

一类II型偶长Z-互补序列对的构造

何 颖

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2025年1月13日; 录用日期: 2025年2月7日; 发布日期: 2025年2月17日

摘 要

文章以二进制互补对的核为基础, 利用Turyn构造法得到一种长度为 $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ (α, β, γ 为非负整数) 的Golay互补对(Golay Complementary Pair, GCP), 在此基础上利用级联和删除函数得到长度为II型 $2N - 2$ 的偶长Z-互补对, 并且它们非周期相关函数和在零相关区外的幅值为4, 丰富了II型偶长Z-互补序列对的数量。与已知传统的序列构造方法相比, 文章提出了一种新的构造方法。

关键词

II型Z-互补对, Golay互补对, 零相关区, 删除函数

Construction of Even-Length Type II Z-Complementary Pairs

Ying He

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Jan. 13th, 2025; accepted: Feb. 7th, 2025; published: Feb. 17th, 2025

Abstract

Based on the kernel of binary complementary pairs, a Golay Complementary Pair (GCP) with a sequence length of $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ (and α, β, γ are non-negative integers) was constructed by using Turyn Construction. On this basis, the Deletion Function and Cascading were used to obtain the Type II EB-ZCP with a length of $2N - 2$, and their aperiodic correlation functions and amplitudes outside the zero-correlation region were 4, which enriches the number of Type II EB-ZCP. Compared with the known traditional sequence construction methods, a new construction method is proposed.

Keywords

Type II Z-Complementary Pairs, Golay Complementary Pair, Zero-Correlation Zone, Deletion Function



1. 引言

零相关区互补序列在通信系统[1] [2]、雷达[3]、信道估计[4]等领域有着重要应用。特别地, II 型 Z-互补对(Z-Complementary Pair, ZCP)在宽带无线通信系统中可解决最小干扰信号延迟的抑制问题。互补对又称格雷互补对[5] (Golay Complementary Pair, GCP), 在序列设计中已经被广泛应用。因此, ZCPs 对于无线通信系统的研究具有十分重要的意义。

2007 年, Fan [6]等人首次提出了 Z-互补对(Z-Complementary Pairs, ZCPs)的概念。2021 年, Gu 等人[7]通过 Turyn 构造了长度为 $3N$ 和 $14N$ 的 Z-最优 II 型偶长 ZCP。同年, 文献[7]通过迭代法还构造了一类有新长度的 II 型偶长 ZCP, 其参数为 $(2^k N + 2^{k-1}, 2^k N + 2^{k-1} - N (N \in \mathbb{Z}, k \geq 2))$ $2^k N + 2^{k-1} - N (N \in \mathbb{Z}, k \geq 2)$ 。2021 年, Kumar 等人[8]通过多变量函数, 构造了一类 II 型偶长 ZCP, 其长度为 $(2^m P, 2^m P + 1 - P (m, P \geq 1))$, 此构造可以满足任意 II 型偶长 ZCP 的长度。2022 年, Peng 等人[9]基于布尔函数, 构建了长度为 $(2^m + 3 + 2^m + 2 + 2^m + 1, 2^m + 3 + 2^m + 2)$ 的 II 型偶长 ZCP, 其相关区比率 6/7。2023 年, Zeng 等人[10]通过映射和交织的方法得到一类长度为 $2 \times 2^a 10^b 26^c$ 的 Z-最优 II 型偶长 ZCP。2023 年, 陈等人[11]通过迭代技术, 构造了长度分别为 $(2^{k+2} N, (2^{k+2} - 1)N)$ 、 $(2N + 2, \frac{3N}{2} + 2)$ 和 $(2^{k+2} N + 2^{k+1}, 2^{k+2} N + 2^{k+1} - \frac{N}{2})$ 的 II 型偶长 ZCP, 且零相关区外相关函数值较小。2023 年, 陈等人[12]通过交织法构造了长度为 $((2k+1)N, (2k+1)N - k)$ 的 II 型偶长 ZCP, 其零相关区宽度可以接近或达到 II 型偶长二进制 Z-互补对的理论上界。2023 年, 陈等人通过插入法构造了长度为 $(2N + 2, \frac{3}{2}N + 2)$ 的 II 型偶长 ZCP。综上所述, 构造出长度更为灵活的 II 型 EB-ZCPs 具有重要的意义和价值。

