

关于Hoffman界的推广

赵 帆*, 王 健

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2025年2月11日; 录用日期: 2025年3月4日; 发布日期: 2025年3月11日

摘 要

Hoffman界是用邻接矩阵的特征值来表示正则图的独立数的上界。本文中, 我们通过对独立数的概念进行推广, 从而得到了一个Hoffman界的推广。作为一个应用, 我们得到了EKR定理的饱和性, 即当 $n \geq 2k+1$ 时, 对于集族 $\mathcal{F} \in \binom{[n]}{k}$, 如果 $|\mathcal{F}| > (1+\delta) \binom{n-1}{k-1}$, 那么 $\mathcal{F}$ 中的2-匹配数至少为 $\delta(1+\delta) \binom{n-1}{k-1} \binom{n-k-1}{k-1}$ 。同时, 我们证明了当 $n \geq 2k+1$ 时, 对于集族 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \binom{[n]}{k}$, 如果 $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| > (1+\delta) \binom{n-1}{k-1}^2$, 那么 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 中的2-匹配数至少为 $\frac{n\delta}{2(n-k)} \binom{n-1}{k-1} \binom{n-k-1}{k-1}$ 。

关键词

Hoffman界, Kneser图, 2-匹配

A Generalization of Hoffman's Bound

Fan Zhao*, Jian Wang

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Feb. 11th, 2025; accepted: Mar. 4th, 2025; published: Mar. 11th, 2025

Abstract

Hoffman's bound is an upper on the independence number of a regular graph in terms of the eigenvalues of the adjacency matrix. In this paper, we get a generalization of Hoffman's bound by extending of the definition of the independence number. As an application, we get the saturation of EKR

*通讯作者。

theorem. In other words, we show that if $\mathcal{F} \in \binom{[n]}{k} (n \geq 2k+1)$ with $|\mathcal{F}| > (1+\delta) \binom{n-1}{k-1}$, then the number of 2-matching in $\mathcal{F}$ is greater than $\delta(1+\delta) \binom{n-1}{k-1} \binom{n-k-1}{k-1}$. Meanwhile, we show that if $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \binom{[n]}{k} (n \geq 2k+1)$ with $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| > (1+\delta) \binom{n-1}{k-1}^2$, then the number of 2-matching in $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ is greater than $\frac{n\delta}{2(n-k)} \binom{n-1}{k-1} \binom{n-k-1}{k-1}$.

Keywords

Hoffman's Bound, Kneser Graph, 2-Matching

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

记 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, 用 $\binom{[n]}{k}$ 表示 $[n]$ 中所有 k 元子集组成的集族, 我们称 $\binom{[n]}{k}$ 的一个子集族为一个 k 一致集族或一个 k 一致超图。设 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ 是一个 k 一致集族, 如果对任意的 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, 满足 $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, 则称 $\mathcal{F}$ 是一个相交集族。经典的 Erdős-Ko-Rado (EKR) 定理[1]表明, 当 $n \geq 2k$ 时, 如果 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ 是相交集族, 那么 $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ 。特别地, 当 $n \geq 2k+1$ 时, 满足等号成立的集族是唯一的, 对应的集族为 $\mathcal{F}$ 中所有的包含一个固定的元素的集合。类似地, 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是集族, 如果对任意的 $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, 满足 $A \cap B \neq \emptyset$, 则称 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是交叉相交集族。Pyber [2] 对 EKR 定理进行了推广, 证明了当 $n \geq 2k$ 时, 如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{k}$ 是交叉相交集族, 那么 $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}^2$ 。特别地, 当 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ 时可以推出 EKR 定理。

EKR 定理被认为是极值组合的基础, 其推广和应用已经研究了数年, 文献[3]给出了 EKR 定理不同的证明, 文献[4]给出了度版本的 EKR 定理, 其它相关文献可查阅[5]。

