

虚拟纽结的一新多项式

张宇涵

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2025年1月13日; 录用日期: 2025年2月7日; 发布日期: 2025年2月14日

摘要

虚拟纽结理论中主要研究对象为纽结和链环。虚拟纽结多项式是一类以多项式表达的虚拟纽结不变量, 例如零多项式和Writhe多项式。文章通过研究零多项式和虚拟链环的writhe多项式给出了一个新的多项式。这个多项式通过对虚拟链环的计算得出原始虚拟纽结的多项式, 证明了这个多项式是一虚拟纽结不变量, 给出了其性质及一实例计算。

关键词

虚拟纽结不变量, Writhe多项式, 高斯图

A New Polynomial of Virtual Knots

Yuhan Zhang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 13th, 2025; accepted: Feb. 7th, 2025; published: Feb. 14th, 2025

Abstract

The main research objects of virtual knot theory are knot and link. Virtual knot polynomials are a class of virtual knot invariants expressed as polynomials, such as the zero polynomial and the writhe polynomial. In this paper, a new polynomial is given by studying zero polynomials and writhe polynomials of virtual links. The polynomial of the original virtual knot is obtained by computing the virtual link. It proves that the polynomial is a virtual knot invariant, and properties and computational examples are given.

Keywords

Virtual Knot Invariant, Writhe Polynomial, Gauss Diagram

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

一个纽结是把 S^1 嵌入到 S^3 (或 R^3) 中。通常可以用纽结投影图来描述纽结, 纽结投影图是由在一般位置投影得到的四价图。每个投影图都对应唯一的高斯图, 但是有一些高斯图不能用纽结来表示。Kauffman [1] 将纽结理论推广到虚拟纽结理论, 克服了经典纽结理论的这一缺陷。Kuperberg 给出了虚拟链环的拓扑解释[2]。

虚链纽结的不变量有很多, 它们其中有些是经典纽结不变量的推广, 如 Quandle、Jones 多项式、Writhe 多项式[3]等。Writhe 多项式在对虚拟方面的检测有很多优点。例如对一类虚拟纽结交叉点进行判定, 可以高效、简化计算等。此外, 它可以用于构造纽结和链环不变量, 它有很多延伸研究, 如零多项式、超越多项式、 l 多项式等。Writhe 多项式的主要组成部分是指标函数 $Ind(c)$ 。在文献[3]中, Cheng 公理化了 $Ind(c)$, 这些公理称为和弦索引公理。如果已知弦索引函数, 那么就可以相应地构造虚拟链环的不变量, Xu 给出了虚拟链环的 Writhe 多项式[4], 有了虚拟链环不变量, 再结合零多项式, 就可以得出一个新多项式 $W(t)$, 它将虚拟链环多项式应用在虚拟纽结多项式的计算中。

本文的组织结构为: 在第 2 节中, 回顾了一些关于虚拟纽结和虚拟链环的基本知识以及有关 Writhe 多项式的定义。在第 3 节中, 给出新定义的多项式 $W(t)$ 并证明它是一个虚拟纽结不变量, 给出多项式一些相关性质并给出了一个具体有向虚拟纽结图的计算例子。第 4 节中, 对本文的主要研究结果进行总结。

2. 预备知识

2.1. 虚拟纽结与虚拟链环[5]

虚拟纽结理论是将 S^1 嵌入到 $S_g \times I$ 上。下面是对虚拟纽结和虚拟链环相关定义的介绍:

定义 2.1 $S^1(S^1 \cup S^1 \cup \dots \cup S^1)$ 在 $S_g \times I$ 中的嵌入叫做虚拟纽结(链环)。

定义 2.2 虚拟纽结(链环)图是将 $S_g \times I$ 投射到 S^2 中所得到的 $S^1(S^1 \cup S^1 \cup \dots \cup S^1)$ 。

将 $S_g \times I$ 投射到 S^2 中会产生虚拟交叉点。

2.2. 交叉点[1]

定义 2.3 $S_g \times I$ 投射到 S^2 中时, S^2 中的上弧和下弧相交形成交叉点, 我们称这种交叉点为虚拟交叉, 用一个小圆圈来表示, 如图 1 右边所示, 图 1 左边是经典交叉点。