本文结构如下: 第二节介绍了一些需要用到的符号与定义; 第三节给出了 II 型偶长 Z-互补序列对的构造, 证明与实例; 第四节对本文进行了总结。

2. 预备知识

本文中的一些符号表示如下:

+和-分别表示+1 和-1;

$a \otimes b$ 表示 a 和 b 的克罗内克积;

$a \parallel b$ 表示 a 与 b 的级联。

定义 1 对于一个长度为 N 的二进制序列对 (a, b) , 定义非周期互相关函数(ACCF)

$$\rho_{a,b}(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1-\tau} a_i b_{i+\tau}, \quad 0 \leq \tau \leq N-1.$$

当 $a = b$, $\rho_{a,b}(\tau)$ 被称之为非周期自相关函数(AACF), 记为 $\rho_a(\tau)$ 。

定义 2 令 a 和 b 为两条长度为 N 的二进制序列, 若对任意 $1 \leq \tau \leq N-1$, 且序列对 (a, b) 满足

$$\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = 0,$$

则称序列对 (a, b) 为格雷互补对(GCP)。

引理 1 如果 (a, b) 是长度为 N 、ZCZ 宽度为 Z 的 II 型 EB-ZCP, 则

$$Z \leq N-1。$$

定义 3 如果上式可以取等号, 则称 (a, b) 达到 Z -最优, 即 II 型 EB-ZCP 的 ZCZ 宽度的理论上界为 $Z = N-1$ 。

引理 2 [13] 当

$$(a_0; b_0) = K_2;$$

$$(a_i; b_i) = \text{Turyn}(A_0, (a_{i-1}; b_{i-1})), A_0 \in \{K_2, K_{10}, K_{26}\},$$

则 $(a; b) = (a_i; b_i)$ 是长度为 $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ ($\alpha \geq 1, \beta, \gamma \geq 0$ 且为整数的 GCP), 并且 $(a_i; b_i)$ 该序列对的前 $N/2$ 项每列都具有相同的符号。

3. 构造

定理 1 设序列对 (a, b) 是由引理 2 生成的长度为 N 的 GCP, 构造序列对 (c, d) , $c = (a \parallel \bar{b})$, $d = (b \parallel -\bar{a})$, $(r_1, r_2) = (0, 2N-1)$ 或 $(r_1, r_2) = (\frac{N}{2}-1, \frac{N}{2})$, $e \equiv v(c, r_1, r_2)$, $f \equiv v(d, r_1, r_2)$, 其中 $v(\cdot)$ 是删除函数。则序列对 (e, f) 是 II 型偶长 Z -互补序列对, 参数是 $(2N-2, \frac{3}{2}N-1)$, 并且在零相关区外的幅值为 4。

证明 令 $a = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 和 $b = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ 是一个长度为 $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ 的 GCP, 并且它满足 $\alpha \geq 1, \beta, \gamma \geq 0$, α, β, γ 为非负整数。根据删除函数的定义:

1) 当 $r_1 = 0, r_2 = 2N-1$, 可以得到 (e, f) , 即

$$e = (e_0, e_1, \dots, e_{N-1}) = (a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, b_{N-1}, b_{N-2}, \dots, b_1)$$

$$f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) = (b_1, b_2, \dots, b_{N-1}, -a_{N-1}, -a_{N-2}, \dots, -a_1)$$

根据 τ 取值范围分下面三种情形讨论 $|\rho_e(\tau) + \rho_f(\tau)|$:

情形 1: 当 $N-1 \leq \tau \leq 2N-3$ 时,

$$\rho_e(\tau) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i b_{2N-\tau-i-1}$$

$$\rho_f(\tau) = \sum_{i=1}^{N-1} b_i (-a_{2N-\tau-i-1})$$

有

$$|\rho_e(\tau) + \rho_f(\tau)| = \left| \sum_{i=1}^{N-1} a_i b_{2N-\tau-i-1} \sum_{i=1}^{N-1} b_i (-a_{2N-\tau-i-1}) \right|$$

$$= 0$$

情形 2: 当 $\frac{N}{2} \leq \tau \leq N-2$ 时,

$$\rho_e(\tau) = \sum_{i=1}^{N-\tau-1} a_i a_{i+\tau} + \sum_{i=N-\tau}^{N-1} a_i b_{2N-\tau-i-1} + \sum_{i=1}^{N-\tau-1} b_i b_{i+\tau}$$

$$\rho_f(\tau) = \sum_{i=1}^{N-\tau-1} b_i b_{i+\tau} + \sum_{i=N-\tau}^{N-1} b_i (-a_{2N-\tau-i-1}) + \sum_{i=1}^{N-\tau-1} a_i a_{i+\tau}$$

因为 $\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = 0$, 根据引理 2 知, (a, b) 在 $0 \leq i < \frac{N}{2}$ 时, $a_i = b_i$; 在 $\frac{N}{2} \leq i < N$ 时, $a_i = -b_i$, 所以

$$\begin{aligned}
|\rho_e(\tau) + \rho_f(\tau)| &= \left| \sum_{i=N-\tau}^{N-1} a_i b_{2N-\tau-i-1} + \sum_{i=N-\tau}^{N-1} b_i (-a_{2N-\tau-i-1}) - 2a_0 a_\tau - 2b_0 b_\tau \right| \\
&= |-2a_0(a_\tau + b_\tau)| \\
&= 0
\end{aligned}$$

情形 3: 当 $1 \leq \tau \leq \frac{N}{2} - 1$ 时,

$$\begin{aligned}
\rho_e(\tau) &= \sum_{i=1}^{N-\tau-1} a_i a_{i+\tau} + \sum_{i=N-\tau}^{N-1} a_i b_{2N-\tau-i-1} + \sum_{i=1}^{N-\tau-1} b_i b_{i+\tau} \\
\rho_f(\tau) &= \sum_{i=1}^{N-\tau-1} b_i b_{i+\tau} + \sum_{i=N-\tau}^{N-1} b_i (-a_{2N-\tau-i-1}) + \sum_{i=1}^{N-\tau-1} a_i a_{i+\tau}
\end{aligned}$$

因为 $\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = 0$, 根据引理 2 知, (a, b) 在 $0 \leq i < \frac{N}{2}$ 时, $a_i = b_i$, 所以

$$\begin{aligned}
|\rho_e(\tau) + \rho_f(\tau)| &= \left| \sum_{i=N-\tau}^{N-1} a_i b_{2N-i-\tau-1} + \sum_{i=N-\tau}^{N-1} b_i (-a_{2N-i-\tau-1}) - 2a_0 a_\tau - 2b_0 b_\tau \right| \\
&= |-4a_0 a_\tau| \\
&= 4
\end{aligned}$$

2) 当 $r_1 = \frac{N}{2} - 1, r_2 = \frac{N}{2}$, 可以得到 (e, f) , 即

$$\begin{aligned}
e &= (e_0, e_1, \dots, e_{N-1}) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-2}, b_{N-2}, \dots, b_1, b_0) \\
f &= (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_{N-2}, -a_{N-2}, \dots, -a_1, -a_0)
\end{aligned}$$

根据 τ 取值范围分下面三种情形讨论 $|\rho_e(\tau) + \rho_f(\tau)|$:

