Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2025, 14(2), 410-417
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2025.142081

Hans汉斯

一道二阶线性微分方程题目的多种解法及思想方法的意义

张光威，朱永婷*

国防科技大学外国语学院，江苏 南京

收稿日期：2025年1月26日；录用日期：2025年2月19日；发布日期：2025年2月26日

摘 要

文章以一道二阶线性微分方程为例，归纳出六种不同的解题方法，分别是常数变易法、微分算子法、Laplace变换、配凑法、待定系数法、程序法，并进一步阐述微分方程的一题多解，有利于学生搭建完整的知识体系结构，从多个角度体会解题方法和技巧，提高学生的发散思维和创新能力。

关键词

二阶线性微分方程，发散思维，创新能力，一题多解

Multiple Solutions to a Second-Order Linear Differential Equation Problem and the Significance of the Thinking Methods

Guangwei Zhang, Yongting Zhu*

School of Foreign Languages, National University of Defense Technology, Nanjing Jiangsu

Received: Jan. 26th, 2025; accepted: Feb. 19th, 2025; published: Feb. 26th, 2025

Abstract

Taking a second-order linear differential equation as an example, this paper summarizes six different problem-solving methods, namely the method of variation of constants, the differential operator method, the Laplace transform method, the method of assembling and matching, the method of undetermined coefficients, and the programming method. Furthermore, it elaborates that multiple solutions to one differential equation problem are beneficial for students to build a complete

*通讯作者。

文章引用: 张光威, 朱永婷. 一道二阶线性微分方程题目的多种解法及思想方法的意义[J]. 应用数学进展, 2025, 14(2): 410-417. DOI: 10.12677/aam.2025.142081

knowledge system structure, experience problem-solving methods and techniques from multiple perspectives, and improve students' divergent thinking and innovative abilities.

Keywords

Second-Order Linear Differential Equation, Divergent Thinking, Innovative Ability, Multiple Solutions to One Problem

1. 引言

微分方程是高等数学的重要组成部分，它与极限、微分、积分等概念紧密相连，其理论和方法为其它数学分支的发展提供了重要的工具和思想。微分方程为解决复杂的物理、工程、生物、经济等问题提供了有力的数学工具。比如在机械震动分析、电路分析、结构动力学等，二阶线性微分方程出现较多。在实际问题求解中，仅仅依靠教材、文献中的一些求解思路和求解方法，有时候并不能达到满意的效果，由此我们需要从不同角度来探求解决问题的方法，培养学生的发散性思维和创新能力。

探求二阶线性微分方程的一题多解的方法，不仅有助于我们解决一些实际问题，也进一步拓展和深化了二阶微分方程的数学解法，对于丰富二阶微分方程的数学解法很有意义[1]。鉴于此，本文以一道二阶常系数线性微分方程为例，详细分析并给出多种解法，以此为契机，谈一谈一题多解对学生数学思维培养所发挥的重要作用。

2. 经典解析

例 1 求解 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解。

解法 1 待定系数法[2]

该方程的齐次方程为

$$y''-5y'+6y=0$$

则对应的特征方程为

$$r^2-5r+6=0$$

解得

$$r_1=2, r_2=3$$

则齐次微分方程的通解为

$$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$$

由于 $\lambda=2$ 是特征方程 $r^2-5r+6=0$ 的根，可设特解为

$$y^*=x\left(b_0x+b_1\right)e^{2x}$$

代入方程可得

$$-2b_0x+2b_0-b_1=x$$

对比两边系数可得

$$\begin{cases}-2b_0=1\\2b_0-b_1=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}b_0=-\dfrac{1}{2}\\b_1=-1\end{cases}$$

因此特解为

$$y^*=\mathrm{e}^{2x}\left(-x-\frac{x^2}{2}\right)$$

那么，原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^{2x}$$

注 1 待定系数法是用来求微分方程解特解的方法，当 $y''+py'+qy=f(x)$ 中的 $f(x)$ 为 $f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 和 $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right]$ 这两种形式时，将假设的特解代入微分方程，通过比较系数法得到方程的特解。该解法比较基础，相较于常数变易法，计算量小，更加简单，要求学生熟练掌握。

解法 2 常数变易法

由解法 1，可得齐次方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$$

因此可设原方程的解为

$$y=u_1\mathrm{e}^{2x}+u_2\mathrm{e}^{3x}$$

由常数变易法可知

$$\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{3x}\\2\mathrm{e}^{2x} & 3\mathrm{e}^{3x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1'\\u_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\x\mathrm{e}^{2x}\end{bmatrix}$$

