

两类互连网络的谱特征

陈语哲, 杨金娜, 梁志鹏*

塔里木大学信息工程学院, 新疆 阿拉尔

收稿日期: 2025年2月11日; 录用日期: 2025年3月4日; 发布日期: 2025年3月11日

摘要

图的特征值集及其多重性称为谱, 它可以用来获得图的各种拓扑性质, 如连通性、韧性等。师海忠利用图的笛卡尔乘积方法构建了两类新的笛卡尔乘积互连网络 $C_n \times Q_m$ 和 $P_n \times Q_m$ 。本文分析研究了此两类互连网络的拓扑结构, 得到了两类互连网络的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵的特征值及其多重性, 刻画了两类互连网络的谱特征, 从而增加了已知谱图的类。

关键词

互连网络, 特征值, 邻接谱, Laplace谱

Spectral Characteristics of Two Classes Interconnection Networks

Yuzhe Chen, Jinna Yang, Zhipeng Liang*

College of Information Engineering, Tarim University, Alar Xinjiang

Received: Feb. 11th, 2025; accepted: Mar. 4th, 2025; published: Mar. 11th, 2025

Abstract

The eigenvalues and its multiplicity of a graph are called spectrum, which can be used to obtain various topological properties of the graph, such as connectivity, toughness, etc. Shi Haizhong constructed new Cartesian product interconnection networks $C_n \times Q_m$ and $P_n \times Q_m$ using the Cartesian product method of graphs. This article analyzes and studies the topological structures of two types of interconnected networks, obtains the eigenvalues and multiplicities of the adjacency

*通讯作者。

matrix and Laplace matrix of the two types of interconnected networks, characterizes the spectral characteristics of the two types of interconnected networks, so as to increase the classes of the graph with known spectra.

Keywords

Interconnection Network, Eigenvalue, Adjacency Spectrum, The Laplace Spectrum

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

关于图的网络分析及其应用的研究是当前图论研究中的一个热点问题。图的笛卡尔乘积方法是设计互连网络的一类重要方法[1], 是网络设计的一种核心手段。基于笛卡尔乘积互连网络的谱对于研究图论之所以重要, 主要在于可以用其计算图的诸多不变量, 如特征值及其重数等关键参数。此外, 此类方法在交通网络优化、芯片电路设计、社交网络分析等也有实际应用背景。在文献[2]-[7]中, 对于一些著名的互连网络谱的研究, 如(广义)超立方体、折叠超立方体、增广超立方体的(拉普拉斯)谱等。

本文从两类互连网络 $C_n \times Q_m$ 和 $P_n \times Q_m$ 的拓扑结构出发, 根据邻接谱、Laplace 谱定义, 得到了邻接矩阵并刻画邻接谱特征、拉普拉斯矩阵并刻画 Laplace 谱特征, 并附有程序代码。

2. 基本概念

本文所讨论的图均为简单图, 未定义的术语和记号见文献[8]。下面介绍互连网络、邻接谱以及 Laplace 谱的定义。

定义 1 [1] 设环网 C_n 是无向图, m -立方体 Q_m 是 m 正则的连通图, 则环网 C_n 与 m -立方体 Q_m 的笛卡尔乘积, 即互连网络 $C_n \times Q_m$ 。

根据定义, 互连网络 $C_n \times Q_m$ 的基本性质如下:

- Q_m 有 2^m 个顶点和 $m \cdot 2^{m-1}$ 条边;
- $C_n \times Q_m$ 的顶点数为 $n \cdot 2^m$, 边数为 $n \cdot 2^{m-1}(m+2)$;
- $C_n \times Q_m$ 正则度为 $m+2$ 。

定义 2 [1] 设 Pancake 网络 P_n 是无向图, m -立方体 Q_m 是 m 正则的连通图, 则 Pancake 网络 P_n 与 m -立方体 Q_m 的笛卡尔乘积, 即互连网络 $P_n \times Q_m$ 。

根据定义, 互连网络 $P_n \times Q_m$ 的基本性质如下:

- $P_n \times Q_m$ 的顶点数为 $n! \cdot 2^m$, 边数为 $n! \cdot 2^m(n+m-1)$ 。
- $P_n \times Q_m$ 正则度为 $n+m-1$ 。

定义 3 [2] 设 G 是一个简单图, $A(G)$ 是对应的邻接矩阵。由特征多项式 $|\lambda E - A| = 0$ 的解构成所有特征值的集合, 称为图 G 邻接矩阵的谱, 简称邻接谱, 记作 $Sp(G)$ 。

$$Sp(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为特征值, x_1, x_2, \dots, x_n 为特征值对应的重数。