情形 1: 当 $N-1 \leq \tau \leq 2N-3$ 时,

$$\begin{aligned}
\rho_e(\tau) &= \sum_{i=0}^{N-2} a_i b_{2N-\tau-i-3} \\
\rho_f(\tau) &= \sum_{i=0}^{N-2} b_i (-a_{2N-\tau-i-3})
\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}
|\rho_e(\tau) + \rho_f(\tau)| &= \left| \sum_{i=0}^{N-2} a_i b_{2N-\tau-i-3} - \sum_{i=0}^{N-2} b_i (-a_{2N-\tau-i-3}) \right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

情形 2: 当 $\frac{N}{2} \leq \tau \leq N-2$ 时,

$$\begin{aligned}
\rho_e(\tau) &= \sum_{i=0}^{N-\tau-2} a_i a_{i+\tau} + \sum_{i=N-\tau-1}^{N-2} a_i b_{2N-\tau-i-3} + \sum_{i=0}^{N-\tau-2} b_i b_{i+\tau} \\
\rho_f(\tau) &= \sum_{i=0}^{N-\tau-2} b_i b_{i+\tau} + \sum_{i=N-\tau-1}^{N-2} b_i (-a_{2N-\tau-i-3}) + \sum_{i=0}^{N-\tau-2} a_i a_{i+\tau}
\end{aligned}$$

因为 $\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = 0$, 根据引理 2 知, (a, b) 在 $0 \leq i < \frac{N}{2}$ 时, $a_i = b_i$; 在 $\frac{N}{2} \leq i < N$ 时, $a_i = -b_i$, 所以

$$\begin{aligned}
|\rho_e(\tau) + \rho_f(\tau)| &= \left| \sum_{i=N-\tau-1}^{N-2} a_i b_{2N-\tau-i-1} + \sum_{i=N-\tau-1}^{N-2} b_i (-a_{2N-\tau-i-1}) - 2a_{N-1}a_{N-\tau-1} - 2b_{N-1}b_{N-\tau-1} \right| \\
&= |-2a_{N-1}(a_{N-\tau-1} + b_{N-\tau-1})| \\
&= 0
\end{aligned}$$

情形 3: 当 $1 \leq \tau \leq \frac{N}{2}-1$ 时,

$$\begin{aligned}
\rho_e(\tau) &= \sum_{i=0}^{N-\tau-2} a_i a_{i+\tau} + \sum_{i=N-\tau-1}^{N-2} a_i b_{2N-\tau-i-3} + \sum_{i=0}^{N-\tau-2} b_i b_{i+\tau} \\
\rho_f(\tau) &= \sum_{i=0}^{N-\tau-2} b_i b_{i+\tau} + \sum_{i=N-\tau-1}^{N-2} b_i (-a_{2N-\tau-i-3}) + \sum_{i=0}^{N-\tau-2} a_i a_{i+\tau}
\end{aligned}$$

因为 $\rho_a(\tau) + \rho_b(\tau) = 0$, 根据引理 2 知, (a, b) 在 $0 \leq i < \frac{N}{2}$ 时, $a_i = b_i$, 所以

$$\begin{aligned}
|\rho_e(\tau) + \rho_f(\tau)| &= \left| \sum_{i=N-\tau-1}^{N-2} a_i b_{2N-\tau-i-3} + \sum_{i=N-\tau-1}^{N-2} b_i (-a_{2N-\tau-i-3}) - 2a_{N-1}a_{N-\tau-1} - 2b_{N-1}b_{N-\tau-1} \right| \\
&= |-4a_{N-1}a_{N-\tau-1}| \\
&= 4
\end{aligned}$$

综上所述, (e, f) 是长度为 $2N-2$ 、零相关区为 $\frac{3}{2}N-1$, 且在零相关区外的幅值为 4 的 II 型偶长 Z-互补序列对。