定义 2.4 虚拟链环 L 中有两种实交叉点, 单分支的实交叉点称为自交叉点。 L 的其他实交叉点称为连接交叉点。设 $s(L)$ 、 $cn(L)$ 、 $c(L)$ 分别表示 L 的自交叉点集、连接交叉点集和所有实交叉点集。

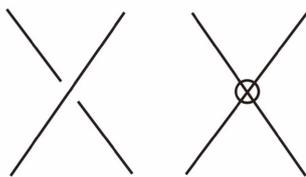


Figure 1. Different types of intersection points

图 1. 不同类型交叉点

2.3. 符号[6]

定义 2.5 每个经典交叉点上的正号或负号表示该交叉点的符号，简记为 $s(c)$ ，如图 2 所示。

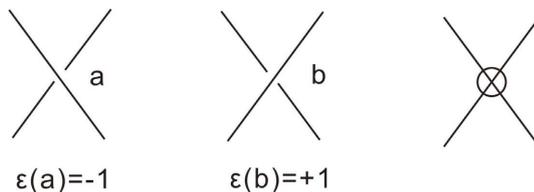


Figure 2. Intersection symbol

图 2. 交叉点符号

2.4. 广义 Reidemeister Moves [6]

虚拟 Reidemeister moves 是由经典 Reidemeister moves 推广而来的。广义 Reidemeister moves 包括经典 Reidemeister moves 和虚拟 Reidemeister moves，变换方式如图 3 所示。

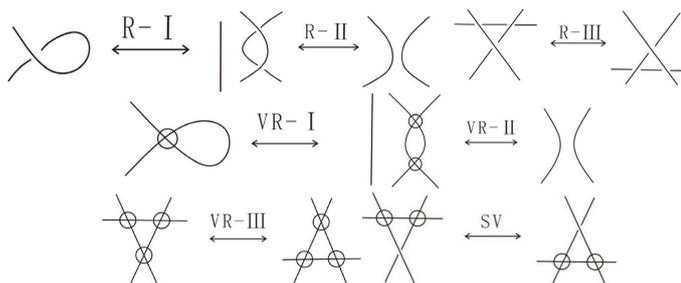


Figure 3. Generalized Reidemeister moves

图 3. 广义 Reidemeister moves

我们称两个虚拟纽结图是等价的，两个虚拟纽结图的其中一个另一个经过有限的广义的 Reidemeister 变换得到的。

注 2.1 如图 4 所示的两种变换是不允许的，称之为禁止移动。如果允许做禁止移动的话，任意一个虚拟纽结都可以变成平凡纽结。

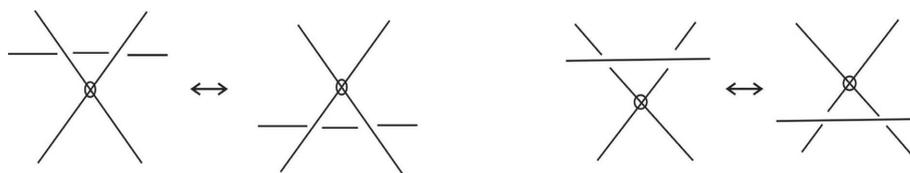


Figure 4. Forbidden move

图 4. 禁止移动

2.5. 高斯图[7]

纽结高斯图 G 由有向圆 S^1 和 n 个 ($n \geq 0$) 有符号的有向弦组成，每个弦与纽结的交叉点一一对应，这些弦连接 S^1 上的 2^n 个点，高斯图方向通常定义为逆时针，弦的方向是由上交叉点指向下交叉点，并用弦对应的交叉点的符号标记该弦，如图 5 所示。链环高斯图即两个纽结高斯图通过弦相关联。