用记号 \otimes 表示矩阵的张量积(又称为 Kronecker 积), 则 $C_n \times Q_m$ 的邻接矩阵可表示为 $A(C_n \times Q_m) = I_n \otimes A(Q_m) + A(C_n) \otimes I_{2^m}$, $P_n \times Q_m$ 的邻接矩阵可表示为

$$A(P_n \times Q_m) = I_{n!} \otimes A(Q_m) + A(P_n) \otimes I_{2^m}.$$

定义 4 [2] 设 L 是 Laplace 矩阵, 由 $L = \Delta - A$, 以及特征多项式 $|\lambda E - L| = 0$ 的解构成所有特征值的集合, 称为 Laplace 谱, 其中 Δ 是与 L 同阶的度矩阵, A 是与 L 同阶的邻接矩阵.

针对本文所提到的两类互连网络的度矩阵分别为

$$\Delta(C_n \times Q_m) = \text{diag} \left\{ \underbrace{m+2, m+2, \dots, m+2}_{n \cdot 2^m} \right\}$$

$$\Delta(P_n \times Q_m) = \text{diag} \left\{ \underbrace{n+m-1, n+m-1, \dots, n+m-1}_{n! \cdot 2^m} \right\}$$

根据文献[9], 环网 C_n 、Pancake 网 P_n 和 m -立方体 Q_m 的邻接谱如下:

Table 1. Ring network C_n neighbourhood spectrum

表 1. 环网 C_n 邻接谱

n	特征值	重数
3	2, -1	1, 2
4	3, -1	1, 3
5	4, -1	1, 4
6	5, -1	1, 5
...
n	$n-1, -1$	$1, n-1$

Table 2. Pancake network P_n neighbouring spectra

表 2. Pancake 网 P_n 邻接谱

n	特征值	重数
2	1, -1	1, 1
3	$2 \cos\left(\frac{\pi j}{7}\right), j = 1, 2, \dots, 6$	
...
n	$2 \cos\left(\frac{\pi j}{n!+1}\right), j = 1, 2, \dots, n!$	

Table 3. m -cube Q_m neighbourhood spectrum

表 3. m -立方体 Q_m 邻接谱

m	特征值	重数
1	-1, 1	1, 1
2	-2, 0, 2	1, 2, 1

续表

3	-3, -1, 1, 3	1, 3, 3, 1
4	-4, -2, 0, 2, 4	1, 4, 6, 4, 1
...
m	$-m, -m+2, -m+4, -m+6, \dots$	$1, m, \frac{m(m-1)}{2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{6}, \dots$

由以上叙述，本文需要如下两个引理。

引理 1 [2] 设图 G 和 H 的特征根分别是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 和 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ ，则笛卡尔乘积图的特征值为 $\lambda_i + \mu_j$ ，其中 $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ 。

引理 2 [9] 已知图的邻接矩阵为 A ，邻接谱 $Sp(A) = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n; \mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_m)$ ，正则度为 Δ ，则它的 Laplace

谱为 $Sp(L) = (\lambda_1 + \Delta \ \lambda_2 + \Delta \ \dots \ \lambda_n + \Delta; \mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_m)$ 。

3. 互连网络 $C_n \times Q_m$ 的谱特征

3.1. 互连网络 $C_n \times Q_m$ 的邻接谱

设互连网络 $C_n \times Q_m$ ，分别将环网 C_n 、 m -立方体 Q_m 和 I_m 的特征值代入互连网络的邻接矩阵 A 中对应的分块矩阵的位置上，得到的新矩阵记为 A' 。

定理 3.1 已知互连网络 $C_3 \times Q_m$ 与其对应的新矩阵 A' ，则 A' 的特征值即为互连网络 $C_3 \times Q_m$ 邻接谱。

证明：互连网络 $C_3 \times Q_m$ 的邻接矩阵可表示为 $A(C_3 \times Q_m) = \begin{pmatrix} Q_m & I_m & I_m \\ I_m & Q_m & I_m \\ I_m & I_m & Q_m \end{pmatrix}$ ，其中 Q_m 是超立方体 Q_m

的邻接矩阵， I_m 是与 Q_m 同阶的分块单位矩阵。

先将 Q_m 与 I_m 的特征值代入邻接矩阵 A 中，再对其求解特征值。

1. 当 Q_m 的特征值为 $-m$ (重数为 1) 时， $A' = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ 。