为了更好地阐述上述定理, 我们给出如下例子, 并且例子的结果皆由 Matlab 得到。

例 1 设 $(a, b) = (+----+---+-----+---, +----+---+-----+---)$ 是由引理 2 产生的长度为 $N=16$ 的 GCP, 验证定理 1 当 $r_1=0, r_2=2N-1$ 的情况下产生得到的 (e, f) 是 II 型偶长 Z-互补序列对。

解 二进制序列 (e, f) 通过定理 1 产生得到, 当 $r_1=0, r_2=2N-1$ 时

$$\begin{aligned}
e &= (----+---+-----+---) \\
f &= (----+---+-----+---)
\end{aligned}$$

计算得到其非周期自相关函数和为

$$\left(|\rho_e(\tau) + \rho_f(\tau)|_0^{29} \right) = (60, 4_7, 0_{22})$$

所以 (e, f) 是一个长度为 30 的 II 型偶长 Z-互补序列对, 并且零相关区长度为 $Z=23$ 。

例 2 设 $(a, b) = (+---+---+---+---, +---+---+---+---)$ 是由引理 2 产生的长度为 $N=8$ 的 GCP, 验证定理 1 当 $r_1 = \frac{N}{2}-1, r_2 = \frac{N}{2}$ 的情况下产生得到的 (e, f) 是 II 型偶长 Z-互补序列对。

解 二进制序列 (e, f) 通过定理 1 产生得到, 当 $r_1 = \frac{N}{2}-1, r_2 = \frac{N}{2}$ 时

$$\begin{aligned}
e &= (+---+---+---+---) \\
f &= (+---+---+---+---)
\end{aligned}$$

计算得到其非周期自相关函数和为

$$\left(|\rho_e(\tau) + \rho_f(\tau)|_0^{13} \right) = (28, 4_3, 0_{10})$$

所以 (e, f) 是一个长度为 14 的 II 型偶长 Z-互补序列对, 并且零相关区长度为 $Z=11$ 。现有 II 型 EB-

ZCP 见表 1。

Table 1. Existing type II EB-ZCP

表 1. 现有 II 型 EB-ZCP

文献	长度	ZCZ	零相关区外的值
[7]	$2^k N + 2^{k-1}$ $N \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2$	$2^k N + 2^{k-1} - N$	$4 \leq v \leq 2^k (2N - 1)$
[7]	$3N$	$3N - 1$	$2N$
[7]	$14N$	$14N - 1$	$4N$
[8]	$2^m P$	$2^m P + 1 - P$	--
[11]	$2^{k+2} N$ $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$	$(2^{k+2} - 1)N$	$2^k \times 4N$
[11]	$N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ $2N + 2$ $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$	$\frac{3}{2}N + 2$	4
[14]	$8N + 4$	$5N + 2$	8
[15]	$2N + 3$	$N + 2$	2 or 6
[15]	$4N + 4$	$\frac{7}{2}N + 4$	8
定理 1	$2N - 2$ $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$	$\frac{3}{2}N - 1$	4

本文与文献[11] [15]的构造方法相比, 存在以下的不同之处。

- 1) 本文删除的码元是 2 个, 文献[11]是插入 2 个码元, 文献[15]是插入 3 个码元。
- 2) 本文删除的位置有 2 种方法, 文献[11]的插入位置在种子对的后端, 文献[15]的插入位置在种子对第 1 个码元前, 中端以及最后 1 个码元后, 本文的删除位置在种子对的前端和后端或者种子对的中端。
- 3) 本文构造的序列与文献[15]相比, 其零相关区外的值更小。

4. 结语

本文主要研究了 II 型偶长 Z-互补序列对, 在二进制互补对的核的基础上, 利用 Turyn 构造新的序列, 在此序列上利用级联和删除 2 个码元, 得到了长度为 $2N - 2, N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ 的 II 型 EB-ZCP, 其中 $\alpha \geq 1, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$, α, β, γ 为非负整数。本文所得的 II 型 EB-ZCP 在特定的长度上是最优的, 与现有的 ZCPs 相比包含许多新长度, 其零相关区外的值较低, 可以为无线通信系统提供更加性能优良的 Z-互补对。