由克拉姆法则，得

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & \mathrm{e}^{3x}\\x\mathrm{e}^{2x} & 3\mathrm{e}^{3x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{3x}\\2\mathrm{e}^{2x} & 3\mathrm{e}^{3x}\end{vmatrix}}=-x$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{2x} & 0\\2\mathrm{e}^{2x} & xe^{2x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{3x}\\2\mathrm{e}^{2x} & 3\mathrm{e}^{3x}\end{vmatrix}}=x\mathrm{e}^{-x}$$

积分可得

$$u_1=-\frac{1}{2}x^2+D_3，\quad u_2=-\left(\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}\right)+D_4$$

故原方程的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - x e^{2x}$$

注 2 该解法在解法 1 的基础上，采用常数变易法求出非齐次方程的通解。常数变易法是用来求解通解的方法，其核心思想是在求得对应齐次方程的通解后，将通解中的常数 C_1、C_2 假设为 $u_1(x)$、$u_2(x)$，接着通过求导和代入原方程，求解出 $u_1(x)$、$u_2(x)$，进而得到原方程的通解。解法 1 和解法 2 都需要在得到对应齐次方程通解的前提下，才能最终求得微分方程的通解，理论上讲解法 2 适用范围更广。常数变易法是从齐次方程通解过渡到非齐次方程通解的一种常见且有效的解题方法。

解法 3 配凑法

通过观察，把原方程配凑为

$$(y'' - 2y') - (3y' - 6y) = x e^{2x}$$

令 $y' - 2y = t$，可化为一阶方程为

$$t' - 3t = x e^{2x}$$

解得

$$t = e^{\int 3 dx} \left(\int x e^{2x} e^{\int -3 dx} dx \right) = -e^{2x} (1 + x) + C_1 e^{3x}$$

即

$$y' - 2y = -e^{2x} (1 + x) + C_1 e^{3x}$$

那么可得

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - x e^{2x}$$

注 3 通过观察分析法，对原方程进行拆分、配凑成恰当的形式，方便进一步求解。该解法比较灵活，配凑的技巧需要多观察、多练习、多积累。

解法 4 微分算子[3]

令 $\frac{d}{dx} = D$，则原方程可化为

$$(D^2 - 5D + 6) y = x e^{2x}$$

即原微分方程的一个特解为

$$y^* = \frac{x e^{2x}}{(D-2)(D-3)}$$

可得

$$y^* = \frac{x e^{2x}}{D(D-1)} = e^{2x} \frac{1}{D} \frac{x}{D-1}$$

即

$$y^* = e^{2x} \frac{1}{D} (-x - Dx)$$

那么特解为

$$y^* = e^{2x}\left(-x - \frac{x^2}{2}\right)$$

在方法 1 中，可知对应齐次微分方程的通解为

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

因此，可以得到原微分方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - x e^{2x}$$

注 4 在数学中，微分算子是定义为微分运算之函数的算子，常用于微分方程领域。首先在记号上，将微分考虑为一个抽象运算是有帮助的，它接受一个函数得到另一个函数，并且微分算子满足以下几点性质：

性质 1. 当 $F(D) = D^m$ 时，$\dfrac{1}{F(D)} f^{(m)}(x) = f(x)$。

性质 2. 若 $F(D) = (D-b)(D-a)$，则 $\dfrac{1}{F(D)} f(x) = \dfrac{1}{D-b}\dfrac{1}{D-a} f(x)$。

性质 3. $\dfrac{1}{F(D)} e^{kx} = \dfrac{1}{F(k)} e^{kx}$，其中：$F(k) \neq 0$。

性质 4. $\dfrac{1}{F(D)} u(x) e^{kx} = e^{kx} \dfrac{1}{F(D+k)} u(x)$。

性质 5. 若 $F(D) = D - k$，则 $\dfrac{1}{F(D)} x^a = \left(-\dfrac{1}{k} - \dfrac{D}{k^2} - \cdots - \dfrac{D^a}{k^{a+1}}\right) x^a$。

该方法要求学生熟悉微分算子及其性质，并能灵活地运用在微分方程的求解之中。

解法 5 Laplace 变换

对原微分方程进行 Laplace 变换，可得到

$$\left(s^2 - 5s + 6\right) F(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