由特征多项式 $|\lambda E - A| = 0$ 得：

$$\begin{aligned} |\lambda E - A'| &= \begin{vmatrix} \lambda + m & -1 & -1 \\ -1 & \lambda + m & -1 \\ -1 & -1 & \lambda + m \end{vmatrix} = \lambda + m - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda + m & -1 \\ 1 & -1 & \lambda + m \end{vmatrix} \\ &= \lambda + m - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda + m + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + m + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + m - 2)(\lambda + m + 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

得： $\lambda_1 = -m + 2$ (重数为 1)， $\lambda_2 = -m - 1$ (重数为 2)。

2. 当 Q_m 的特征值为 $-m + 2$ (重数为 m) 时，

$$A' = \begin{pmatrix} -m + 2 & 1 & 1 \\ 1 & -m + 2 & 1 \\ 1 & 1 & -m + 2 \end{pmatrix}.$$

由特征多项式 $|\lambda E - A| = 0$ 得:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + m - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda + m - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda + m - 2 \end{vmatrix} = \lambda + m - 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda + m - 2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda + m - 2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda + m - 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda + m - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + m - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + m - 4)(\lambda + m - 1)^2 = 0.$$

得: $\lambda_3 = -m + 4$ (重数为 m), $\lambda_4 = -m + 1$ (重数为 $2m$).

3. 当 Q_m 的特征值为 $-m + 4$ (重数为 $\frac{m(m-1)}{2}$) 时,

$$A' = \begin{pmatrix} -m + 4 & 1 & 1 \\ 1 & -m + 4 & 1 \\ 1 & 1 & -m + 4 \end{pmatrix}.$$

由特征多项式 $|\lambda E - A| = 0$ 得:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + m - 4 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda + m - 4 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda + m - 4 \end{vmatrix} = \lambda + m - 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda + m - 4 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda + m - 4 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda + m - 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda + m - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + m - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + m - 6)(\lambda + m - 3)^2 = 0$$

得: $\lambda_5 = -m + 6$ (重数为 $\frac{m(m-1)}{2}$), $\lambda_6 = -m + 3$ (重数为 $m(m-1)$).

以此类推, 可得:

$$Sp(C_3 \times Q_m) = \begin{pmatrix} -m + 2 & -m + 4 & -m + 6 & \cdots & -m - 1 & -m + 1 & -m + 3 & \cdots \\ 1 & m & m(m-1)/2 & \cdots & 2 & 2m & m(m-1) & \cdots \end{pmatrix}$$

即定理 3.1 成立, 得证。

通过利用上述定理, 我们可以很容易得到一些维数较低的互连网络 $C_3 \times Q_m$ 的谱。如:

$$Sp(C_3 \times Q_4) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & -5 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 2 & 8 & 12 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

引理 3.2 互连网络 $C_n \times Q_m$ 的邻接矩阵可表示为

$$A(C_n \times Q_m) = \begin{pmatrix} Q_m & I_m & O_m & O_m & \cdots & I_m \\ I_m & Q_m & I_m & O_m & \cdots & O_m \\ O_m & I_m & Q_m & I_m & \cdots & O_m \\ O_m & O_m & I_m & Q_m & \cdots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_m & O_m & O_m & O_m & \cdots & Q_m \end{pmatrix},$$

是 n 阶分块对角矩阵, 其中 Q_m 是超立方体 Q_m 的邻接矩阵, I_m 与 O_m 分别是与 Q_m 同阶的分块单位矩阵和零矩阵。

定理 3.3 互连网络 $C_n \times Q_m$ 的谱为

$$Sp(C_n \times Q_m) = \begin{pmatrix} n-m-1 & n-m+1 & n-m+3 & \cdots & -m-1 & -m+1 & -m+3 & \cdots \\ 1 & m & m(m-1)/2 & \cdots & n-1 & m(m-1) & m(m-1)(n-1)/2 & \cdots \end{pmatrix}$$

证明: 根据 C_n 和 Q_m 的结构特征及邻接谱的定义, 由表 1 和表 3 可得邻接谱。由引理 1 可知, $C_n \times Q_m$ 的特征值, 为 $n-m-1, n-m+1, n-m+3, \dots, -m-1, -m+1, -m+3, \dots$ 。重数分别为:

$$1, m, \frac{m(m-1)}{2}, \dots, n-1, m(n-1), \frac{m(m-1)(n-1)}{2}, \dots$$

由此可知 $C_n \times Q_m$ 的邻接谱为:

$$Sp(C_n \times Q_m) = \begin{pmatrix} n-m-1 & n-m+1 & n-m+3 & \cdots & -m-1 & -m+1 & -m+3 & \cdots \\ 1 & m & m(m-1)/2 & \cdots & n-1 & m(m-1) & m(m-1)(n-1)/2 & \cdots \end{pmatrix}$$