设 G 是一个简单图, 顶点集记为 $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, 边集记为 $E(G)$ 。我们用 $e(G)$ 表示图 G 中边的数量。如果图 G 每个顶点的度都相等且为 d , 我们就称图 G 是 d -正则图。设 $S \subseteq V(G)$, 记 $G[S]$ 为 S 在 G 中的导出子图, 其顶点集为 S , 边集为 G 的边集中两个顶点均属于 S 的边组成的集合。独立集是指图中两两互不相邻的顶点构成的集合, 用独立数 $\alpha(G)$ 表示图 G 的最大独立集的大小, 即 $\alpha(G) = \max\{|S| : e(G[S]) = 0\}$ 。邻接矩阵是表示图中顶点间相邻关系的矩阵, 图 G 的邻接矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 定义如下:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & u_i u_j \in E(G) \\ 0, & u_i u_j \notin E(G) \end{cases}.$$

显然 A 是对称矩阵。Hoffman 界是用邻接矩阵的特征值来表示正则图的独立数的上界。然而 Hoffman 并没有发表他的结果, 直到 2021 年 Haemers [6] 将其整理成文。

定理 1.1 (Hoffman) 对于 n 个顶点的 d -正则图 G , 有 $\alpha(G) \leq -\frac{n\lambda_n}{d-\lambda_n}$ 。

证明: 记图 G 的邻接矩阵为 A 。设矩阵 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 不妨设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, 对应的特征向量分别记为 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 。由于图 G 是正则图, 所以我们可以得到 $A\mathbf{1} = d\mathbf{1}$ (其中 $\mathbf{1}$ 为全 1 列向量), 即 $A(1, 1, \dots, 1)^T = d(1, 1, \dots, 1)^T$, 也就是说 $\lambda_1 = d$ 。于是 λ_1 对应的特征向量为 $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1)^T$ 。记 S 是图 G 的一个独立集, 那么有 $\mathbf{1}_S^T A \mathbf{1}_S = 0$, 其中 $\mathbf{1}_S$ 为 S 的特征向量, 不妨记 $\mathbf{1}_S = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ 。于是有

$$\alpha_1 = \langle \mathbf{1}_S, v_1 \rangle = \frac{|S|}{\sqrt{n}}, \quad |S| = \|\mathbf{1}_S\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

根据 $\mathbf{1}_S^T A \mathbf{1}_S = 0$ 可得

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right)^T A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = 0,$$

即 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 = 0$, 于是

$$\lambda_1 \alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i^2 = d \alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i^2 = 0,$$

放缩可得

$$d \alpha_1^2 + \lambda_n \sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \leq 0,$$

其中 $\alpha_1^2 = \frac{|S|^2}{n}$, $\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 = |S| - \alpha_1^2 = |S| - \frac{|S|^2}{n}$, 代入上式可得

$$d \frac{|S|^2}{n} + \lambda_n \left(|S| - \frac{|S|^2}{n} \right) \leq 0,$$

化简可得 $|S| \leq -\frac{n\lambda_n}{d-\lambda_n}$, 于是图 G 的独立数 $\alpha(G) \leq -\frac{n\lambda_n}{d-\lambda_n}$ 。定理 1.1 即证。

当 $n \geq 2k$ 时, Kneser 图 $KG(n, k)$ 的定义如下: 顶点集为 $[n]$ 的所有 k 元子集组成的集族, 即 $V(KG(n, k)) = \binom{[n]}{k}$, 两个顶点之间连边当且仅当这两个顶点对应的 k 元子集是不相交的, 即边集为 $E(KG(n, k)) = \left\{ (F_1, F_2) : F_1, F_2 \in \binom{[n]}{k}, F_1 \cap F_2 = \emptyset \right\}$ 。特别地, $KG(5, 2)$ 即为 Peterson 图。由定义可知, $KG(n, k)$ 是包含 $\binom{n}{k}$ 个顶点的 $\binom{n-k}{k}$ 正则图。Lovász [7] 证明了 Kneser 图 $KG(n, k)$ 的邻接矩阵的特征值为 $(-1)^j \binom{n-k-j}{k-j}$, 其中 $1 \leq j \leq k$, 因此最大特征值 $\lambda_1 = \binom{n-k}{k}$, 最小特征值 $\lambda_{\binom{n}{k}} = -\binom{n-k-1}{k-1}$ 。根据定

