \in S_h} \|\mathbf{c}_T b_T\|_{1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{T \in S_h} \left\| \sum_{i \in T} k_i \boldsymbol{\psi}_i \right\|_{1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|_1 + C \left(\sum_{T \in S_h} \|\mathbf{c}_T\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C \left(\sum_{i=0}^m \|k_i \boldsymbol{\psi}_i\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|_1 + C \left(\sum_{T \in S_h} \|\mathbf{c}_T\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C \left(\sum_{i=0}^m |k_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|_1 + Ch^{-1} \left\| \sum_{i=0}^m k_i \boldsymbol{\psi}_i \right\|_0 + C \left(\sum_{i=0}^m |k_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\mathbf{v}\|_1. \end{aligned}$$

定理 4.7 存在常数 $C > 0$ ，使得

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}}} \geq C \|q_h\|_Q, \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (4.14)$$

证明：根据[16]中的经典结论，存在 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ 使得 $\operatorname{div} \mathbf{v} = -q_h$ 并且 $\|\mathbf{v}\|_1 \leq C \|q_h\|_0$ ， $\forall q_h \in Q_h$ 。结合**定理 4.5**以及**定理 4.6**，可得：对于 $\forall q_h \in Q_h$ ，存在 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ 使得

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}}} \geq \frac{b(r_h \mathbf{v}, q_h)}{\|r_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} = \frac{b(\mathbf{v}, q_h)}{\|r_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} = \frac{\|q_h\|_0^2}{\|r_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} \geq C \frac{\|q_h\|_0^2}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq C \|q_h\|_0.$$

5. 一般形状的耦合界面的稳定性分析

在本节中，我们考虑一般情况下的稳定性分析，即 Γ 是任意折线段，将 Ω 分成多个不连通区域。

对此，我们可以将 Γ 分成 M 段(与 h 无关)仅有端点相交的无分支的折线段 Γ_j ($j=1:M$)，满足 $\Gamma = \bigcup_{j=1}^M \Gamma_j$ 且每段 Γ_j 至多有两个端点落在 $\partial\Omega$ 上。根据第四节中的方法，我们可以构造如下的 Fortin 算子

$$r_h \mathbf{v} = P_h \mathbf{v} + \sum_{T \in S_h} \mathbf{c}_T b_T + \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^n k_{ij} \Psi_{ij}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (5.1)$$

并运用相同的方法，我们依然能够证明**定理 4.7**在一般情况下成立。

定理 5.1 若**定理 2.1**和**定理 4.7**成立，且问题(2.9)的解 (\mathbf{u}, p) 满足 $\mathbf{u}_s \in \mathbf{H}^3(\Omega_s)$ ， $\mathbf{u}_D \in \mathbf{H}^3(\Omega_D)$ $p_s \in H^2(\Omega_s)$ ， $p_D \in H^2(\Omega_D)$ 则离散问题(3.4)的解 (\mathbf{u}_h, p_h) 满足如下误差估计

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|p - p_h\|_Q \leq Ch^2 (\|\mathbf{u}\|_{3,\Omega_s} + \|\mathbf{u}\|_{3,\Omega_D} + \|p\|_{2,\Omega_s} + \|p\|_{2,\Omega_D}). \quad (5.2)$$

6. 数值实验

在本节中，我们将使用三个具有不同形状耦合界面的示例来测试理论收敛结果，其中前两个例子中 Γ 穿过 Ω ，第三个例子中 Γ 是 Ω 中的闭环。我们定义以下误差符号

$$\begin{aligned} e_0(\mathbf{u}_s) &= \|\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_h^s\|_{0,\Omega_s} & e_1(\mathbf{u}_s) &= \|\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_h^s\|_{1,\Omega_s} & e_0(\mathbf{u}_D) &= \|\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_h^D\|_{0,\Omega_D} \\ e_0(\operatorname{div} \mathbf{u}_D) &= \|\operatorname{div} \mathbf{u}_D - \operatorname{div} \mathbf{u}_h^D\|_{0,\Omega_D} & e_0(p) &= \|p - p_h\|_0 \end{aligned}$$

收敛阶符号定义为

$$r_i = \frac{\log\left(\frac{e_i}{e'_i}\right)}{\log\left(\frac{h}{h'}\right)}, \quad i = 0, 2$$

6.1. 数值实验例 1

在第一个数值算例中，我们设 $\Omega_s = (0,1) \times (0,1)$ ， $\Omega_D = (1,2) \times (0,1)$ ， $\Gamma = 1 \times (0,1)$ 。解析解为：

$$\begin{cases} \mathbf{u}_s = \begin{pmatrix} \sin(\pi x)y(y-1) \\ x(2x-3)y(y-1) \end{pmatrix}, p_s = -\pi x^2 y(2y-1) + \frac{5\pi}{12} \\ \mathbf{u}_D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ \frac{1}{2} \cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix}, p_D = -\pi x^2 y + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \quad (6.1)$$

上述解析解满足 Stokes-Darcy 耦合问题(2.1)~(2.3), 其误差和相应的收敛阶如表 1 所示。

Table 1. The errors and the rates of convergence of example 1
表 1. 例 1 的误差和相应的收敛阶