3.2. 互连网络 $C_n \times Q_m$ 的 Laplace 谱

定理 3.4 互连网络 $C_n \times Q_m$ 的 Laplace 谱为

$$Sp(L(C_n \times Q_m)) = \begin{pmatrix} n+1 & n+3 & n+5 & \cdots & 1 & 3 & 5 & \cdots \\ 1 & m & m(m-1)/2 & \cdots & n-1 & m(n-1) & m(m-1)(n-1)/2 & \cdots \end{pmatrix}$$

证明: 由定义 1 和定理 3.3, 有互连网络 $C_n \times Q_m$ 的正则度为 $m+2$, 特征值为 $n-m-1, n-m+1, n-m+3, \dots, -m-1, -m+1, -m+3, \dots$

根据引理 1 容易得出, 互连网络的 Laplace 谱上的特征值是由互连网络的邻接谱的特征值与其正则度经过逐项相加得到的, 相应重数不变。从而, 互连网络 $C_n \times Q_m$ 的 Laplace 特征值为 $n+1, n+3, n+5, \dots, 1, 3, 5, \dots$

综上所述可知:

$$Sp(L(C_n \times Q_m)) = \begin{pmatrix} n+1 & n+3 & n+5 & \cdots & 1 & 3 & 5 & \cdots \\ 1 & m & m(m-1)/2 & \cdots & n-1 & m(n-1) & m(m-1)(n-1)/2 & \cdots \end{pmatrix}$$

4. 互连网络 $P_n \times Q_m$ 的谱特征

受第三节互连网络 $C_n \times Q_m$ 谱特征证明思路, 本节互连网络 $P_n \times Q_m$ 的两种谱求解不再详细写出证明过程。又因对确定的互连网络 $C_n \times Q_m$ 谱特征分析观察, 没有一般的公式解。因此, 本节利用上一节讨论两种谱特征思路, 利用算法编程实现互连网络 $P_n \times Q_m$ 两种谱特征的讨论。

4.1. 互连网络 $P_n \times Q_m$ 的邻接谱

互连网络 $P_n \times Q_m$ 的邻接谱求解算法思路:

第一步, 设计 Pancake 网 P_n 邻接谱程序。根据表 2 的结果, 我们利用 Mathematica 软件编程, 可得 Pancake 网 P_n 邻接谱。

第二步, 设计 m -立方体 Q_m 邻接谱程序。根据表 3 的结果, 我们利用 Mathematica 软件编程, 可得 m -立方体 Q_m 邻接谱。

第三步, 根据引理 1, 设计任意两个特征值求和, 即得互连网络 $P_n \times Q_m$ 的邻接谱。即将上述两步得到的特征值分为两组数值列表, 进而生成一个包含每组数值的所有可能的配对, 每个配对求和并输出列表。

例 1 画出互连网络 $P_2 \times Q_3$ 的图形并求解邻接谱。

解: 互连网络 $P_2 \times Q_3$ 的图形, 见图 1:

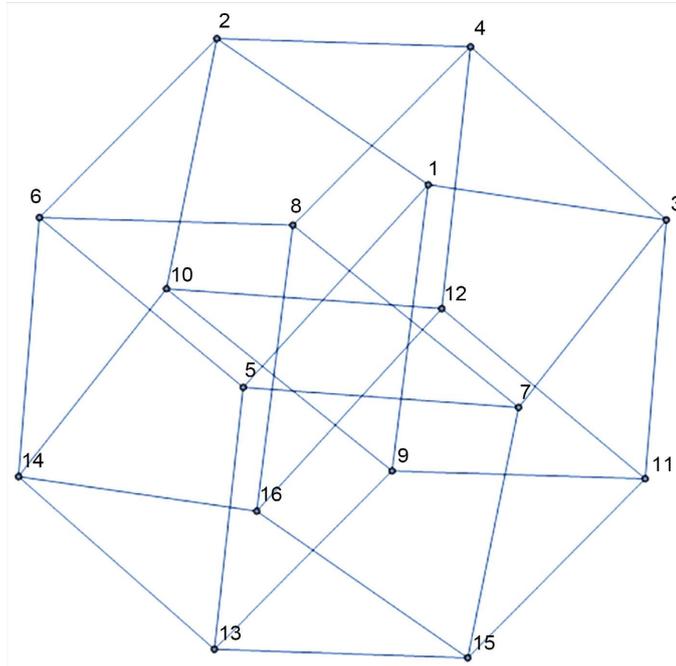


Figure 1. $P_2 \times Q_3$
图 1. $P_2 \times Q_3$

根据附录中的程序代码 1, 可得互连网络 $P_2 \times Q_3$ 的邻接谱

$$Sp(A(P_2 \times Q_3)) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2. 互连网络 $P_n \times Q_m$ 的 Laplace 谱