即

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)^3 (s-3)}$$

整理得

$$F(s) = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)^3}$$

由 Laplace 逆变换得特解为

$$y^* = e^{-3x} - e^{-2x} - x e^{-2x} - \frac{x^2}{2} e^{-3x}$$

又因为原微分方程对应的齐次微分方程的通解为

$$Y = D_1 e^{2x} + D_2 e^{3x}$$

故可得通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - xe^{2x}$$

注 5 Laplace 变换是一个线性变换，其基本原理就是将以 x 为变量的函数变换为以 s 为变量的代数函数[4]。利用这一性质我们通过 Laplace 变换将微分方程转化为代数方程，进而简化解题的过程。最后利用 Laplace 逆变换将以 s 为变量的代数函数变换回以 x 为变量的函数，完成对微分方程特解的求解。该方法具有一定的高阶性，要求学生对 Laplace 变换及性质有一定的了解。

解法 6 Python 法

打开 Python 并输入以下代码

```
from sympy import *
f = Function ("f")
x = symbols ("x")
eq = f(x).diff(x, 2)-5*f(x).diff(x) + 6*f(x)-x*(exp(2*x))
pprint(dsolve(eq, f(x)))
```

上述的结果为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - xe^{2x}$$

$$y'' - 4y' + 4y = 6x^2 + 8e^{2x}$$

注 6 运用程序可以快速求解微分方程，也是 Python 编程在科学计算中的应用，这基于学生有一定的编程基础。

3. 一题多解的意义

针对一道二阶线性微分方程题目，本文给出了六种解法，每种方法各有千秋，在教学实践中，一题多解在培养学生的思维方式、学习习惯和探究精神方面具有重要的意义。[5]

首先培养发散思维、创新能力。一题多解鼓励从不同角度、不同思路去思考问题，这对学生的要求比较高，要求具备良好的知识储备和一定的学习能力，综合运用所学知识和运算技巧，对问题进行拆分、重组和加工。在这个过程中，有利于激发新灵感，开创新思路，进而培养发散性思维和创新能力，这种思维方式在解决复杂问题时尤为重要，它让学生有应对难题的能力，或灵活转化问题的能力。

其次加深理解、构建结构。通过一题多解，可以更深入地理解题目所涉及的知识点，有效建立新旧知识之间的联系，融会贯通知识点之间的逻辑关系，进而构建完整的知识体系结构。在这个过程中，教师注重参与式教学、沉浸式教学，培养学生主动思考的学习习惯和自主探究的科学精神。

最后激发兴趣、提升效率。一题多解提供了更多探索的机会，能够激发学生的学习兴趣和好奇心，在解题过程中，不同方法碰撞出新的火花，新的解题思路，这个过程中体验到的成就感和满足感是不言而喻的。一题多解能够锻炼学生的解题技巧，提升解题速度和准确率。通过比较不同解法的优劣，可以学会选择最优解，提高做题效率。

针对一题多解多对学生的意义，特设计以下四个问题进行问卷调查，见表 1。

参与问卷调查的学生共 90 人，由图 1 可知，92%以上的学生表示一题多解的学习模式对学习高数的兴趣有所提高；98%以上的学生表示通过一题多解的训练，感觉自己在思考数学问题时，更容易从不同的角度切入；90%以上的学生表示愿意通过“一题多解”的学习模式来训练数学思维；94%以上的学生表示一题多解的学习方式对考试或学习的效率有所提高。实践证明，一题多解的学习模式在培养学生的思维方式、学习习惯和探究精神方面具有重要的意义。

Table 1. Questionnaire survey
表 1. 问卷调查

1) 一题多解的学习模式对您学习高等数学的兴趣有何影响？
A. 极大提高　B. 有所提高　C. 没有影响　D. 有所降低

2) 通过一题多解的训练，您是否感觉自己在思考数学问题时，更容易从不同的角度切入？
A. 是，变化很明显　B. 是，有一定变化　C. 否，无明显变化　D. 否，完全没变化