(a)					
h	$e_0(\mathbf{u}_s)$	$r_0(\mathbf{u}_s)$	$e_1(\mathbf{u}_s)$	$r_1(\mathbf{u}_s)$	$e_0(\mathbf{u}_D)$
1/4	6.869e-04	-	1.661e-02	-	6.272e-02
1/8	7.394e-05	3.21	4.036e-03	2.04	1.746e-02
1/16	8.176e-06	3.17	1.001e-03	2.01	4.555e-03
1/32	9.496e-07	3.05	2.497e-04	2.00	1.156e-03

(b)					
h	$r_0(\mathbf{u}_D)$	$e_0(div \mathbf{u}_D)$	$r_0(div \mathbf{u}_D)$	$e_0(p)$	$r_0(p)$
1/4	-	6.077e-02	-	6.945e-02	-
1/8	1.84	1.508e-02	2.01	1.557e-02	2.14
1/16	1.94	3.764e-03	2.00	3.831e-03	2.04
1/32	1.98	9.406e-04	2.00	9.501e-04	2.01

6.2. 数值实验例 2

Table 2. The errors and the rates of convergence of example 2

表 2. 例 2 的误差和相应的收敛阶

(a)					
h	$e_0(\mathbf{u}_s)$	$r_0(\mathbf{u}_s)$	$e_1(\mathbf{u}_s)$	$r_1(\mathbf{u}_s)$	$e_0(\mathbf{u}_D)$
1/4	3.643e-01	-	9.974e-01	-	9.155e-01
1/8	4.219e-02	3.11	2.459e-01	2.02	2.402e-01
1/16	5.025e-03	3.07	6.148e-02	2.00	6.349e-02
1/32	6.151e-03	3.03	1.526e-02	2.01	1.632e-02

(b)					
h	$r_0(\mathbf{u}_D)$	$e_0(div \mathbf{u}_D)$	$r_0(div \mathbf{u}_D)$	$e_0(p)$	$r_0(p)$
1/4	-	5.638e-00	-	3.770e-01	-
1/8	1.93	1.371e-00	2.04	9.041e-02	2.06
1/16	1.92	3.427e-01	2.00	2.229e-02	2.02
1/32	1.96	8.568e-02	2.00	5.534e-03	2.01

在第二个数值算例中, 我们设 $\Omega_s = (0, \pi) \times (0, \pi)$, $\Omega_D = (0, \pi) \times (-\pi, 0)$, $\Gamma = (0, \pi) \times 0$ 。解析解为:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_s = \begin{pmatrix} 2 \sin y \cos y \cos x \\ (\sin^2 y - 2) \sin x \end{pmatrix}, p_s = \sin x \sin y \\ \mathbf{u}_D = \begin{pmatrix} -(e^y - e^{-y}) \cos x \\ -(e^y + e^{-y}) \sin x \end{pmatrix}, p_D = (e^y - e^{-y}) \sin x \end{cases} \quad (6.2)$$

同样, 上述解析解满足 Stokes-Darcy 耦合问题(2.1)~(2.3), 其误差和相应的收敛阶如表 2 所示。

6.3. 数值实验例 3

Table 3. The errors and the rates of convergence of example 3
表 3. 例 3 的误差和相应的收敛阶

(a)					
h	$e_0(\mathbf{u}_s)$	$r_0(\mathbf{u}_s)$	$e_1(\mathbf{u}_s)$	$r_1(\mathbf{u}_s)$	$e_0(\mathbf{u}_D)$
1/4	5.372e-01	-	1.282e-00	-	1.168e-00
1/8	3.838e-02	3.80	2.840e-01	2.17	3.370e-01
1/16	2.965e-03	3.69	6.540e-02	2.11	9.155e-02
1/32	2.791e-04	3.40	1.601e-02	2.03	2.436e-02

(b)					
h	$r_0(\mathbf{u}_D)$	$e_0(div \mathbf{u}_D)$	$r_0(div \mathbf{u}_D)$	$e_0(p)$	$r_0(p)$
1/4	-	1.013e-00	-	1.282e-00	-
1/8	1.80	2.563e-01	1.90	3.889e-01	1.72
1/16	1.88	5.553e-02	2.20	9.672e-02	2.01
1/32	1.91	1.371e-02	2.01	2.393e-02	2.00

在第三个数值算例中, 我们设 $\Omega_s = \left(-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $\Omega_d = \left(-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ 。解析解为:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_s = \begin{pmatrix} \sin(x)\cos(y) \\ \cos(x)\sin(y) \end{pmatrix}, p_s = \frac{1}{2}\cos(x)\cos(y) \\ \mathbf{u}_d = \begin{pmatrix} \frac{32\sqrt{2}}{375\pi^3} \left(x + \frac{5\pi}{2}\right) \left(x - \frac{5\pi}{2}\right) \cos(y) \\ \frac{32\sqrt{2}}{375\pi^3} \left(y + \frac{5\pi}{2}\right) \left(y - \frac{5\pi}{2}\right) \cos(x) \end{pmatrix}, p_d = -\frac{1}{2}\cos(x)\cos(y) \end{cases} \quad (6.3)$$