理 1.1, 我们可以得到 Kneser 图的独立数 $\alpha(KG(n, k)) \leq \frac{\binom{n}{k} \binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}} = \frac{\binom{n}{k}}{\frac{n-k}{k} + 1} = \binom{n-1}{k-1}$, 这与 EKR

定理给出的结果是一致的。这是因为, Kneser 图 $KG(n, k)$ 中独立集的大小就等价于相交族 $\binom{[n]}{k}$ 的大小。

图的 2-匹配是指图中顶点不交的边组成的集合, 2-匹配数是指 2-匹配中边的数量。在本文中, 我们主要对独立数 $\alpha(G)$ 的概念进行推广, 从而得到 Hoffman 界的推广, 并将其应用于 Kneser 图中, 得到两个重要结论。

定理 1.2 当 $n \geq 2k+1$ 时, 对于族 $\mathcal{F} \in \binom{[n]}{k}$, 如果 $|\mathcal{F}| > (1+\delta) \binom{n-1}{k-1}$, 那么 $\mathcal{F}$ 中的 2-匹配数至少为 $\delta(1+\delta) \binom{n-1}{k-1} \binom{n-k-1}{k-1}$ 。

定理 1.3 当 $n \geq 2k+1$ 时, 对于族 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \binom{[n]}{k}$, 如果 $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| > (1+\delta) \binom{n-1}{k-1}^2$, 那么 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 中的 2-匹配数至少为 $\frac{n\delta}{2(n-k)} \binom{n-1}{k-1} \binom{n-k-1}{k-1}$ 。

2. 定理 1.2 的证明

我们对独立数 $\alpha(G)$ 进行推广。我们称 $I \subseteq V(G)$ 为 G 的一个 ε -近似独立集, 如果满足 $e(G[I]) \leq \varepsilon |I|^2$ 。用 ε -近似独立数 $\tilde{\alpha}_\varepsilon(G)$ 表示图 G 的最大 ε -近似独立集的大小, 即 $\tilde{\alpha}_\varepsilon(G) = \max \{|I| : e(G[I]) \leq \varepsilon |I|^2\}$ 。显然, 当 $\varepsilon = 0$ 时 ε -近似独立数 $\tilde{\alpha}_\varepsilon(G)$ 即为独立数 $\alpha(G)$ 。 ε -近似独立集的引入, 放松了独立集中边数为 0 的限制, 使得我们可以研究图的更广泛的性质。因此, 我们可以得到 Hoffman 界的如下推广。

定理 2.1 对于 n 的顶点的 d -正则图 G , 有 $\tilde{\alpha}_\varepsilon(G) \leq \frac{n\lambda_n}{d - \lambda_n - \varepsilon n}$ 。

证明: 记图 G 的邻接矩阵为 A 。设矩阵 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 不妨设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, 对应的特征向量分别记为 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 。由于图 G 是正则图, 所以我们可以得到 $A\mathbf{1} = d\mathbf{1}$ (其中 $\mathbf{1}$ 为全 1 列向量), 即 $A(1, 1, \dots, 1)^T = d(1, 1, \dots, 1)^T$, 也就是说 $\lambda_1 = d$ 。于是 λ_1 对应的特征向量为 $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1)^T$ 。记 S 是图 G 的一个 ε -近似独立集, 那么有 $\mathbf{1}_S^T A \mathbf{1}_S \leq \varepsilon |S|^2$, 其中 $\mathbf{1}_S$ 为 S 的特征向量, 不妨记 $\mathbf{1}_S = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ 。于是有

$$\alpha_1 = \langle \mathbf{1}_S, v_1 \rangle = \frac{|S|}{\sqrt{n}}, \quad |S| = \|\mathbf{1}_S\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

根据 $\mathbf{1}_S^T A \mathbf{1}_S \leq \varepsilon |S|^2$ 可得

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right)^T A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) \leq \varepsilon |S|^2,$$

即 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leq \varepsilon |S|^2$, 于是

$$\lambda_1 \alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i^2 = d \alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leq \varepsilon |S|^2,$$

放缩可得

$$d \alpha_1^2 + \lambda_n \sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \leq \varepsilon |S|^2,$$