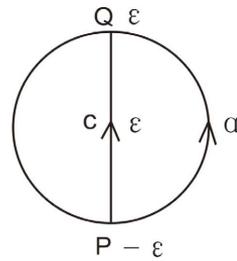


Figure 5. Gauss diagram
图 5. 高斯图

2.6. Cheng 着色[3]

Cheng 和 Gao 提出了一种为有向虚拟纽结图的每个经典交叉点赋值的方法，我们称之为经典交叉点的指标，用 Ind 表示。设 K 为有向虚拟纽结图， c 为 K 中的经典交叉点， K 中的 c 的符号用 $sgn(c)$ 表示，其约定如图 2 所示。则经典交叉点 c 的指标 $Ind(c)$ 定义为： $Ind(c) = sgn(c)(a - b - 1)$ ，其中 a 和 b 为如图 6 中所示的 K 上的成色标号。当给两个链环进行指标赋值时，我们分别对两个分支单独赋值。

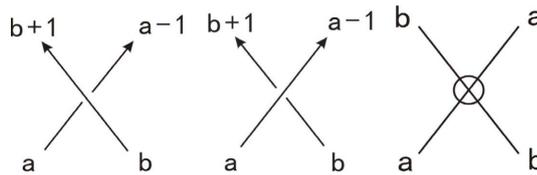


Figure 6. Cheng coloring of K
图 6. 图 K 的 Cheng 着色

2.7. $Ind'(c)$ [4]

定义 2.6

$$Ind'(c) = \sum_{e \in R(c)} sgn(e)$$

其中 $R(c)$ 为弦 c 右侧除 c^+ 和 c^- 以外的所有弦端点的集合，如图 7 所示。

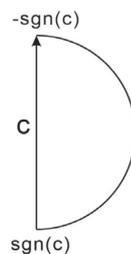


Figure 7. $R(c)$
图 7. $R(c)$

2.8. 1-Smoothing [8]

设 K 是一个有向虚拟纽结图， c 是 K 的一个交叉点。对 c 进行如图 8 所示的 1-smoothing (1-平滑)，得到虚拟链环图 L ，记为 K^c ，并给两个分支分别标号 1, 0。

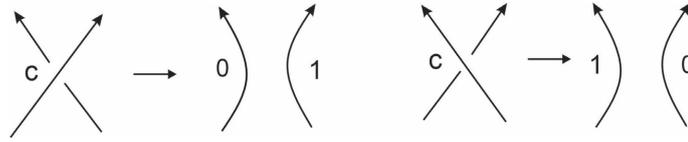


Figure 8. 1-smoothing
图 8. 1-平滑

2.9. Writhe 多项式[4]

$$W_{c_i}(t) = \sum_{\substack{e \in s(K^{c_i}) \\ Ind(e) \neq 0}} s(e)t^{Ind'(e)}$$

其中 e 是 K^{c_i} 中的自交叉点且满足 $Ind(e) \neq 0$ 。

3. 虚拟纽结的一新多项式不变量

定义 3.1 K 是一有向虚拟纽结图，虚拟纽结的一新多项式 $W(t)$ 为：

$$W(t) = \sum_{\substack{c_i \in c(K) \\ Ind(c_i) \neq 0}} \text{sgn}(c_i)W_{c_i}(t)$$

其中

$$W_{c_i}(t) = \sum_{\substack{e \in s(K^{c_i}) \\ Ind(e) \neq 0}} s(e)t^{Ind'(e)}$$

其中 $\text{sgn}(c)$ 、 $s(e)$ 均为经典交叉点的符号， $Ind(c)$ 、 $Ind'(c)$ 定义如 2.6、2.7 所示， $W_{c_i}(t)$ 是链环的 writhe 多项式。

为了证明多项式 $W(t)$ 是虚拟纽结不变量，我们需证明 $W(t)$ 在广义 Reidemeister 移动下是不变量。由于定义中只涉及经典交叉，因此我们只需证明 $W(t)$ 在 Ω_{1a} 、 Ω_{1b} 、 Ω_{2a} 、 Ω_{2b} 、 Ω_{3a} 和 Ω_{3b} 移动下是不变量。

定理 3.1 设 K 为一有向虚拟纽结图，则 $W(t)$ 在 Ω_{1a} 和 Ω_{1b} 移动下为不变量。

证明 设 K 为有向虚拟纽结图， K^{c_i} 为所对应的对 K 进行 1-smoothing 后的虚拟链环图， K' 为通过 Ω_{1a} 或 Ω_{1b} 从 K 得到的有向虚拟纽结图，如图 9 所示。