3) 您本人愿意通过“一题多解”的学习模式来训练数学思维吗？
A. 非常愿意　B. 愿意　C. 无所谓　D. 不愿意

4) 您认为一题多解的学习方式对您考试或学习的效率有怎样的影响？
A. 大幅度提高效率　B. 有一定提高　C. 没明显影响　D. 降低了效率

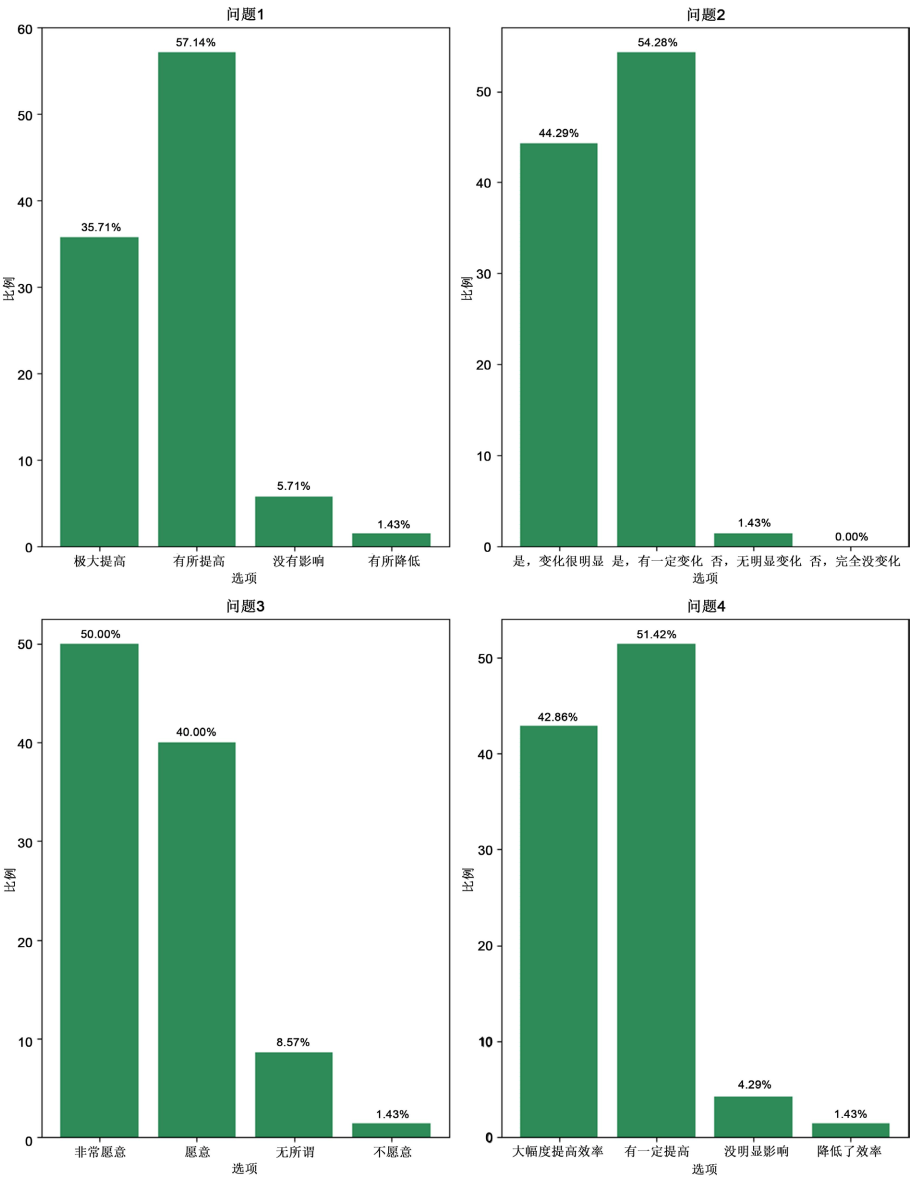

Figure 1. Statistical results of the questionnaire survey (bar chart)
图 1. 问卷调查统计结果(条形图)

例题

为加强学生对这部分知识的理解，深刻体会一题多解的思路和方法，附以下两个习题仅供练习。

练习 1 求解 $y''-4y'+4y=6x^2+8e^{2x}$ 的通解。

练习 2 某电路中的电流 $i(t)$ 满足微分方程 $2\frac{d^2i}{dt^2}+3\frac{di}{dt}+i=e^{-t}$，且初始条件为 $i(0)=1$，$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=0$。求解该电路中的电流 $i(t)$。

基金项目

国防科技大学第三批校级规划课程。

参考文献

[1] 李晓彤. 一道常微分方程题目的一题多解[J]. 科技风, 2024(2): 93-95.

[2] 同济大学应用数学系. 高等数学: 上册[M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023: 339-346.

[3] 方书盛. 一类二阶变系数线性微分方程的算子解法[J]. 汕头大学学报(自然科学), 2010, 25(1): 12-16, 23.

[4] 吴小虎, 林天舒, 张晓宁. 一道二阶常系数非齐次微分方程的八种解法[J]. 高等数学研究, 2013, 16(3): 56-57.

[5] 贾瑞玲, 文生兰, 孙铭娟. 一道对坐标的曲面积分练习题的多种解法及其思想方法论意义[J]. 高等数学研究, 2024, 27(2): 59-61, 71.