其中 $\alpha_1^2 = \frac{|S|^2}{n}$, $\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 = |S| - \alpha_1^2 = |S| - \frac{|S|^2}{n}$, 代入可得

$$d \frac{|S|^2}{n} + \lambda_n \left(|S| - \frac{|S|^2}{n} \right) \leq \varepsilon |S|^2,$$

化简可得 $|S| \leq -\frac{n\lambda_n}{d - \lambda_n - \varepsilon n}$, 于是图 G 的 ε -近似独立数 $\tilde{\alpha}_\varepsilon(G) \leq -\frac{n\lambda_n}{d - \lambda_n - \varepsilon n}$ 。定理 2.1 即证。

定理 1.2 的证明: 令 $\varepsilon = \frac{\delta}{1+\delta} \cdot \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}}$ 。下面我们将证明 $\mathcal{F}$ 不是 Kneser 图中的 ε -近似独立集。反

证法假设 $\mathcal{F}$ 是 Kneser 图中的一个 ε -近似独立集, 根据定理 2.1, 我们可以得到, $|\mathcal{F}| \leq \tilde{\alpha}_\varepsilon(KG(n, k))$, 即

$$(1+\delta) \binom{n-1}{k-1} < |\mathcal{F}| \leq \frac{\binom{n}{k} \binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} - \varepsilon \binom{n}{k}},$$

不等式两边同时除以 $\binom{n-1}{k-1}$, 可得

$$1+\delta < \frac{\frac{n}{k} \binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} - \varepsilon \binom{n}{k}},$$

不等式右边分子分母同时除以 $\binom{n-k-1}{k-1}$, 可得

$$1+\delta < \frac{\frac{n}{k}}{\frac{n-k}{k} + 1 - \varepsilon \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-k-1}{k-1}}}.$$

不妨令 $\varepsilon = \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} \eta$, 代入上式可得 $1+\delta < \frac{\frac{n}{k}}{\frac{n-k}{k} - \frac{n}{k} \eta}$, 化简可得 $\eta > \frac{\delta}{1+\delta}$, 于是

$$\varepsilon > \frac{\delta}{1+\delta} \cdot \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}},$$

这与 $\varepsilon = \frac{\delta}{1+\delta} \cdot \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}}$ 矛盾。于是 $\mathcal{F}$ 不是 Kneser 图中的 ε -近似独立集。

因此 $\mathcal{F}$ 中的 2-匹配数至少为

$$\varepsilon |\mathcal{F}|^2 \geq \frac{\delta}{1+\delta} \cdot \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} \cdot (1+\delta)^2 \binom{n-1}{k-1}^2 = \delta(1+\delta) \binom{n-1}{k-1} \binom{n-k-1}{k-1}.$$

定理 1.2 通过对独立数 $\alpha(G)$ 概念的推广, 证明了 EKR 定理的饱和性。

3. 定理 1.3 的证明

设 $I \subseteq V(G)$, $J \subseteq V(G)$, 记 $e(I, J)$ 为 G 的边集中一个顶点在 I 中、另一个顶点在 J 中的边组成的集合。我们对独立数 $\alpha(G)$ 进行推广, 定义 $\beta(G) = \max\{|I||J| : e(I, J) = 0\}$ 。同时, 我们对 ε -近似独立数 $\tilde{\alpha}_\varepsilon(G)$ 进行推广, 定义 $\tilde{\beta}_\varepsilon(G) = \max\{|I||J| : e(I, J) \leq \varepsilon |I||J|\}$ 。显然, 当 $\varepsilon = 0$ 时 $\tilde{\beta}_\varepsilon(G)$ 即为 $\beta(G)$ 。我们可以得到 Hoffman 界的如下推广。

定理 3.1 对于 n 的顶点的 d -正则图 G , 有 $\tilde{\beta}_\varepsilon(G) \leq \frac{n^2 \lambda_n^2}{d^2 - \lambda_n^2 + \varepsilon^2 n^2 - 2\varepsilon dn}$ 。