Figure 9. Transformation of Ω_{1a} and Ω_{1b}
图 9. Ω_{1a} 和 Ω_{1b} 变换

先观察 Ω_{1a} 变换，设图 9(a) 中交叉点为 c ，对于 K 中任意实交叉点 h ，若交叉点 h 是 c ，由于 $Ind(c) = 0$ ，则对 $W(t)$ 没有影响。

若交叉点 h 不是 c 且 $Ind(h) \neq 0$ ， h' 为 h 在 K' 中所对应的点，则将分别对 h 、 h' 进行 1-smoothing 变换后得到的 K^h 与 $K^{h'}$ 相比较，由于二者除 c 外没有不同， $c \in s(K^h)$ 且 $Ind(c) = 0$ ，则对 $W(t)$ 没有影响。

综上所述, $W(t)$ 在 Ω_{1a} 移动下是不变的。类似地, 我们可以证明 $W(t)$ 在 Ω_{1b} 移动下是不变的。

定理 3.2 设 K 为有向虚拟纽结图, 则 $W(t)$ 在 Ω_{2a} 和 Ω_{2b} 移动下为不变量。

证明 设 K 为有向虚拟纽结图, K^{c_1} 为所对应的进行 1-smoothing 后的虚拟链环图, K' 为通过 Ω_{2a} 和 Ω_{2b} 移动从 K 得到的有向虚拟纽结图。其中 c_1 、 c_2 为如图 10 所示的交叉点。

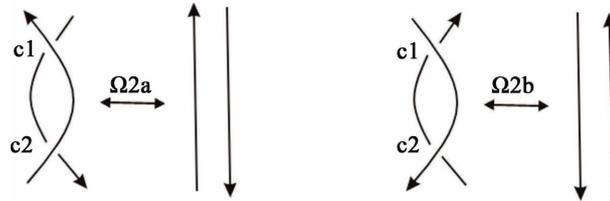


Figure 10. Transformation of Ω_{2a}

图 10. Ω_{2a} 变换

由于 $Ind(c_1) = Ind(c_2)$, 则 $Ind(c_1)$ 与 $Ind(c_2)$ 均为 0 或均不为 0。

若 $Ind(c_1) = Ind(c_2) = 0$, 则对 $W(t)$ 没有影响。

若 $Ind(c_1)$ 与 $Ind(c_2)$ 均不为 0, 对于 K 中任意实交叉点 h , 若交叉点 h 是 c_1 或 c_2 。这里我们不妨假设 h 是 c_1 , 则对 c_1 进行 1-smoothing 变换后得到 K^{c_1} , 对 c_2 进行 1-smoothing 变换后得到 K^{c_2} , 如图 11 所示。二者可以通过 Ω_{1a} 或 Ω_{1b} 移动相转化, 其余均相同, 由于 $s(c_1) = -s(c_2)$, 则由定理 3.1 可知, K 与 K' 相比, $W(t)$ 多余的项可以相互抵消, 则对 $W(t)$ 没有影响。

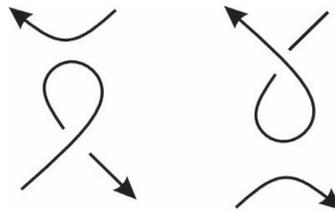


Figure 11. K^{c_1} and K^{c_2}

图 11. K^{c_1} 与 K^{c_2}

若交叉点 h 不是 c_1 也不是 c_2 且 $Ind(h) \neq 0$, h' 为 h 在 K' 中所对应的点, 则将分别对 h 、 h' 进行 1-smoothing 变换后得到的 K^h 与 $K^{h'}$ 相比较, 若 c_1 、 c_2 均不是自交点, 则对 $W(t)$ 没有影响。若 c_1 、 c_2 均为自交点且 $Ind(c_1) = Ind(c_2) = 0$, 则对 $W(t)$ 没有影响。若 c_1 、 c_2 均为自交点, 且 $Ind(c_1) \neq 0$, $Ind(c_2) \neq 0$, 且 $Ind'(c_1) = Ind'(c_2)$, 由于 $s(c_1) = -s(c_2)$, 则对 $W(t)$ 没有影响。