上小节得到的邻接谱后, 根据定义 2 和引理 2, 互连网络 $P_n \times Q_m$ 的正则度为

$$\Delta(P_n \times Q_m) = \text{diag} \left\{ \underbrace{n+m-1, n+m-1, \dots, n+m-1}_{n! \cdot 2^m} \right\}, \text{ 从而可得 } P_n \times Q_m \text{ 的 Laplace 谱。我们也设计了程序代}$$

码, 见附录。

例2 求解互连网络 $P_2 \times Q_3$ 的 Laplace 谱。

解: 根据附录中的程序代码 2, 可得互连网络 $P_2 \times Q_3$ 的 Laplace 谱

$$Sp(L(P_2 \times Q_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

5. 总结

本文从师海忠构建的两类新的互连网络 $C_n \times Q_m$ 和 $P_n \times Q_m$ 的拓扑结构出发, 根据邻接谱、Laplace 谱定义, 得到了邻接矩阵并刻画邻接谱特征、拉普拉斯矩阵并刻画 Laplace 谱特征, 并根据证明思路设计了算法, 文末附有程序代码。

根据定理 3.3 可知互连网络 $C_n \times Q_m$ 随着 n 和 m 的增大, 最大特征值与最小非零特征值之间的差距会越大, 因此该图的直径会越来越小; 同理可得互连网络 $P_n \times Q_m$ 也是如此。

根据定理 3.4 可知互连网络 $C_n \times Q_m$ 的 Laplace 矩阵第二小特征值(也称代数连通度)大于零, 则该图是

连通的；同理可得互连网络 $P_n \times Q_m$ 也是连通的。又因为 $C_n \times Q_m$ 的代数连通度大于 $P_n \times Q_m$ ，因此互连网络 $P_n \times Q_m$ 的节点间平均路径长度要比互连网络 $C_n \times Q_m$ 更大。

下一步我们根据所得到的谱特征，研究其性质并反馈在互连网络的一些不变量中。

参考文献

- [1] 师海忠. 几类新的笛卡尔乘积互连网络[J]. 计算机科学, 2013, 40(S1): 265-270+306.
- [2] Brouwer, A.E. and Haemers, W.H. (2011) Spectra of Graphs. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6>
- [3] 徐喜荣, 曹楠, 张勇, 等. 折叠立方体网络 Qfn Laplace 矩阵的谱[J]. 大连理工大学学报, 2013, 53(5): 777-780.
- [4] 陈明. 关于一些特殊超立方体的谱及其 Laplace 谱的研究[D]: [硕士学位论文]. 漳州: 漳州师范学院, 2009.
- [5] 许进, 屈瑞斌. 超立方体的谱(英文) [J]. 工程数学学报, 1999(4): 1-5.
- [6] El-Amawy, A. and Latifi, S. (1991) Properties and Performance of Folded Hypercubes. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **2**, 31-42. <https://doi.org/10.1109/71.80187>
- [7] Niu, B., Zhou, S. and Zhang, H. (2023) The Normalized Laplacian Spectrum of Folded Hypercube with Applications. *Parallel Processing Letters*, **33**, 2330001. <https://doi.org/10.1142/S0129626423300015>
- [8] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan Press. <https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2>
- [9] Brouwer, A.E. and Haemers, W.H. (2012) Spectra of Graphs. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6>

附录

1.程序代码 1:

```
n=Input["n="];
m=Input["m="];
FactorialPlusOne:=Factorial[n]+1;
g1=2*Cos[Pi*Range[1,FactorialPlusOne-1]/FactorialPlusOne];
g2=Eigenvalues[AdjacencyMatrix[HypercubeGraph[m]]];
cartesianProduct:=Tuples[{g1,g2}];
allSums:=Plus@@@cartesianProduct;
allSums
```

2.程序代码 2:

```
n=Input["n="];
m=Input["m="];
FactorialPlusOne:=Factorial[n]+1;
g1=2*Cos[Pi*Range[1,FactorialPlusOne-1]/FactorialPlusOne];
g2=Eigenvalues[AdjacencyMatrix[HypercubeGraph[m]]];
cartesianProduct:=Tuples[{g1,g2}];
allSums:=Plus@@@cartesianProduct;
allSums
%+(n+m-1)
```