证明: 记图 G 的邻接矩阵为 A 。设矩阵 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 不妨设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, 对应的特征向量分别记为 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 。因为图 G 是正则图, 所以我们可以得到 $A\mathbf{1} = d\mathbf{1}$ (其中 $\mathbf{1}$ 为全 1 列向量), 即 $A(1, 1, \dots, 1)^T = d(1, 1, \dots, 1)^T$, 也就是说 $\lambda_1 = d$ 。于是 λ_1 对应的特征向量为 $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1)^T$ 。记 $I \subseteq V(G)$, $J \subseteq V(G)$ 满足 $e(I, J) \leq \varepsilon |I||J|$, 那么有 $\mathbf{1}_I^T A \mathbf{1}_J \leq \varepsilon |I||J|$, 其中 $\mathbf{1}_I$ 为 I 的特征向量, $\mathbf{1}_J$ 为 J 的特征向量, 不妨记 $\mathbf{1}_I = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $\mathbf{1}_J = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ 。于是有

$$\alpha_1 = \langle \mathbf{1}_I, v_1 \rangle = \frac{|I|}{\sqrt{n}}, \quad \beta_1 = \langle \mathbf{1}_J, v_1 \rangle = \frac{|J|}{\sqrt{n}},$$

$$|I| = \|\mathbf{1}_I\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2, \quad |J| = \|\mathbf{1}_J\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2.$$

根据 $\mathbf{1}_I^T A \mathbf{1}_J \leq \varepsilon |I||J|$ 可得

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right)^T A \left(\sum_{i=1}^n \beta_i v_i \right) \leq \varepsilon |I||J|,$$

即 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i \leq \varepsilon |I||J|$, 于是

$$\lambda_1 \alpha_1 \beta_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i = d \alpha_1 \beta_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i \leq \varepsilon |I| |J|,$$

放缩可得

$$d \alpha_1 \beta_1 + \lambda_n \sum_{i=2}^n \alpha_i \beta_i \leq \varepsilon |I| |J|,$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式可得 $\sum_{i=2}^n \alpha_i \beta_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=2}^n \alpha_i^2\right) \left(\sum_{i=2}^n \beta_i^2\right)}$, 将 $\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 = |I| - \alpha_1^2 = |I| - \frac{|I|^2}{n}$ 和 $\sum_{i=2}^n \beta_i^2 = |J| - \beta_1^2 = |J| - \frac{|J|^2}{n}$ 代入可得 $\sum_{i=2}^n \alpha_i \beta_i \leq \sqrt{\left(|I| - \frac{|I|^2}{n}\right) \left(|J| - \frac{|J|^2}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sqrt{|I| |J| (n - |I|) (n - |J|)}$, 又由于 $\alpha_1 \beta_1 = \frac{|I| |J|}{n}$, 注意 λ_n 为负数, 于是可得

$$d \frac{|I| |J|}{n} + \frac{\lambda_n}{n} \sqrt{|I| |J| (n - |I|) (n - |J|)} \leq \varepsilon |I| |J|,$$

即

$$\frac{\lambda_n}{n} \sqrt{|I| |J| (n - |I|) (n - |J|)} \leq \left(\varepsilon - \frac{d}{n}\right) |I| |J|,$$

不等式两边同时平方, 可得

$$\left(\varepsilon - \frac{d}{n}\right)^2 |I| |J| \leq \frac{\lambda_n^2}{n^2} (n - |I|) (n - |J|),$$

化简可得 $|I| |J| \leq \frac{n^2 \lambda_n^2}{d^2 - \lambda_n^2 + \varepsilon^2 n^2 - 2\varepsilon d n}$, 于是 $\tilde{\beta}_\varepsilon(G) \leq \frac{n^2 \lambda_n^2}{d^2 - \lambda_n^2 + \varepsilon^2 n^2 - 2\varepsilon d n}$ 。定理 3.1 即证。

定理 1.3 的证明: 令 $\varepsilon = \frac{n\delta}{2(1+\delta)(n-k)} \cdot \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}}$ 。下面我们证明 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 中不存在 I, J 满足