综上所述, $W(t)$ 在 Ω_{2a} 移动下是不变的。类似地, 我们可以证明 $W(t)$ 在 Ω_{2b} 移动下是不变的。

引理 3.3 令 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, 设 K 为虚拟纽结图, 有三个交叉点为 c_1 、 c_2 和 c_3 , 如图 12 所示。如果 c_i 、 c_j 是自交叉点则 c_k 也是自交叉点。

证明 假设 c_1 、 c_2 是自交叉点, 图 12 中三个交叉点由三条弧组成, 其中每个交叉点都包含三条弧中的两条, 若 c_1 、 c_2 是自交叉点, 即三条弧应属于一个链环分支, 则 c_3 也是自交叉点。

定理 3.4 设 K 为有向虚拟纽结图, 则 $W(t)$ 在 Ω_{3a} 移动下为不变量。

证明 设 K 为有向虚拟纽结图, K^{c_1} 为对 c_1 进行 1-smoothing 后得到的有向虚拟链环图, K' 为通过 Ω_{3a} 移动从 K 得到的有向虚拟纽结图。其中 c_1 、 c_2 、 c_3 为 K 中实交叉点, 设所对应的区域分别为 I、II、

III, 如图 12 所示, 其余情况均可类似证明。

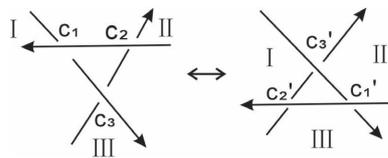


Figure 12. Transformation of Ω_{3a}

图 12. Ω_{3a} 变换

对于 K 中任意实交叉点 h 且 $Ind(h) \neq 0$, 若交叉点 h 是 c_1, c_2, c_3 中任意一个, c'_1, c'_2, c'_3 是 K' 中与 c_1, c_2, c_3 相对应的点。设 h 是 c_1 , 则将分别对 h, h' 进行 1-smoothing 变换后得到的 K^h 与 $K^{h'}$ 相比较, 如图 13 所示, $K^{h'}$ 可由 K^h 进行 Ω_{2a} 移动或 Ω_{2b} 移动下得到, 由定理 3.2 可知对 $W(t)$ 没有影响。



Figure 13. K^h and $K^{h'}$

图 13. K^h 与 $K^{h'}$

若交叉点 h 不是 c_1, c_2, c_3 中任意一个, 则将分别对 h, h' 进行 1-smoothing 变换后得到的 K^h 与 $K^{h'}$ 相比较, 可知 c_1, c_2, c_3 中至少一个是自交叉点, 若 $Ind(c_1) = Ind(c_2) = Ind(c_3) = 0$, 则对 $W(t)$ 没有影响。若 c_1, c_2, c_3 中只有一个是自交叉点, 设 c_1 是自交叉点且 $Ind(c_1) \neq 0$, 则对 $W(t)$ 没有影响。

若 c_1, c_2, c_3 中有两个交叉点是自交叉点, 由引理 3.3 可知, 三个交叉点都是自交叉点, 若 $Ind(c_1) \neq 0, Ind(c_2) \neq 0, Ind(c_3) \neq 0$, 我们先讨论其中一种情况, 如图 14 所示, 可知在 K 中, $Ind'(c_1) = I, Ind'(c_2) = I + III, Ind'(c_3) = III$, 在 K' 中, $Ind'(c'_1) = I, Ind'(c'_2) = I + III, Ind'(c'_3) = III$, 其余情况均可类似证明, 则可知对 $W(t)$ 没有影响。