第三个例子的解析解同样满足 Stokes-Darcy 耦合问题(2.1)~(2.3)。在该例子中, Ω_s 被包裹在 Ω_d 中, 并且 $\Gamma = \partial\Omega_s$ 是 Ω 中的一个闭环。 \mathbf{u}_s 在 $\partial\Omega$ 上的值完全由耦合界面条件(2.3)决定, 但如同理论分析一样, 我们仍能得到良好的收敛性, 如表 3 所示。

7. 结论

本文给出了平面区域中 Stokes-Darcy 耦合问题的具有二阶收敛精度的统一近似格式。

相比于在两个区域上使用不同有限元空间的数值格式, 虽然在两个区域上的网格剖分可以不相同, 网格剖分的选择更加灵活。但两个不同有限元空间的函数在耦合界面 Γ 上的迹常常无法兼容, 需要添加拉格朗日乘子, 以弱形式来满足耦合界面条件 $\mathbf{v}_h^D \cdot \mathbf{n}_D + \mathbf{v}_h^S \cdot \mathbf{n}_S = 0$ 。而本文提出的统一有限元格式, 由于在两个区域上的有限元空间是相同的, 所以当我们对整个区域 Ω 进行统一剖分后, 只需耦合界面 Γ 上的基函数进行适当的合并, 可以自然地满足耦合界面条件 $\mathbf{v}_h^D \cdot \mathbf{n}_D + \mathbf{v}_h^S \cdot \mathbf{n}_S = 0$ 。

参考文献

- [1] Beavers, G.S. and Joseph, D.D. (1967) Boundary Conditions at a Naturally Permeable Wall. *Journal of Fluid Mechanics*,

- 30, 197-207. <https://doi.org/10.1017/s0022112067001375>
- [2] Saffman, P.G. (1971) On the Boundary Condition at the Surface of a Porous Medium. *Studies in Applied Mathematics*, **50**, 93-101. <https://doi.org/10.1002/sapm197150293>
- [3] Cao, P. and Chen, J. (2022) An Extended Finite Element Method for Coupled Darcy-Stokes Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **123**, 4586-4615. <https://doi.org/10.1002/nme.7047>
- [4] Gatica, G., Oyarzúa, R. and Sayas, F. (2011) Analysis of Fully-Mixed Finite Element Methods for the Stokes-Darcy Coupled Problem. *Mathematics of Computation*, **80**, 1911-1948. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-2011-02466-x>
- [5] Gatica, G.N., Meddahi, S. and Oyarzúa, R. (2008) A Conforming Mixed Finite-Element Method for the Coupling of Fluid Flow with Porous Media Flow. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **29**, 86-108. <https://doi.org/10.1093/imanum/drm049>
- [6] Lederer, P.L., Linke, A., Merdon, C. and Schöberl, J. (2017) Divergence-Free Reconstruction Operators for Pressure-Robust Stokes Discretizations with Continuous Pressure Finite Elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **55**, 1291-1314. <https://doi.org/10.1137/16m1089964>
- [7] Linke, A. and Merdon, C. (2016) Pressure-Robustness and Discrete Helmholtz Projectors in Mixed Finite Element Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **311**, 304-326. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.08.018>
- [8] Lv, D. and Rui, H. (2024) A Pressure-Robust Mixed Finite Element Method for the Coupled Stokes-Darcy Problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **436**, Article ID: 115444. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115444>
- [9] Nicaise, S., Ahounou, B. and Houedanou, W. (2015) Residual-Based a Posteriori Error Estimates for a Nonconforming Finite Element Discretization of the Stokes-Darcy Coupled Problem: Isotropic Discretization. *Afrika Matematika*, **27**, 701-729. <https://doi.org/10.1007/s13370-015-0370-3>
- [10] Rui, H. and Zhang, R. (2009) A Unified Stabilized Mixed Finite Element Method for Coupling Stokes and Darcy Flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **198**, 2692-2699. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.03.011>
- [11] Karper, T., Mardal, K. and Winther, R. (2008) Unified Finite Element Discretizations of Coupled Darcy-Stokes Flow. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **25**, 311-326. <https://doi.org/10.1002/num.20349>
- [12] Armentano, M.G. and Stockdale, M.L. (2019) A Unified Mixed Finite Element Approximations of the Stokes-Darcy Coupled Problem. *Computers & Mathematics with Applications*, **77**, 2568-2584. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.12.032>
- [13] Brezzi, F., Fortin, M. and Marini, L.D. (1993) Mixed Finite Element Methods with Continuous Stresses. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **3**, 275-287. <https://doi.org/10.1142/s0218202593000151>
- [14] Brenner, S.C. (2008) The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer.
- [15] Adams, R.A. and Fournier, J.J. (2003) Sobolev Spaces. Elsevier.
- [16] Girault, V. and Raviart, P.A. (2012) Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms (Vol. 5). Springer Science & Business Media.