$e(I, J) \leq \varepsilon |I| |J|$ 。反证法假设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 中存在 I, J 满足 $e(I, J) \leq \varepsilon |I| |J|$ 。根据定理 3.1, 我们可以得到, $|\mathcal{A}| |\mathcal{B}| \leq \tilde{\beta}_\varepsilon(KG(n, k))$, 即

$$(1+\delta) \binom{n-1}{k-1}^2 < |\mathcal{A}| |\mathcal{B}| \leq \frac{\binom{n}{k}^2 \binom{n-k-1}{k-1}^2}{\binom{n-k}{k}^2 - \binom{n-k-1}{k-1}^2 + \varepsilon^2 \binom{n}{k}^2 - 2\varepsilon \binom{n-k}{k} \binom{n}{k}},$$

不等式两边同时除以 $\binom{n-1}{k-1}^2$, 可得

$$1+\delta < \frac{\frac{n^2}{k^2} \binom{n-k-1}{k-1}^2}{\binom{n-k}{k}^2 - \binom{n-k-1}{k-1}^2 + \varepsilon^2 \binom{n}{k}^2 - 2\varepsilon \binom{n-k}{k} \binom{n}{k}},$$

不等式右边分子分母同时除以 $\binom{n-k-1}{k-1}^2$, 可得

$$1+\delta < \frac{\frac{n^2}{k^2}}{\left(\frac{n-k}{k}\right)^2 - 1 + \varepsilon^2 \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n-k-1}{k-1}^2} - \frac{2\varepsilon(n-k)}{k} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-k-1}{k-1}}}.$$

不妨令 $\varepsilon = \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} \eta$, 代入上式可得 $1+\delta < \frac{\frac{n^2}{k^2}}{\frac{n^2-2nk}{k^2} + \frac{n^2}{k^2} \eta^2 - \frac{2n(n-k)}{k^2} \eta}$, 化简可得

$$\eta > \frac{n\delta}{2(1+\delta)(n-k)}, \text{ 于是}$$

$$\varepsilon > \frac{n\delta}{2(1+\delta)(n-k)} \cdot \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}},$$

这与 $\varepsilon = \frac{n\delta}{2(1+\delta)(n-k)} \cdot \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}}$ 矛盾。于是 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 中不存在 I, J 满足 $e(I, J) \leq \varepsilon |I||J|$ 。

因此 2-匹配的数量至少为

$$\varepsilon |\mathcal{A}||\mathcal{B}| \geq \frac{n\delta}{2(1+\delta)(n-k)} \cdot \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} \cdot (1+\delta) \binom{n-1}{k-1}^2 = \frac{n\delta}{2(n-k)} \binom{n-1}{k-1} \binom{n-k-1}{k-1}.$$

4. 结语

本文主要通过对独立数 $\alpha(G)$ 的概念进行推广, 从而得到了 Hoffman 界的推广, 并将其应用于 Kneser 图中得到了两个重要结论。对于极图的构造仍需要后续进一步研究。

基金项目

国家自然科学基金(12471316)。

参考文献

- [1] Erdős, P., Ko, C. and Rado, R. (1961) Intersection Theorems for Systems of Finite Sets. *The Quarterly Journal of Mathematics*, **12**, 313-320. <https://doi.org/10.1093/qmath/12.1.313>
- [2] Pyber, L. (1986) A New Generalization of the Erdős-Ko-Rado Theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **43**, 85-90. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(86\)90025-7](https://doi.org/10.1016/0097-3165(86)90025-7)
- [3] Frankl, P. and Graham, R.L. (1989) Old and New Proofs of the Erdős-Ko-Rado Theorem. *Journal of Sichuan University*, **26**, 112-122.

-
- [4] Huang, H. and Zhao, Y. (2017) Degree Versions of the Erdős-Ko-Rado Theorem and Erdős Hypergraph Matching Conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **150**, 233-247. <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2017.03.006>
 - [5] Deza, M. and Frankl, P. (1983) Erdős-Ko-Rado Theorem—22 Years Later. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, **4**, 419-431. <https://doi.org/10.1137/0604042>
 - [6] Haemers, W.H. (2021) Hoffman's Ratio Bound. *Linear Algebra and Its Applications*, **617**, 215-219. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2021.02.010>
 - [7] Lovasz, L. (1979) On the Shannon Capacity of a Graph. *IEEE Transactions on Information Theory*, **25**, 1-7. <https://doi.org/10.1109/tit.1979.1055985>