参考文献

- [1] Chen, H.H., Yeh, J.-F. and Suehiro, N. (2001) A Multicarrier CDMA Architecture Based on Orthogonal Complementary Codes for New Generations of Wideband Wireless Communications. *IEEE Communications Magazine*, **39**, 126-135. <https://doi.org/10.1109/35.956124>
- [2] Liu, Z., Guan, Y.L. and Chen, H. (2015) Fractional-Delay-Resilient Receiver Design for Interference-Free MC-CDMA Communications Based on Complete Complementary Codes. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, **14**, 1226-1236. <https://doi.org/10.1109/twc.2014.2365467>
- [3] Spasojevic, P. and Georgiades, C.N. (2001) Complementary Sequences for ISI Channel Estimation. *IEEE Transactions*

- on *Information Theory*, **47**, 1145-1152. <https://doi.org/10.1109/18.915670>
- [4] Pezeshki, A., Calderbank, A.R., Moran, W. and Howard, S.D. (2008) Doppler Resilient Golay Complementary Waveforms. *IEEE Transactions on Information Theory*, **54**, 4254-4266. <https://doi.org/10.1109/tit.2008.928292>
 - [5] Golay, M.J.E. (1951) Static Multislit Spectrometry and Its Application to the Panoramic Display of Infrared Spectra. *Journal of the Optical Society of America*, **41**, 468-472. <https://doi.org/10.1364/josa.41.000468>
 - [6] Fan, P., Yuan, W. and Tu, Y. (2007) Z-Complementary Binary Sequences. *IEEE Signal Processing Letters*, **14**, 509-512. <https://doi.org/10.1109/lsp.2007.891834>
 - [7] Gu, Z., Zhou, Z., Wang, Q. and Fan, P. (2021) New Construction of Optimal Type-II Binary Z-Complementary Pairs. *IEEE Transactions on Information Theory*, **67**, 3497-3508. <https://doi.org/10.1109/tit.2020.3007670>
 - [8] Kumar, R., Sarkar, P., Srivastava, P.K. and Majhi, S. (2021) A Direct Construction of Asymptotically Optimal Type-II ZCP for Every Possible Even Length. *IEEE Signal Processing Letters*, **28**, 1799-1802. <https://doi.org/10.1109/lsp.2021.3105927>
 - [9] Peng, X., Shen, M., Lin, H. and Wang, S. (2022) A Direct Construction of Binary Even-Length Z-Complementary Pairs with Zero Correlation Zone Ratio of 6/7. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **105**, 1612-1615. <https://doi.org/10.1587/transfun.2021eal2105>
 - [10] Zeng, F., He, X., Zhang, Z. and Yan, L. (2023) New Construction of Z-Optimal Type-II Even-Length Quadriphase Z-Complementary Pairs. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **106**, 450-453. <https://doi.org/10.1587/transfun.2022tal0001>
 - [11] 陈晓玉, 孙连峰, 张杰坤, 等. 新的II型偶长 Z-互补对构造[J]. 通信学报, 2023, 44(3): 138-144.
 - [12] 陈晓玉, 孙连峰, 张钰涵. 具有大零相关区宽度的II型偶长 Z-互补对构造方法[J]. 通信学报, 2023, 44(6): 167-174.
 - [13] Chen, X., Zhang, Y., Sun, L. and Li, Y. (2023) New Constructions of Type-II Binary Z-Complementary Pairs. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **106**, 1272-1276. <https://doi.org/10.1587/transfun.2022eal2071>
 - [14] 张丁燕. 二元互相关 Z-互补序列对研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2022.
 - [15] Gu, Z., Wang, Y. and Yang, Y. (2021) New Construction of Even-Length Binary Z-Complementary Pairs with Low PAPR. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **104**, 412-416. <https://doi.org/10.1587/transfun.2020sdl0002>