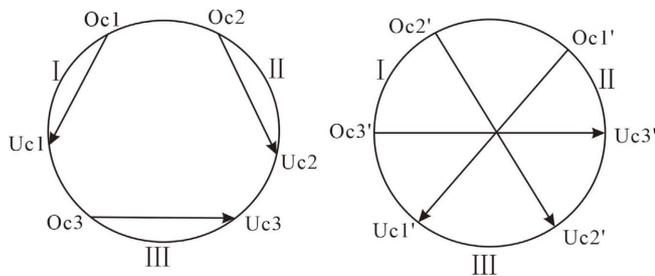


Figure 14. Gauss diagram

图 14. 高斯图

类似地, 可证明其余情况均对 $W(t)$ 没有影响。综上所述, $W(t)$ 在 Ω_{3a} 移动下是不变的。

定理 3.5 设 K 为有向虚拟纽结图, 则 $W(t)$ 在 Ω_{3v} 移动下为不变量。

证明 设 K 为有向虚拟纽结图, K^c 为所对应的进行 1-smoothing 后的虚拟链环图, K' 为通过 Ω_{3v} 移动从 K 得到的有向虚拟纽结图, 如图 15 所示。

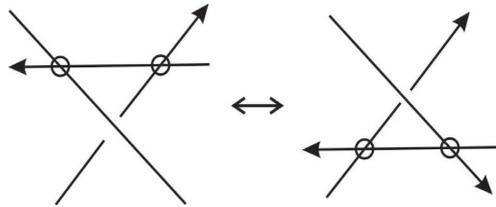


Figure 15. Transformation of Ω_{3v}

图 15. Ω_{3v} 变换

设图 15 中交叉点为 c , c' 是 K' 中与 c 相对应的点。对于 K 中任意实交叉点 h 且 $Ind(h) \neq 0$, 若交叉点 h 是 c , 则对 c 、 c' 分别进行 1-smoothing 变换后得到的 K^c 与 $K^{c'}$ 相比较均相同, 且由于 K^c 中没有增加自交叉点, 则对 $W(t)$ 没有影响。

若交叉点 h 不是 c , 则将分别对 h 、 h' 进行 1-smoothing 变换后得到的 K^h 与 $K^{h'}$ 相比较, 若 c 不是自交叉点则对 $W(t)$ 没有影响。若 c 是自交叉点, 且 $Ind(c)=0$, 则对 $W(t)$ 没有影响, 若 c 是自交叉点, 且 $Ind(c) \neq 0$, 由于 K^h 与 $K^{h'}$ 均相同, 则对 $W(t)$ 没有影响。

综上所述, $W(t)$ 在 Ω_{3v} 移动下是不变的。

定理 3.6 [9] 所有定向的 Reidemeister 移动均由 Ω_{1a} 、 Ω_{1b} 、 Ω_{2a} 、 Ω_{2b} 、 Ω_{3a} 和 Ω_3^v 移动生成。

定理 3.7 $W(t)$ 是虚拟纽结的不变量。

证明 由定理 3.1、定理 3.2、定理 3.4、定理 3.5 及定理 3.6 可知, $W(t)$ 在所有 Reidemeister 移动下都是不变的, 由定义可知, $W(t)$ 在虚拟移动下是不变的。因此, $W(t)$ 是虚拟纽结的不变量。

定理 3.8 [10] 如果 D 是一个经典纽结图, 那么对于 D 中的任何经典交叉 c , 有 $Ind(c)=0$ 。

定理 3.9 如果 K 是一个有向经典纽结图, 则 $W(t)=0$ 。

证明 对 K 中任意一个交叉点 h , 根据定理 3.8 有 $Ind(h)=0$, 由 $W(t)$ 定义可知, 所有经典交叉点都不计算在内, 则 $W(t)=0$ 。

例 3.1 设 K 是如图 16 所示的有向虚拟纽结。

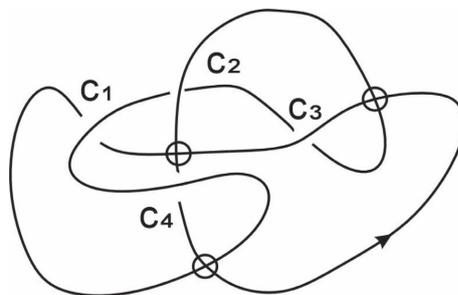


Figure 16. Knot diagram for virtual knot K

图 16. 虚拟纽结 K 的纽结图

对图 K 进行计算有:

$$\text{sgn}(c_1) = \text{sgn}(c_2) = +1;$$

$$Ind(c_1) = \text{sgn}(c)(a-b-1) = -1;$$

$$Ind(c_1) = \text{sgn}(c)(a-b-1) = 1;$$

$$Ind(c_1) = \text{sgn}(c)(a-b-1) = 0;$$

$$Ind(c_1) = \text{sgn}(c)(a-b-1) = 0。$$

由定义可知，只需计算 c_1 、 c_2 相关数据即可。

对 c_1 进行 1-smoothing 得到 K^{c_1} ，得到表 1 数据。

Table 1. The index value and sign of each crossing in the virtual knot K^{c_1}

表 1. 虚拟纽结 K^{c_1} 中各交叉点的指标值和符号

c_i	$c_i \in s(K^{c_1})$	$Ind(c_i)$	$Ind'(c_i)$	$s(c_i)$
c_2	√	+1	0	+1
c_3	√	-1	-1	+1
c_4	×	无	无	+1

$$\text{则有 } W_{c_1}(t) = s(c_2)t^{Ind'(c_2)} + s(c_3)t^{Ind'(c_3)} = 1 + t^{-1}。$$

对 c_2 进行 1-smoothing 得到 K^{c_2} ，得到表 2 数据。

Table 2. The index value and sign of each crossing in the virtual knot K^{c_2}

表 2. 虚拟纽结 K^{c_2} 中各交叉点的指标值和符号

c_i	$c_i \in s(K^{c_2})$	$Ind(c_i)$	$Ind'(c_i)$	$s(c_i)$
c_1	√	-1	0	+1
c_3	×	无	无	+1
c_4	√	+1	+1	+1

$$\text{则有 } W_{c_2}(t) = s(c_1)t^{Ind'(c_1)} + s(c_4)t^{Ind'(c_4)} = 1 + t。$$

$$\text{则 } W(t) = \text{sgn}(c_1)W_{c_1}(t) + \text{sgn}(c_2)W_{c_2}(t) = t^{-1} + t + 2。$$

4. 结语

本文主要在零多项式和链环 Writhe 多项式基础上给出了虚拟纽结一新多项式 $W(t)$ ，并证明其是虚拟纽结不变量。多项式 $W(t)$ 可以将虚拟纽结多项式结合虚拟链环多项式进行计算，并在最后给出了其性质及一个虚拟有向纽结计算实例。

参考文献

- [1] Kauffman, L.H. (2021) Virtual Knot Theory. In: Adams, C., Flapan, E. and Henrich, A., Eds., *Encyclopedia of Knot Theory*, Chapman and Hall/CRC, 261.
- [2] Kauffman, L.H. (2004) A Self-Linking Invariant of Virtual Knots. *Fundamenta Mathematicae*, **184**, 135-158. <https://doi.org/10.4064/fm184-0-10>
- [3] Cheng, Z. and Gao, H. (2013) A Polynomial Invariant of Virtual Links. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **22**, Article ID: 1341002. <https://doi.org/10.1142/s0218216513410022>

-
- [4] Xu, M. (2018) Writhe Polynomial for Virtual Links. arXiv: 1812.05234.
 - [5] Kuperberg, G. (2003) What Is a Virtual Link? *Algebraic & Geometric Topology*, **3**, 587-591. <https://doi.org/10.2140/agt.2003.3.587>
 - [6] Mellor, B. (2016) Alexander and Writhe Polynomials for Virtual Knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **25**, Article ID: 1650050. <https://doi.org/10.1142/s0218216516500504>
 - [7] Lee, K., Im, Y.H. and Lee, S. (2014) An Index Definition of Parity Mappings of a Virtual Link Diagram and Vassiliev Invariants of Degree One. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **23**, Article ID: 1460010. <https://doi.org/10.1142/s0218216514600104>
 - [8] Jeong, M. (2016) A Zero Polynomial of Virtual Knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **25**, Article ID: 1550078. <https://doi.org/10.1142/s0218216515500789>
 - [9] Polyak, M. (2010) Minimal Generating Sets of Reidemeister Moves. *Quantum Topology*, **1**, 399-411. <https://doi.org/10.4171/qt/10>
 - [10] Kauffman, L.H. (2013) An Affine Index Polynomial Invariant of Virtual Knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **22**, Article ID: 1340007. <https://doi.org/10.1142/s0218216513400075>